

一维 Logistic 映射混沌伪随机序列统计特性研究*

李彩虹¹, 李贻斌², 赵磊¹, 张艳华¹, 张新慧¹

(1. 山东理工大学 计算机科学与技术学院, 山东 淄博 255049; 2. 山东大学 控制科学与工程学院, 济南 250061)

摘要: 针对一维 Logistic 映射的非线性混沌动力学特性进行了分析, 并提出一种混沌伪随机序列的统计特性改进算法, 以求取得比一般随机数构造方法更好的统计特性。利用一维 Logistic 映射产生的混沌时间序列, 加入反正弦与反余弦变换, 对 Logistic 映射进行优化改进, 以提高伪随机数列的统计特性。通过定性分析和定量计算发现, 改进后的 Logistic 映射统计特性受迭代次数的限制较小, 在随机性和均匀性上都优于常用的随机数列构造方法。

关键词: 一维 Logistic 映射; 混沌; 伪随机数列; 反正弦与反余弦变换; 统计特性

中图分类号: TP242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2014)05-1403-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.05.028

Research on statistical characteristics of chaotic pseudorandom sequence for one-dimensional Logistic map

LI Cai-hong¹, LI Yi-bin², ZHAO Lei¹, ZHANG Yan-hua¹, ZHANG Xin-hui¹

(1. College of Computer Science & Technology, Shandong University of Technology, Zibo Shandong 255049, China; 2. School of Control Science & Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: To obtain better evenness, this paper presented an improved algorithm of producing the chaotic pseudorandom sequence based on the analysis of nonlinear dynamic characteristics statistical characteristics of the one-dimensional Logistic map. The arcsine and arccosine transformation were used to enhance the randomness of pseudorandom sequence produced by the one-dimensional Logistic map. The qualitative analysis and the numerical calculation results show that the iterative times has little influence on the statistical characteristics of the improved Logistic map sequence and the better evenness can be obtained with regard to the previous works.

Key words: one-dimensional Logistic map; chaos; pseudorandom sequence; arcsine and arccosine transformation; statistical characteristics

混沌序列由混沌系统产生, 而混沌系统则是一种复杂的非线性动力学系统。非线性动力学系统在一定的条件下会进入混沌状态, 即出现确定的、类随机的、既非周期又不收敛的过程。根据混沌系统方程, 只需调整系统参数与初值, 即可产生一系列非相关、类随机、确定可再生的混沌序列。混沌序列是混沌运动的轨迹, 具有遍历性、随机性、非周期性以及对系统参数与初值的敏感依赖性^[1]。因此, 混沌系统被广泛应用于保密通信^[2]、数据安全^[3]、移动机器人全覆盖遍历规划^[4,5]等众多科研领域中。

混沌系统中的一维 Logistic 混沌映射结构简单、性能良好, 是目前应用最为广泛的一种混沌映射, 以其遍历性、对初值高度敏感性的特点而备受关注^[6]。目前存在的主要问题是大部分的研究者把混沌行为产生的时间序列直接当成了完全的随机序列来应用^[7]。虽然现在使用的随机数列都是伪随机数, 但不同的伪随机数要通过随机检验才能更好地应用。本文针对一维 Logistic 映射进行优化改进, 使改进后的 Logistic 映射产生的伪随机时间序列统计特性提高, 质量较好, 以便于与其他

动力学方程相结合, 推广到工业上需要完成全遍历覆盖、高度不可预测任务等场合^[8]。

1 一维 Logistic 映射动力学特性分析

Logistic 映射虽然形式简单, 但应用却非常广泛, 能够表现出复杂的动态行为。其一维差分形式的映射方程为

$$x(n+1) = rx(n)(1-x(n)) \quad (1)$$

其中: r 为系统参数(又称为分支参数), 且 $r \in (0, 4]$, $x(n) \in (0, 1)$, $n=0, 1, 2, \dots$ 。研究表明, 当 $3.5699456 < r \leq 4$ 时, Logistic 映射进入混沌状态, 所生成的混沌序列 $\{x(n) | n=0, 1, 2, 3, \dots\}$ 具有良好的随机分布特性, 且对初值极为敏感, 是一种颇为理想的伪随机序列。

