

限定初始状态非线性取代积分滑模算法的研究*

杨兴明, 许东昌

(合肥工业大学 计算机与信息学院, 合肥 230009)

摘要: 针对常规滑模控制算法抑制抖振的边界层方法存在稳态误差的缺点, 考虑在常规滑膜面基础上加一个跟踪误差的积分项, 这就是常规积分滑膜控制器。积分项的引入虽然可以减少稳态误差, 补偿模型的不确定性, 但是在大的初始误差条件下, 大的超调和长的调节时间会使系统的暂态性能恶化甚至可能出现积分 windup 效应导致整个系统的不稳定, 同时为了克服常规滑模控制在到达阶段不具有鲁棒性的缺点, 又设计了限定初始状态非线性取代积分滑模控制器。通过仿真结果可以看出这种滑模控制器不但能够较好地削弱稳态误差和抑制抖振, 而且也具有较好的鲁棒性。

关键词: 倒立摆; 限定初始状态; 滑模控制器; 非线性取代; 稳态误差; 抖振

中图分类号: TP273; TP301.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2014)05-1374-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.05.021

Research of nonlinear replacement integral sliding mode algorithm at limited initial state

YANG Xing-ming, XU Dong-chang

(School of Computer & Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Because the boundary layer method of traditional sliding mode control algorithm restrains buffeting had steady-state error, a tracking error of the integral term was added to the traditional sliding mode surface and this was the traditional integration sliding mode controller. Although the introduction of the integral term could reduce the steady-state error and offset the uncertainty of model, in a large initial error condition, large overshoot and long regulation time would cause deterioration of system transient performance, Integral windup effect might even occurred and it would lead to instability of the whole system, meanwhile in order to overcome the shortcomings that the traditional sliding mode control didn't have the robustness in the reaching phase, the paper designed the nonlinear replacement integral sliding mode controller at the limited initial state. The simulation results show that this sliding mode controller not only can weakened steady-state error and restrain the buffeting well but also has a good robustness.

Key words: inverted pendulum; limited to the initial state; sliding mode controller; nonlinear replacement; steady-state error; buffeting

由于两轮移动小车对控制算法的实时性要求很高, 虽然现在国内外学者研究出了很多控制算法, 这些算法虽然很先进, 但是算法的复杂度往往很高, 对处理器要求较高, 一般的处理器很难保证实时性。相比较而言, 滑模控制的算法复杂度较好, 适合用在两轮小车上, 同时针对常规滑模控制算法用于抑制抖振的边界层方法存在稳态误差的缺点, 为了减少稳态误差, 在文献[1]的基础上设计了常规积分滑膜控制器。积分项的引入虽然可以减少稳态误差, 但是在大的初始误差条件下会使系统的暂态性能恶化甚至可能出现积分 windup 效应导致整个系统的不稳定。同时为了克服常规滑模控制在到达阶段不具有鲁棒性的缺点, 根据文献[2,3]提出的思想, 设计了限定初始状态非线性取代积分滑模控制器并在仿真分析时对两种滑模控制方法进行了对比。

分别是经典力学的分析方法、基于拉格朗日方程的分析方法以及基于能量的分析方法。其中基于经典力学的分析方法十分复杂, 比较简单的分析方法有拉格朗日方程分析方法和能量分析方法, 本文将利用能量分析方法对两轮移动倒立摆小车建模, 系统的模型如图1所示。

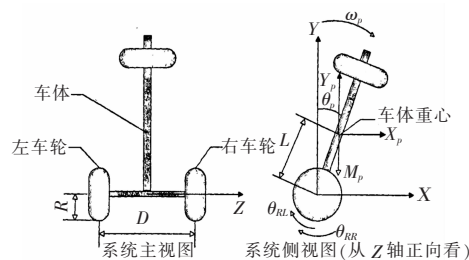


图1 倒立摆坐标系和参数标注

1 两轮移动式倒立摆小车的数学模型

两轮移动式倒立摆小车数学模型的建立方法主要有三种,

1.1 系统参数和变量说明

X 表示车底盘中心的位移; θ 表示摆杆与竖直方向的角度; $\delta, \dot{\delta}$ 分别表示车体绕摆杆旋转的角度和角速度; M_p, M_r 分

