

基于反调和平均的张量形态学算子模型 及其在彩色图像边缘检测中的应用*

谢巍^a, 邓廷权^b, 孙慧杰^a

(哈尔滨工程大学 a. 计算机科学与技术学院; b. 理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 旨在建立基于张量模型的彩色图像形态学算子。通过将 HSV 彩色空间下的三维向量利用二阶对称正定张量进行建模表示, 提出一种基于反调和平均的彩色形态学算子。在此基础上, 借助于张量相似性度量构造基于参考张量的形态学算子, 该算子能够实现滤波的输入保持。通过基于形态学梯度的边缘检测实验验证模型的可行性和有效性。对比实验表明基于张量的彩色形态学模型相对于原有的向量模型在图像处理中具有更好的结果。

关键词: 彩色图像; 数学形态学; 张量; 反调和平均

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2014)02-0593-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.02.066

Counter-harmonic mean-based tensor morphological operators and application in edge detection for color images

XIE Wei^a, DENG Ting-quan^b, SUN Hui-jie^a

(a. College of Computer Science & Technology, b. College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: To establish the tensor model for color morphological operators, the paper proposed counter-harmonic mean-based color morphological operators by translating three-dimensional vectors into two-order positive definite symmetric tensors from HSV color space to tensor space. It used reference tensor method and tensorial similarity measure to construct input-preserving morphological operators. Finally, it conducted morphological gradient-based edge detection experiments to prove the feasibility and effectiveness of the proposed model. Experimental results show compared with traditional vector-based method, the tensor-based operators can get better effect.

Key words: color image; mathematical morphology; tensor; counter-harmonic mean

0 引言

随着图像获取技术的不断提高, 彩色图像由于其包含信息更加丰富, 刻画目标、场景更加准确, 逐渐成为自然图像处理问题的主要研究目标。数学形态学是空间域图像处理的重要手段, 因其具有很好的并行运算性质被广泛使用。对数学形态学的研究通常是对于形态学算子的构造和讨论。自 Serra 将形态学算子理论统一到完备格框架下, 灰度图像作为二维空间的曲面, 因其具有非常自然的全序关系, 灰度形态学的研究取得了相对完整的理论体系, 并被学者们广泛接受。

完备格框架下彩色形态学研究的基础是如何合理地定义彩色序关系。由于彩色信息缺少比较明确的全序关系, 很难比较两个颜色的大小关系, 例如无法确定红色和蓝色哪个更大。因此, 目前研究的一个重要方向集中在基于参考颜色和向量距离彩色序上^[1,2]。由于向量的结构和运算比较简单, 在应用中很难融合彩色图像的色调、饱和度和光照的信息, 并且对像素间距离的度量形式相对单一。

因此, 考虑采用二阶张量结构刻画像素彩色信息。目前, 对于张量(矩阵)形态学的研究主要集中在 MRI 和纹理图像

上。学者们采用结构张量刻画分子的扩散性质或纹理信息, 根据 Lowner 序定义各种形态学算子^[3-7]。然而, 这种方法不适用于彩色形态学算子的构造, 因为结构张量只能描述颜色的变化情况, 无法反映像素的颜色信息。

本文根据像素的颜色信息构造二阶正定对称张量, 借助反调和平均技术定义连续变化的彩色形态学算子。在此基础上, 构造基于参考全序的形态滤波算子以满足输入保持性。

1 彩色图像的张量模型

张量是一个定义在一些向量空间和一对偶空间的笛卡儿积上的多线性函数。实际上, 张量概念相当广泛, 标量和向量是张量特殊情况。区别标量、向量和更一般的张量特征是表示它们数组的指标个数(张量的阶)。这样, 标量是零阶张量(不需要任何指标), 而向量是一阶张量。

由于张量(尤其是二阶张量)具有许多优良的性质, 本文采用二阶二维张量刻画每个像素的颜色信息。对于任意一个二阶二维张量, 可以用一个 2×2 的矩阵表示:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

收稿日期: 2013-04-06; 修回日期: 2013-05-30 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771043)

作者简介: 谢巍(1985-), 女, 黑龙江哈尔滨人, 博士研究生, 主要研究方向为图像处理、模式识别(w.xie@hotmail.com); 邓廷权(1965-), 男, 教授, 博导, 博士, 主要研究方向为图像处理、计算机视觉、模式识别、人工智能; 孙慧杰(1966-), 女, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为图像处理。

并且可以通过求解特征值问题 $T - (\lambda I)e = 0$, 由其特征值 λ_1 和 $\lambda_2 (\lambda_1 \geq \lambda_2)$ 、主特征方向 e_1 刻画。据此只需根据像素的彩色信息合理确定张量谱和主方向, 就可以将向量空间映射到张量空间, 并借助于张量的丰富运算和性质进行彩色形态学算子的构造。

对任意二阶二维对称正定张量, 可以唯一确定一个椭圆。本文用张量(椭圆)的主方向、形状(离心率)和尺度(迹)刻画 HSV 彩色空间下的像素信息:

$$h = \theta/\pi, s = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, v = \lambda_1 + \lambda_2$$