随机取一初始值, 分析一维 Logistic 映射在迭代 50 次时的非线性动力学行为。图 1 为取初始值 $x(0) = 0.3$ 时, Logistic 映射动力学行为。从图 1 中可以看出:

a) 当 $r < 1$ 时, 最终迭代结果 $x(n) = 0$ 。

b) $r = 1.8$ 时, $x(n)$ 迭代后逐渐趋向于稳定; $r = 2.5$ 时, 迭

收稿日期: 2013-07-18; **修回日期:** 2013-08-27 **基金项目:** 国家自然科学基金重点资助项目(61233014); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2011FL013, ZR2010EL009); 山东省高等学校科技计划资助项目(J13LN27)

作者简介: 李彩虹(1970-), 女, 山东招远人, 副教授, 硕士, 博士, 主要研究方向为移动机器人路径规划、计算智能学习算法等(lich@sdut.edu.cn); 李贻斌(1960-), 男, 山东阳谷人, 教授, 博导, 博士, 主要研究方向为智能移动机器人、特种机器人等; 赵磊(1964-), 男, 山东淄博人, 教授, 硕士, 博士(后), 主要研究方向为移动机器人、计算机测控技术等; 张艳华(1973-), 女, 山东淄博人, 副教授, 硕士, 主要研究方向为计算机应用技术等; 张新慧(1971-), 女, 山东莱阳人, 副教授, 硕士, 博士, 主要研究方向为计算机测控技术等。

代出现震荡现象,但振荡起伏逐渐稳定最终达到平衡状态。

c) $r=3.1$ 时,迭代结果在两个值之间交替出现,迭代收敛到了2个极限点。

d) $r=3.5$ 时,迭代序列收敛到了4个极限点。

e) $r=3.55$ 时,迭代序列收敛到了8个极限点,呈现 2^m 倍周期收敛的情形。

f) 图1(f)(g)中,当 $3.5699456 < r \leq 4$ 时,系统的这种周期行为逐渐丧失,其迭代结果不再反复交替出现,而是进入了混沌状态,此时系统的动力学行为变得复杂,迭代行为出现了随机性,以至于 Logistic 映射的倍周期分叉图的大部分区域被填满。

g) 当 $r=4$ 时,Logistic 映射对应的函数曲线取满了值域空间,即输入值和输出值都在 $(0,1)$ 区间,称为满映射^[9],并在 $(0,1)$ 上呈现近似均匀的伪随机分布的特性,即 Logistic 映射生成的混沌序列的分布具有较好的遍历性。

h) r 取区间内的任意值时,混沌系统均具有有界性。 $x(n)$ 轨线始终局限于一个确定的区域,这个区域称为混沌吸引域。无论混沌系统内部如何不稳定,它的轨线都不会走出混沌吸引域,因此从整体上说混沌系统是稳定的。