收稿日期: 2013-07-19; 修回日期: 2013-08-23 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61100211)

作者简介: 杨兴明(1977-), 男, 云南安宁人, 副教授, 硕士, 主要研究方向为现代智能控制、信号检测与处理、小波信号处理和物联网技术; 许东昌(1986-), 男, 安徽滁州人, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机控制(xdc86@126.com)。

别表示车体质量和车轮的质量; $J_R = J_{RL} = J_{RR} \setminus J_{P\theta} \setminus J_{P\delta}$ 分别表示小车车轮的转动惯量,车体绕通过质心且平行于 Z 轴的转动惯量和车体绕摆杆的转动惯量; R 表示车轮半径; L 表示车体重心到电机轴线之间的距离; D 表示两轮之间的距离; K_m 、 K_e 表示电机的力矩系数和电机的反电动势系数; U_L 、 U_R 表示左右车轮的控制电压,以上各变量均采用国际单位。

1.2 两轮移动式倒立摆小车数学模型的推导过程

两轮移动式倒立摆小车受到的几个约束条件如下:

$$X_{RL} = R \times \theta_{RL} \quad (1)$$

$$X_{RR} = R \times \theta_{RR} \quad (2)$$

$$X_{RL} - X_{RR} = D \times \delta \quad (3)$$

$$X_P = X_{RM} + L \sin \theta_P \quad (4)$$

$$\dot{X}_P = \dot{\theta}_P L \cos \theta_P + \dot{X}_{RM} \quad (5)$$

$$Y_P = L \cos \theta_P \quad (6)$$

$$\dot{Y}_P = -\dot{\theta}_P L \sin \theta_P \quad (7)$$

$$X_{RR} + X_{RL} = 2X_{RM} \quad (8)$$

其中:式(5)由式(4)微分得到,式(7)由式(6)微分得到。在对两轮式移动倒立摆小车进行建模时,需要在平衡点附近进行线性化处理,因为两轮式移动倒立摆小车本身是一个非线性系统。如果不作线性化处理,得到的方程是很复杂的,不利于求解,为了实现对系统的控制,本文对该系统进行了线性化处理,即在小角度范围内,取 $\sin \theta_P = \theta_P$, $\cos \theta_P = 1$ 。此外, $J_{P\delta}$ 是车体绕垂直方向轴(Y 轴)的转动惯量,它的值还与 θ_P 有关,由于系统在运行中 θ_P 在一个较小的角度范围内不断变化,为了简化取 $J_{P\theta}|_{\theta_P=0}$ 来代替 $J_{P\delta}$ 。

系统的动能 T 和势能 V :

$$T = \frac{1}{2} M_{RL} \dot{X}_{RL}^2 + \frac{1}{2} M_{RR} \dot{X}_{RR}^2 + \frac{1}{2} J_{RL} \dot{\theta}_{RL}^2 + \frac{1}{2} J_{RR} \dot{\theta}_{RR}^2 + \frac{1}{2} M_P [(\dot{\theta}_P L \cos \theta_P + \dot{X}_{RM})^2 + (-\dot{\theta}_P L \sin \theta_P)^2] + \frac{1}{2} J_{P\theta} \dot{\theta}_P^2 + \frac{1}{2} J_{P\delta} \dot{\delta}^2 \quad (9)$$

$$V = M_P g L \cos \theta_P \quad (10)$$

零势能面选取在两车轮运动的平面上。系统的输入功率在这里是电机对系统所输入的功率:

$$P_{in} = C_L \dot{\theta}_{RL} + C_R \dot{\theta}_{RR} - (C_L + C_R) \dot{\theta}_P \quad (11)$$