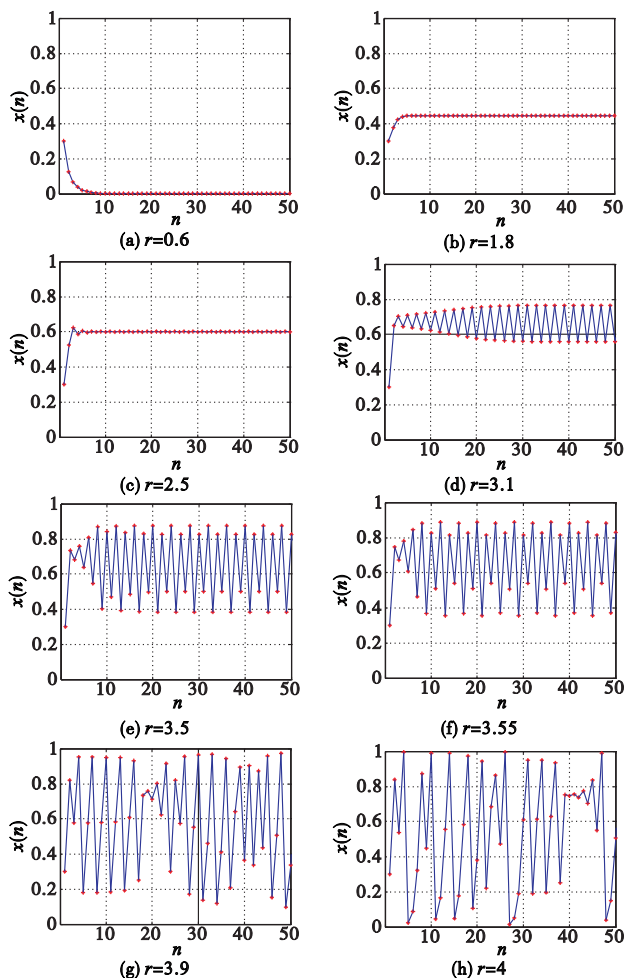


图1 $x(0)=0.3$ 时的 Logistic 映射动力学行为

另外,混沌系统对初始值也是很敏感的,初始值相差很小,迭代有限次后的值相差就很大。例如当 $r=4$ 时,初始值 $x(0)=0.3$ 时迭代 20 次后, $x(20)=0.3794$ 。当初始值仅相差 0.00001,即 $x(0)=0.300001$ 时, $x(20)=0.0084$,迭代 20 次后 $x(20)=0.0084$ 。迭代结果相差了 45 倍。结算结果如图1(h)和图2所示。对初始值的敏感特性,决定了混沌时间序列具有高度不可预测性。

混沌迭代值虽然对初始值敏感,但初始值的大小不影响混沌状态的出现。图3显示出了图1各种状态下 Logistic 映射的倍周期分叉图。倍周期分叉图的形状与初始值的大小基本无关,图3(a)中 $x(0)=0.3$ 时和(b)中 $x(0)=0.8$ 时的分叉图基本相同。因此, $x(0)$ 取 $(0,1)$ 区间内的任意值,Logistic 映射都能够进入混沌状态。

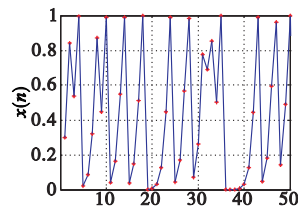


图2 $x(0)=0.300001$, $r=4$ 时的 Logistic 映射动力学行为

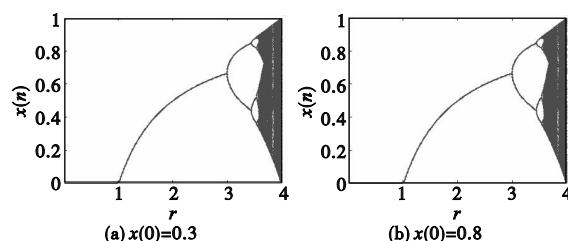


图3 Logistic 映射倍周期分叉图

2 一维 Logistic 映射混沌时间序列的随机性能分析

第1章中分析了一维 Logistic 映射在取一定的初始值时, Logistic 映射的动态行为与分形参数 r 密切相关。随着 r 的变化, Logistic 映射可以呈现出周期性或混沌态。具体地讲,当 $0 \leq r \leq 3.5699456 \cong r_c$ 时,序列 $\{x(n)\}$ 呈现出周期为 2^m (m 为正整数) 的周期性;当 $r_c < r \leq 4$ 时, Logistic 映射处于混沌状态,此时由 Logistic 映射产生的序列 $\{x(n)\}$ 非周期、不收敛、对初始值极其敏感;当 $r=4$ 时, Logistic 映射的输入值和输出值都在 $(0,1)$ 区间,具有极好的遍历特性。因此本文采用式(2)作为伪随机序列生成器。