车轮在作纯滚动的情况下,对外界做功为0,系统的输出功率为

$$P_{out} = 0 \quad (12)$$

结合约束条件,可以得到三个状态方程:

$$(M_{RL} R^2 + J_{RL} + \frac{1}{4} M_P R^2 + \frac{R^2}{D^2} J_{P\delta}) \ddot{\theta}_{RL} + (\frac{1}{4} M_P R^2 - \frac{R^2}{D^2} J_{P\delta}) \ddot{\theta}_{RR} + \frac{1}{2} M_P R L \ddot{\theta}_P = C_L \quad (13)$$

$$(M_{RR} R^2 + J_{RR} + \frac{1}{4} M_P R^2 + \frac{R^2}{D^2} J_{P\delta}) \ddot{\theta}_{RR} + (\frac{1}{4} M_P R^2 - \frac{R^2}{D^2} J_{P\delta}) \ddot{\theta}_{RL} + \frac{1}{2} M_P R L \ddot{\theta}_P = C_R \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} M_P R L \ddot{\theta}_{RL} + \frac{1}{2} M_P R L \ddot{\theta}_{RR} + (J_{P\theta} + M_P L^2) \ddot{\theta}_P = M_P g L \theta_P - (C_L + C_R) \quad (15)$$

本文取 X_{RM} 、 V_{RM} 、 θ_P 、 ω_P 、 δ 、 $\dot{\delta}$ 来表示系统的状态,可以计算出两轮式移动倒立摆小车的状态空间方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{RM} \\ \dot{V}_{RM} \\ \dot{\theta}_P \\ \dot{\omega}_P \\ \dot{\delta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{RM} \\ V_{RM} \\ \theta_P \\ \omega_P \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\text{其中: } A_{23} = \frac{-M_P^2 L^2 g}{M_P J_{P\theta} + 2(J_{P\theta} + M_P L^2)(M_R + J_R/R^2)} \quad (17)$$

$$A_{43} = \frac{M_P^2 g L + 2 M_P g L (M_R + J_R/R^2)}{M_P J_{P\theta} + 2(J_{P\theta} + M_P L^2)(M_R + J_R/R^2)} \quad (18)$$

$$B_2 = \frac{(J_{P\theta} + M_P L^2)/R + M_P L}{M_P J_{P\theta} + 2(J_{P\theta} + M_P L^2)(M_R + J_R/R^2)} \quad (19)$$

$$B_4 = \frac{-\frac{R+L}{R} M_P - 2(M_R + J_R/R^2)}{M_P J_{P\theta} + 2(J_{P\theta} + M_P L^2)(M_R + J_R/R^2)} \quad (20)$$

$$B_6 = \frac{D/2R}{J_{P\theta} + \frac{D^2}{2R}(M_R R + J_R/R^2)} \quad (21)$$

电机转矩 C 和控制电压 U 的关系为: $C = K_m (U - K_e \dot{\theta}_P)$ 。其中: K_m 、 K_e 为电机的力矩系数和反电动势系数。将该式带入状态方程得到如下方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2K_m K_e b_2}{R} & a_{23} & 2K_m K_e b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2K_m K_e b_4}{R} & a_{43} & 2K_m K_e b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-DK_m K_e b_6}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_e b_2 & K_e b_2 \\ 0 & 0 \\ K_e b_4 & K_e b_4 \\ 0 & 0 \\ K_e b_6 & -K_e b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_L \\ U_R \end{bmatrix} \quad (22)$$

又由式(22)可以看出车体的状态 δ 、 $\dot{\delta}$ 与状态 X_{RM} 、 V_{RM} 、 θ_P 、 ω_P 是互不相关的,所以可以将控制系统解耦得到两个独立的控制子系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{v}_m \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2K_m K_e b_2}{R} & a_{23} & 2K_m K_e b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-2K_m K_e b_4}{R} & a_{43} & 2K_m K_e b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ v_m \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_m b_2 \\ 0 \\ K_m b_4 \end{bmatrix} U_\theta \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-DK_m K_e b_6}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_m b_6 \end{bmatrix} U_\delta \quad (24)$$

由式(24)可以看出两轮移动倒立摆小车绕 Y 轴左右旋转的状态转移矩阵为常值矩阵,没有不确定性,所以本文将重点放在小车位移和摆杆倾角控制器设计上。为了便于设计滑模控制器本文考虑将式(23)变化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_\theta(X, t) + g_\theta(X, t)u(t) + d_\theta(t) \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_\omega(X, t) + g_\omega(X, t)u(t) + d_\omega(t) \end{cases} \quad (25)$$

其中: $X = [\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}]^T$, $f_\theta(X, t)$ 、 $f_\omega(X, t)$ 、 $g_\theta(X, t)$ 、 $g_\omega(X, t)$ 可以由式(23)得到,这种变化较为简单,这里不再具体推导, $d_x(t)$ 、 $d_\theta(t)$ 是考虑到外界存在干扰而加到系统模型中的。

2 限定初始状态非线性取代积分滑模控制器设计

在正式设计之前本文先对式(25)描述的系统作如下说明:

a) $f_x(X, t)$ 、 $f_\theta(X, t)$ 是不确定的有界函数,其估计函数分别为 $\hat{f}_x(X, t)$ 、 $\hat{f}_\theta(X, t)$ 且有如下关系 $f_x(X, t) = \hat{f}_x(X, t) + \Delta f_x(X, t)$ 、 $f_\theta(X, t) = \hat{f}_\theta(X, t) + \Delta f_\theta(X, t)$, 同时满足 $|\Delta f_x(X, t)| \leq F_x(X, t)$ 、 $|\Delta f_\theta(X, t)| \leq F_\theta(X, t)$ 。

b) $d_x(t)$ 、 $d_\theta(t)$ 是外部有界干扰且满足 $|d_x(t)| \leq D_x(t)$ 、 $|d_\theta(t)| \leq D_\theta(t)$ 。

定义系统跟踪误差: $e_x = x - x_d$ 、 $e_\theta = \theta - \theta_d$ 。其中: x_d 、 θ_d 是参考信号,控制的结果是使 x 、 θ 跟踪参考信号。

2.1 常规积分滑膜控制器设计

根据文献[3,4]可知对于常规滑模控制用于抑制抖振的边界层方法是存在稳态误差的,为了削弱稳态误差,考虑在常规滑膜面的基础上加一个跟踪误差的积分项,这就是常规积分滑膜控制器。本文设计的滑膜面为

$$\begin{cases} s_x(t) = \dot{e}_x + \lambda_x e_x + \alpha \int_0^t e_x d\tau \\ s_\theta(t) = \dot{e}_\theta + \lambda_\theta e_\theta + \beta \int_0^t e_\theta d\tau \\ S(t) = \lambda s_x + s_\theta \end{cases} \quad (26)$$

$\alpha > 0, \beta > 0$, 这样选取滑模面的等效控制律为

$$\begin{aligned} u_{eqx} &= \lambda(-\dot{f}_x - \lambda_x \dot{e}_x - \alpha e_x + \ddot{x}) / (\lambda g_x + g_\theta) \\ u_{eq\theta} &= (-\dot{f}_\theta - \lambda_\theta \dot{e}_\theta - \beta e_\theta + \ddot{\theta}_d) / (\lambda g_x + g_\theta) \end{aligned}$$

切换控制律为

$$u_{sw} = -K \text{sat}(S(t)/\mu) / (\lambda g_x + g_\theta)$$

其中: $K = \lambda F_x(X, t) + D_x(X, t) + F_\theta(X, t) + D_\theta(X, t) + \eta, \eta > 0$

$$\text{sat}(S(t)/\mu) = \begin{cases} S(t)/\mu, |S(t)| \leq \mu, \text{下同} \\ \text{sgn}(S(t)), |S(t)| > \mu \end{cases}$$