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n)) \quad (2)$$

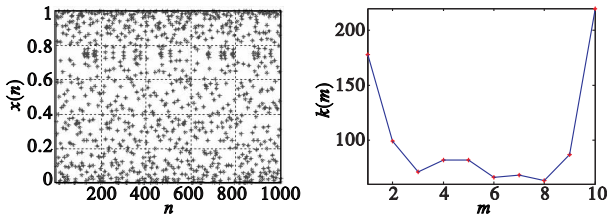
一个好的伪随机序列应该有比较平均的分布,也就是说,每个数在空间中出现的概率应该是相等的。本文对不同的初始值 $x(0)$ 、不同迭代次数 n 下的 Logistic 映射进行了讨论。样本的取值范围分布在 10 个等宽区间,即分成 $0 \sim 0.1, 0.1 \sim 0.2, \dots, 0.9 \sim 1$ 共 10 个区间,并统计迭代数据落在各个区间上的数目 $k(m)$ ($m=1, \dots, 10$)。图4~7分别显示出了不同情况下的 Logistic 混沌映射所产生的伪随机时间序列 $\{x(n)\}$ 在空间的分布状态。

从图4~7中可以看出, Logistic 映射产生的伪随机序列的分布并不是均匀的,是一种两头大中间小的情形,从而导致其均匀性不好。但 Logistic 伪随机序列的统计特性比较稳定,与初始值和迭代次数关系不大。对于一般情形来说, Logistic 映射产生的序列是可以满足基本需求的。为了获得更好的平均性或遍历特性,需要对其统计特性进行优化改进。

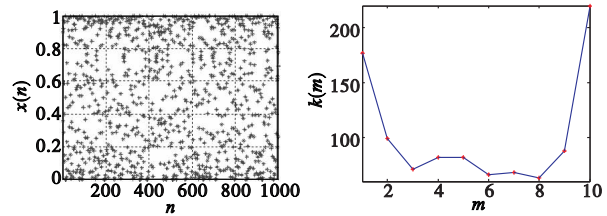
3 随机数列的统计分布性能分析

在未用混沌控制信号以前,人们通常习惯采用随机信号发生器来产生一些随机时间序列。随机信号由于其简单性,历来

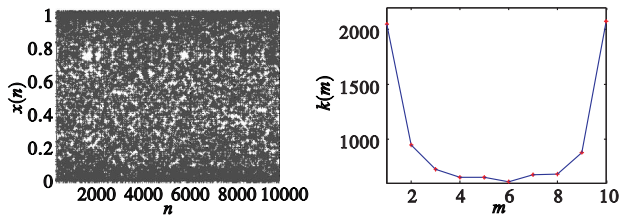
被用于解决一些问题和算法。这里为了与一维 Logistic 混沌映射时间序列进行对比,首先讨论一般的随机数列的统计特性。



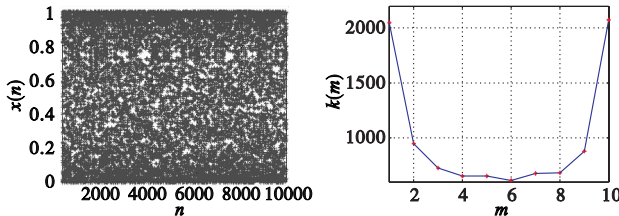
(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图4 $x(0)=0.1, n=1\ 000$ 时的Logistic映射迭代数据分布特性



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图5 $x(0)=0.9, n=1\ 000$ 时的Logistic映射迭代数据分布特性



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图6 $x(0)=0.1, n=10\ 000$ 时的Logistic映射迭代数据分布特性