由此可得整个系统的控制律为

$$u = u_{eqx} + u_{eq\theta} + u_{sw} \quad (27)$$

定理 1 对于式(25)所描述的系统,取式(26)形式的滑膜面,如果控制律为式(27)的形式,则滑模变量 S 可在有限时间内到达边界层。

证明 当滑模变量在边界层外时,切换控制律可以写成 $u_{sw} = -K \text{sat}(S(t)/\mu) / (\lambda g_x + g_\theta), \mu$ 为边界层厚度。备选 Lyapunov 函数 $V_s = \frac{1}{2} S^2(t)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= S(t) \dot{S}(t) = S(\lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \lambda \ddot{e}_x + \ddot{e}_\theta) = \\ &S(\lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \lambda f_x + \lambda d_x + f_\theta + d_\theta + (g_\theta + \lambda g_x) \\ &(g_\theta + \lambda g_x)^{-1} (-\dot{f}_\theta - \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d - \beta e_\theta - K \text{sgn}(S/\mu) - \\ &\lambda \dot{f}_x - \lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda \ddot{x}_d - \lambda \alpha e_x)) = \\ &S(\lambda \Delta f_x + \Delta f_\theta + \lambda d_x + d_\theta - \lambda \alpha e_x - \beta e_\theta - K \text{sgn}(S/\mu)) \leq \\ &-\eta |S/\mu| - \alpha |\lambda e_x| - \beta |e_\theta| \leq 0 \end{aligned}$$

得证。

2.2 限定初始状态非线性取代积分滑模控制器设计

在滑模控制系统中,系统的运动可分为两个阶段:a)到达阶段,在这个阶段中由到达条件保证系统运动在有限时间内从任意初始状态到达滑膜面;b)系统在控制律的作用下作滑模运动到平衡点附近,滑模运动具有较强的鲁棒性,即系统在滑动阶段对满足匹配条件的参数摄动及外界干扰不敏感,限定初始状态滑模控制取消了滑模控制的到达阶段,使倒立摆系统在全程都具有较强的鲁棒性,克服了常规滑模控制在到达阶段不具有鲁棒性的缺点。

$$\begin{cases} s_x = (\dot{e}_x + \lambda_x e_x + \alpha_x \sigma_x - \dot{e}_x(0) - \lambda_x e_x(0)) \\ s_\theta = (\dot{e}_\theta + \lambda_\theta e_\theta + \beta_\theta \sigma_\theta - \dot{e}_\theta(0) - \lambda_\theta e_\theta(0)) \\ S = \lambda s_x + s_\theta \end{cases} \quad (28)$$

同样,定义 σ_i 表示 σ_x 和 σ_θ, e_i 表示 e_x 和 e_θ , 取

$$\dot{\sigma}_i = \begin{cases} \mu \sin \frac{\pi e_i}{2\mu}, |e_i| < \mu (\mu > 0) \\ \mu, |e_i| \geq \mu \\ -\mu, |e_i| \leq -\mu \end{cases} \quad (29)$$

$$u_{eqx} = \lambda(-\dot{f}_x - \lambda_x \dot{e}_x - \alpha_x \dot{\sigma}_x + \ddot{x}_d) / (\lambda g_x + g_\theta)$$

$$u_{eq\theta} = (-\dot{f}_\theta - \lambda_\theta \dot{e}_\theta - \beta_\theta \dot{\sigma}_\theta + \ddot{\theta}_d) / (\lambda g_x + g_\theta)$$

$$u_{sw} = -K \text{sat}(S(t)/\mu)$$

$$K = \lambda F_x(X, t) + D_x(X, t) + F_\theta(X, t) + D_\theta(X, t) + \eta, \eta > 0$$

$$u = u_{eqx} + u_{eq\theta} + u_{sw} \quad (30)$$

定理 2 对于式(25)所描述的系统,取式(28)形式的滑膜面,如果控制律为式(30)的形式则滑模变量 S 可在有限时间内到达边界层。

证明 当滑模变量在边界层外时,切换控制律可以写成 $u_{sw} = -K \text{sgn}(S(t)/\mu), \mu$ 为边界层厚度。备选 Lyapunov 函数

$$V_s = \frac{1}{2} S^2(t), \text{则}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= S(t) \dot{S}(t) = S(\lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \lambda \ddot{e}_x + \ddot{e}_\theta) = \\ &S(\lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \lambda f_x + \lambda d_x + f_\theta + d_\theta + (g_\theta + \lambda g_x) \\ &(g_\theta + \lambda g_x)^{-1} (-\dot{f}_\theta - \lambda_\theta \dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d - \beta \dot{\sigma}_\theta - K \text{sgn}(S/\mu) - \lambda \dot{f}_x - \\ &\lambda \lambda_x \dot{e}_x + \lambda \ddot{x}_d - \lambda \alpha \dot{\sigma}_x)) = S(\lambda \Delta f_x + \Delta f_\theta + \lambda d_x + d_\theta - \lambda \alpha \dot{\sigma}_x - \beta \dot{\sigma}_\theta - \\ &K \text{sgn}(S/\mu)) \leq -\eta |S/\mu| - \alpha |\lambda \mu| - \beta |\mu| \leq 0 \end{aligned}$$

得证。下面给出稳态误差趋近为 0 的证明。

定理 3 对于式(25)描述的非线性倒立摆系统如果选用控制律式(30)则当 $t \rightarrow \infty$ 时,在外界干扰为常值或稳定为常值时其稳态误差趋近于零,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda e_x(t) + e_\theta(t)) = 0$ 。

证明 为了方便本定理的证明定义:

$$m = K(x, t)/\mu$$

$$\delta(X, t) = \lambda(\Delta f_x(x, t) + d_x(t)) + \Delta f_\theta(\theta, t) + d_\theta(t)$$

当系统处于边界层内部时

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \lambda \dot{s}_x + \dot{s}_\theta = \lambda(\lambda_x \dot{e}_x + \ddot{e}_x + \alpha_x \dot{e}_x) + \\ &(\lambda_\theta \dot{e}_\theta + \ddot{e}_\theta + \beta_\theta \dot{e}_\theta) = \delta(X, t) - mS(t) \end{aligned}$$

其中:

$$(\alpha > 0, \beta > 0) \quad (31)$$

对式(31)拉普拉斯变换得

$$S(s) = \frac{1}{s+m} \delta(s)$$

若外界干扰为常值干扰或最终为常值干扰时,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(X, t) = \text{const}(\text{const 为常数})$, 那么根据终值定理有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s}{s+m} \cdot \delta(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+m} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s \delta(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+m} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \text{const}/m \quad (32)$$

显然, $\dot{S}(t)$ 一致连续, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 式(32)带入式(31)中, 有 $\dot{S}(t) \rightarrow 0$, 即

$$\lambda(\lambda_x \dot{e}_x + \ddot{e}_x + \alpha_x \dot{e}_x) + (\lambda_\theta \dot{e}_\theta + \ddot{e}_\theta + \beta_\theta \dot{e}_\theta) = 0 \quad (33)$$

将其变换到 S 域:

$$\begin{aligned} (s^2 + \lambda_x s + \alpha_x) \lambda e_x(s) + (s^2 + \lambda_\theta s + \beta_\theta) e_\theta(s) = \\ \lambda(s+1+\lambda_x) e_x(0) + (s+1+\lambda_\theta) e_\theta(0) \end{aligned} \quad (34)$$

对式(34), 令常数 $\lambda_x = \lambda_\theta = \alpha_x = \beta_\theta = C, C$ 为非零常数, 则

$$\lambda e_x(s) + e_\theta(s) = \frac{\lambda(s+1+C) e_x(0) + (s+1+C) e_\theta(0)}{s^2 + Cs + C} \quad (35)$$

稳态误差 $e(t) = \lambda e_x(t) + e_\theta(t)$

根据拉氏变换的终值定理有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s (\lambda e_x(s) + e_\theta(s)) = \\ &\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda s(s+1+C) e_x(0) + s(s+1+C) e_\theta(0)}{s^2 + Cs + C} = 0 \end{aligned}$$