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图7 $x(0)=0.9, n=10\ 000$ 时的Logistic映射迭代数据分布特性

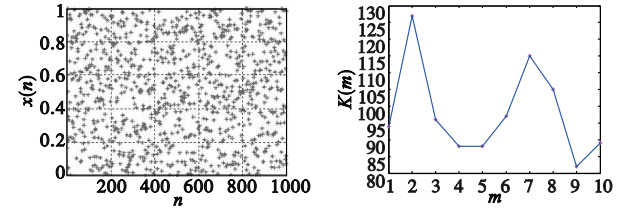
利用计算机产生随机数有物理方法和数学方法两种。物理方法成本过高,因此利用数学方法产生随机数得到了广泛的应用。虽然产生的随机数为伪随机数,但它具有占用内存少、速度快、可重复性的优点。用数学方法产生随机数的常用方法有线性同余法、素数模乘同余法和线性同余组合发生器(扩大周期法)等。线性同余法^[10]为

$$\begin{cases} x(n) = (ax(n-1) + c) \pmod{M} \\ r(n) = x(n)/M \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

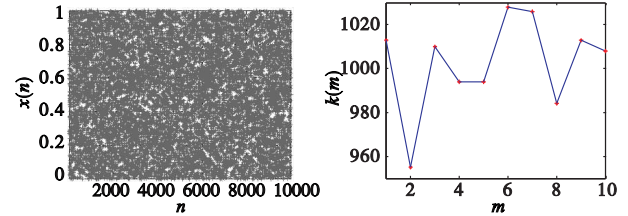
初值 $x(0)$

线性同余法通过满足式(3)产生随机序列,主要参数为 a 、 c 、 M 。只有选择合适的参数才能得到随机数的周期接近或达到 M 。当 $a = 1103515245/65536$, $M = 32768$ (Linux 下 $M = 2147483647$), $c = 12345/65536$ 时,用式(3)产生的伪随机数方法就是人们通常所使用的标准库函数 rand。

利用第2章中的方法,分析利用式(3)中随机数产生方法生成时间序列的随机特性。分析结果如图8、9所示。从图8和9中可以看出,随机函数的分布特性与迭代次数关系很大,迭代次数越大,其在各区间上的分布越均匀,说明随机函数在需要迭代次数很多的情形下,也有一定的应用场合。



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图8 $n=1\ 000$ 时的随机映射迭代数据分布特性



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图9 $n=10\ 000$ 时的随机映射迭代数据分布特性

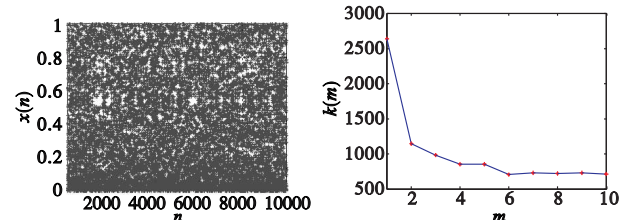
4 Logistic 映射均匀性改进方案

比较混沌信号和随机信号的随机分布特性,可以看出混沌信号的随机分布稳定,不受初始值和迭代次数的影响,其分布特性可以控制。而常用的随机信号的随机分布特性不稳定,其均匀性受迭代次数的影响较大。如果混沌信号的随机特性能够优化,就可以获得在任何情形下比随机信号更好的分布特性。

Logistic 映射的混沌控制具有两头大、中间小的分布特性。优化的方向是能够平均两头的分布。基于这种思想,采用反正弦和反余弦对混沌映射产生的 $x(n)$ 信号进行变换:

$$x(n) = \frac{2\arcsin x(n)}{\pi} \quad (4)$$

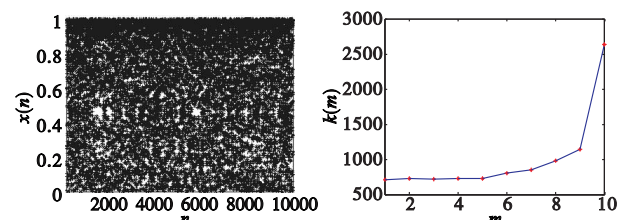
变换后的分布特性如图10所示。从图10可以看出,反正弦变换把混沌映射的大头不对称分布特性去掉了。



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图10 $x(0)=0.1, n=10\ 000$ 时反正弦变换迭代数据分布特性

同理,如果采用式(5)中的反余弦变换,可得到图11所示的分布特性。

$$x(n) = \frac{2\arccos x(n)}{\pi} \quad (5)$$

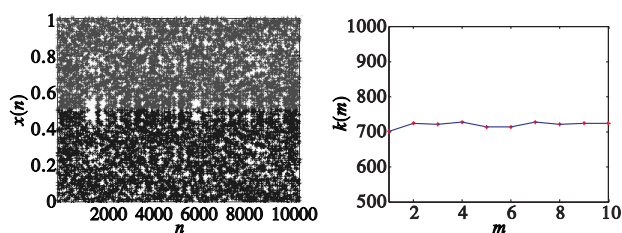


(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图11 $x(0)=0.1, n=10\ 000$ 时的反余弦变换迭代数据分布特性

从图11中可以看出,反余弦变换平滑了混沌映射小头分布不均匀的问题。因此将反正弦与反余弦变换结合起来,就可以优化混沌函数的随机特性。变换后的分布特性如图12

所示。

$$x(n) = \begin{cases} \frac{2\arccos x(n)}{\pi} & 0 < x(n) \leq 0.5 \\ \frac{2\arcsin x(n)}{\pi} & 0.5 < x(n) < 1 \end{cases} \quad (6)$$



(a) 迭代序列在(0,1)区间上的分布 (b) 落在各个区间上的统计数据
图12 $x(0)=0.1, n=10\,000$ 时的混沌优化变换迭代数据分布特性

从图12中可以看出,混沌信号的随机特性被明显地改变,在各个区间上的统计数据分布比较均匀,没有显著地变化。

5 均匀性检验的定量讨论

以上通过图形方式定性地讨论了改进后的一维 Logistic 混沌映射的随机特性。通过图形区间的分布,可以看出改进后混沌映射的均匀性大大改善。同时,也可以通过定量计算,进一步讨论改进前后混沌函数的随机特性。对于给定的随机数,采用定量方法进行均匀性检验主要是采用频率检验法,手段是检验所产生的随机数落在各子区间的频率与理论频率之间的差异是否显著。常用的频率检验法有两种:K-S 检验(kolmogorov-smirnov)和 χ^2 检验。这里本文使用 χ^2 检验。其思路是^[11]:

将(0,1)区间分成 k 个相等的子区间,检查总数为 N 的随机数落在各子区间的实际频数 n_i 与理论频数的差异是否显著。设落在第 i 个子区间的随机数的实际频数为 n_i ,落在第 i 个子区间的理论频数为 $m_i, m_i = N/k$ 。建立 χ^2 统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} = \frac{k}{N} \sum_{i=1}^k (n_i - \frac{N}{k})^2 \quad (7)$$

当样本量足够大时,该统计量近似服从自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布。显著水平 α 一般取0.01~0.05。 χ^2 应服从 $\chi^2(k-1)$ 分布,在给定一个显著水平 α 下,可查表得到临界值 $\chi_\alpha^2(k-1)$ 。如果 $\chi^2 > \chi_\alpha^2$,则在该显著水平上拒绝该批样本为均匀的假设。

χ^2 检验步骤:a)分区间 k ;b)统计 n_i 和计算 m_i ;c)计算统计量 χ^2 ;d)根据显著水平及自由度 $k-1$ 从 χ^2 表查临界值 χ_α^2 ;e)比较 χ^2 和临界值 χ_α^2 ,确定是否接受。