所以, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

得证。

3 仿真结果及其分析

3.1 实际的仿真参数及其能控性证明

关于建模时参数近似化所引起的误差可以忽略, 这里不再

讨论,本文取得的实际模型参数为

$$M_p = 16.33 \text{ kg}, m_r = 1.13 \text{ kg}, R = 0.105 \text{ m}, l = 0.087 \text{ m},$$

$$K_m = 0.0508 \text{ N} \cdot \text{m/V}, K_e = 0.5732 \text{ V/s/rad},$$

$$J_p = 0.804(1 \pm 0.5) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_r = 0.00623(1 \pm 0.5) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

以 $x = [\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}]^T$ 为状态变量,通过简化模型转换得

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16.84 & 0 & -0.14 & 1.13 \\ -1.22 & 0 & 0.04 & -0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.12 \\ 0.03 \end{bmatrix} u$$

仿真时不确定性干扰参数、控制器参数等选取如下:

a) 对于不确定参数 J_p, J_r 所引起的系统不确定矩阵为 $I_J = [\Delta \bar{A}_J \quad \Delta \bar{B}_J]$ 。

$$\Delta \bar{A}_J = \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.64 & 0 & -0.04 & 0.43 \\ -0.43 & 0 & 0.04 & -0.04 \end{bmatrix}, \Delta \bar{B}_J = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

则系统的不确定性干扰可以表示为

$$I_J = [\alpha_x \times \Delta \bar{A}_J \quad \alpha_y \times \Delta \bar{B}_J]$$

其中: α 为 $[-1 \quad 1]$ 的随机数。

b) 参数 $\lambda_x, \lambda_\theta, \lambda, \alpha, \beta$ 的选取决定滑模面的性能特性。根据参考文献[15]拟采用极点配置的方法选择 $[-9+j, -9-j, -1.5+j, -1.5-j]$, 这样选取的系数可以满足系统设计的性能指标。因此选取的仿真参数为: $\lambda = 1.744, \lambda_x = 0.8623, \lambda_\theta = 3.9753, \alpha_x = 0.1859, \beta_\theta = 3.9508, \mu = 0.5$ 。

3.2 仿真结果和对比分析

对上面设计的三种控制器进行仿真:

a) 常规积分滑模面

$$\begin{cases} s_x(t) = \dot{e}_x + \lambda_x e_x + \alpha \int_0^t e_x d\tau \\ s_\theta(t) = e_\theta + \lambda_\theta e_\theta + \beta \int_0^t e_\theta d\tau \\ S(t) = \lambda s_x + s_\theta \end{cases}$$

b) 限定初始状态非线性取代积分滑模面

$$\begin{cases} s_x = (\dot{e}_x + \lambda_x e_x + \alpha_x \sigma_x - \dot{e}_x(0) - \lambda_x e_x(0)) \\ s_\theta = (\dot{e}_\theta + \lambda_\theta e_\theta + \beta_\theta \sigma_\theta - \dot{e}_\theta(0) - \lambda_\theta e_\theta(0)) \\ S = \lambda s_x + s_\theta \end{cases}$$

下面就两轮移动倒立摆小车的自平衡过程进行仿真分析,假设系统初始状态为: $X = [0.3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, 即摆杆偏移 $0.3 \text{ rad}(17^\circ)$ 。同时在整个过程中引入系统不确定性干扰 I_J , 仿真系统的摆杆角度和速度趋近平衡过程的曲线图如图2~4所示。