同时,通过计算得出结果 χ^2 ,可以比较 χ^2 的大小来看出各种方法的优劣, χ^2 越小说明均匀性越好。对于前几章中提到的几种方法,本文用 MATLAB 输出每种方法的随机数并作出相关的检验,计算出图5~12中几种情况下采样数据的 $x(n)$ 值,并查表计算出 χ^2 值^[12],计算结果如表1所示。

表1 伪随机数均匀性检验

方法	$x(n)$	χ^2	说明
Logistic 混沌映射	图5	255.12	拒绝
随机数据(1)	图8	17.73	拒绝
随机数据(2)	图9	4.315	接受
修改后的 Logistic 混沌映射	图12	0.840 2	接受

表中第三列数据是计算所得到的 χ^2 测试值。图5中的

Logistic 混沌映射产生的伪随机数列的 χ^2 值是255.12;图8中迭代次数为1000次的伪随机数列的 χ^2 值是17.73,与临界值16.919相比,这两种情况都不能通过均匀性测试;而图9中迭代10000次伪随机数列的 χ^2 值为4.315,可以通过均匀性测试,并具有较好的统计特性,说明随机数列的统计特性随着迭代次数的增加而得到了改善。图12中修改后的 Logistic 混沌映射的 χ^2 具有最小值0.840 2,因此在四种情况中,均匀性最好。

6 结束语

本文讨论了一维 Logistic 映射从周期走向倍周期分叉的混沌动力学特性,并分析了满映射情况下在(0,1)区间的统计分布特性,提出将反正弦与反余弦相结合来改进 Logistic 映射的统计特性的算法。改进后的伪时间序列统计特性好于常见的随机信号发生器。但改进后的一维 Logistic 映射具有更多的优势:

a)具有混沌的确定性。统计特性比较稳定,受迭代次数影响较小,因此可以使动力学规划器得到更广泛的应用。

b)对初始值的高度敏感性迭代后的伪随机时间序列是高度不可预测的。

c)提高了混沌的遍历特性。均匀性的提高,使动力学行为可平均地访问空间的每一点,因此可与动力学方程相结合,推广到工业上需要完成全遍历覆盖、高度不可预测任务等场合。

参考文献:

- [1] 卢守东. 基于混沌序列的通用数字图像加密算法[J]. 计算机安全, 2012(8): 30-34.
- [2] 俞斌, 王炼红, 贾雅琼. 基于改进混沌扩频序列的多用户混沌扩频通信系统的研究与仿真[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(4): 1161-1165.
- [3] 李玲, 王伟男, 李津杰. 对超混沌系统的图像加密算法安全性的改进[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(11): 4335-4337.
- [4] VOLOS C, KYPRIANIDIS I M, STOUBOULOS I N. A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2012, 60(4): 651-656.
- [5] KIA F, HENRY L. A cooperative mobile robot task assignment and coverage planning based on chaos synchronization [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(1): 161-176.
- [6] 彭川, 莫海芳. 基于 Logistic 混沌序列的鲁棒数字水印方案[J]. 计算机仿真, 2012, 29(9): 278-282.
- [7] VOLOS C, KYPRIANIDIS I M, STOUBOULOS I N. Motion control of robots using a chaotic truly random bits generator [J]. Journal of Engineering Science and Technology Review, 2012, 5(2): 6-11.
- [8] FAHMY A A. Chaotic mobile robot workspace coverage enhancement [J]. Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems, 2012, 6(1): 33-38.
- [9] PEITGEN H O, JÜRGENS H, SAUPE D. Chaos and fractals: new frontiers of science [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [10] 裴定一, 祝跃飞. 算法数论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [11] 高惠璇. 统计计算[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
- [12] 陈晓龙, 施庆生, 邓晓卫. 概率论与数理统计[M]. 2版. 南京: 东南大学出版社, 2011.