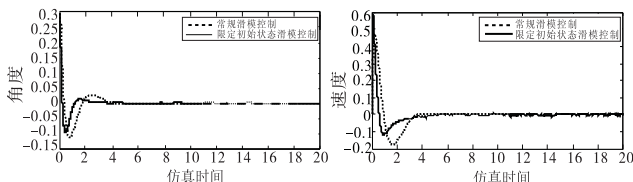


图2 摆杆角度曲线图

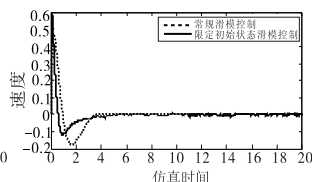


图3 小车速度

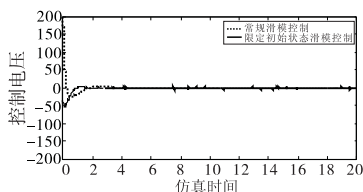


图4 控制电压曲线图

由图2可以看出,限定初始状态非线性取代积分滑模算法可以使倒立摆系统在 1 s 左右达到平衡状态而常规积分滑模算法要高于 1 s , 两种算法的抖振和稳态误差都得到了很好的

抑制,图3从速度、角度说明了这种算法的优越性,从图4可以看出,非线性取代积分滑模算法的控制电压能在很短的时间内达到平衡态,这对实际系统的应用极为有利。

4 结束语

本文为了增强两轮移动倒立摆小车这类非线性、不确定系统滑模控制的鲁棒性,设计了两种滑模控制器。滑模算法的引入可以使系统具有较好的抗外界干扰和不确定性的能力,同时也具有较低的算法复杂度,为了减小系统存在的稳态误差,本文引入了积分项,这就是设计的第一种滑模控制器,积分项的引入,在大的初始误差条件下,大的超调和长的调节时间会使系统的暂态性能恶化甚至出现积分 windup 效应,导致整个系统的不稳定,同时为了克服滑模控制在到达阶段不具有鲁棒性的缺点,设计了第二种滑模控制器,通过仿真结果可以看出这两种滑模控制器的有效性。

参考文献:

- [1] CHERN T L, CHANG J. DSP-based integral variable structure model following control for brushless DC motor drivers[J]. IEEE Trans on Power Electronics, 1997, 12(1): 53-63.
- [2] 李鹏, 马建军, 李文强, 等. 一类不确定非线性系统的改进积分型滑模控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1463-1472.
- [3] 李鹏. 传统和高阶滑模控制研究及应用[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2011.
- [4] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 397-438.
- [5] ACKERMANN J, UTKIN V I. Sliding mode control design based on ackermann's formula[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(2): 234-237.
- [6] 高为炳. 变结构控制的理论与设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 204-229.
- [7] BARTOLINI G, FERRARA A, USAI E. Chattering avoidance by second order sliding mode control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(2): 241-245.
- [8] GRASSER F, D'ARRIGO A, GOLOMBI S, et al. JOE: a mobile, inverted pendulum[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2002, 49(1): 107-114.
- [9] 阮晓钢, 蔡建美, 李欣源, 等. 两轮自平衡机器人的研究与设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 39-52.
- [10] 袁帅. 两轮自平衡机器人系统的设计[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
- [11] 李鹏, 孙未蒙, 李文强, 等. 一种改进积分滑模面在飞控中的应用[J]. 控制工程, 2010, 17(3): 269-289.
- [12] 陈志梅, 王贞艳, 张井岗. 滑模变结构控制理论及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.
- [13] SESHARIRI S, KHALIL H K. On introducing integral action in sliding mode control[C]//Proc of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2002: 1473-1478.
- [14] SESHAGIRI S, KHALIL H K. Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators[J]. Automatica, 2005, 41(1): 43-54.
- [15] 杨兴明, 余忠宇. 两轮移动倒立摆的开关切换模糊极点配置控制器设计[J]. 电路与系统学报, 2012, 17(4): 58-62.
- [16] 熊柯, 夏智勋, 郭振云. 倾斜转弯高超声飞行器滚动通道的自适应全局积分滑模控制[J]. 国防科技大学学报, 2012, 34(2): 114-118.
- [17] KACHROO P, TOMIZUKA M. Chattering reduction and error convergence in the sliding mode control of a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(4): 1220-1226.