其中: θ 为椭圆主方向角; λ_1, λ_2 分别为长、短半轴长度。通过以上的对应关系, 能够将每一个彩色向量表示为一个二维平面上的椭圆。易验证这样得到的张量 T 是对称正定的。图 1 描述了基于控制变量法不同色调、饱和度、亮度下椭圆的变化情况^[8,9]。

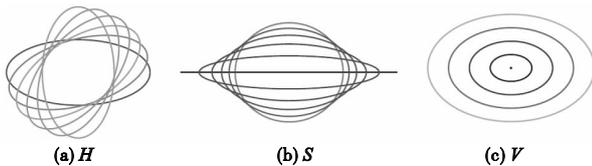


图1 HSV彩色信息的张量表示

通过图 1 容易发现, 彩色图像在 HSI 空间下的张量表示模型利用椭圆的方向表示像素的色调信息, 这与 H 分量的实际意义是一致的。同时该张量模型能够融合像素的饱和度和亮度信息, 并且张量所对应椭圆的形状、大小随 S 和 I 分量连续变化。

2 彩色张量形态学算子模型

2.1 基于反调和平均的形态学算子

中值滤波和均值滤波是现有图像处理中最为常用的两种滤波器。中值滤波通过定义像素空间中的序关系, 选择局部邻域像素表达的中间值作为滤波的输出结果; 而均值滤波通过定义特定的平均算法, 将局部邻域的平均像素值作为滤波的输出结果。在此基础上, 借助序统计和加权平均的思想还可以定义等级滤波算子和加权均值滤波算子, 而经典的形态学膨胀和腐蚀运算就可以看做是一种邻域可变的等级滤波算子。本节借助反调和平均技术, 提出张量空间下的彩色形态学算子。

对灰度图像而言, 用 0 ~ 255 之间的标量值表示图像的像素信息, 定义图像局部邻域的最大值和最小值作为经典的灰度形态学膨胀和腐蚀的结果, 其中局部邻域由形态学结构元素确定。下面考虑灰度形态学膨胀、腐蚀算子与反调和平均之间的关系。

设 $A = \{a_i\}_{i=1}^N$ 为 N 个标量所组成的集合, 则其 P 阶反调和平均(CHM)为

$$\kappa^P(A) = \left(\sum_{i=1}^N a_i^P\right)^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^{P+1}\right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^P\right)^{-1/2}$$

并且具有如下性质:

$$\begin{aligned} s \leq t &\Rightarrow \kappa^s(A) \leq \kappa^t(A) \\ \lim_{P \rightarrow +\infty} \kappa^P(A) &= \max_i a_i \\ \lim_{P \rightarrow -\infty} \kappa^P(A) &= \min_i a_i \end{aligned}$$

因此, 考虑灰度图像 f , 对任意像素 (x, y) , 设其由平结构元素所确定的局部邻域为 $B(x, y)$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow +\infty} \kappa_B^P(f)(x, y) &= \max_{(s,t) \in B(x,y)} f(s, t) = \delta_B(f)(x, y) \\ \lim_{P \rightarrow -\infty} \kappa_B^P(f)(x, y) &= \min_{(s,t) \in B(x,y)} f(s, t) = \varepsilon_B(f)(x, y) \end{aligned}$$

其中: δ 和 ε 分别表示膨胀和腐蚀算子。

据此可以证明, 经典的灰度形态学膨胀和腐蚀算子是反调和平均的极限形式, 这样就建立了标量的反调和平均与灰度形态学算子之间的关系。与此类似, 可以通过将反调和平均推广到多维空间, 建立起与彩色形态学算子之间的关系。

普通的高阶张量因其结构和运算都比较复杂, 反调和平均的定义不像标量那样自然。但是对于二阶张量, 由于它可以表示为矩阵, 从而具有比较丰富的运算和优秀的性质。所以将反调和平均算子从零阶(标量)推广到二阶(矩阵)远比推广到一阶(向量)要自然、容易得多。下面借助矩阵的基本运算定义二阶张量族的反调和平均数。

设 $A = \{A_i\}_{i=1}^N$ 为 N 个对称正定张量, 则其 P 阶反调和平均(CHM)定义为

$$\kappa^P(A) = \left(\sum_{i=1}^N A_i^P\right)^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^N A_i^{P+1}\right) \left(\sum_{i=1}^N A_i^P\right)^{-1/2}$$

易证明反调和平均 $\kappa^P(A)$ 具有正定性, 能够与 HSV 彩色空间下的三维向量一一对应。

例 1 设 HSV 彩色空间下两像素分别为 $a_1 = (0.4, 0.9, 0.9)$, $a_2 = (0.6, 0.7, 0.6)$, 其对应的二阶张量分别为 $A_1 = \begin{pmatrix} 0.1521 & 0.2164 \\ 0.2164 & 0.7479 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0.1693 & -0.0949 \\ -0.0949 & 0.4307 \end{pmatrix}$, 图 2(a) 中两个椭圆分别刻画两个彩色像素 a_1 和 a_2 所对应的二阶张量 A_1 和 A_2 , 椭圆的主方向、离心率和尺度分别表示彩色像素的色调、饱和度和亮度。当 $P = \pm 15$ 时, A_1 和 A_2 两张量的反调和平均结果如图 2(b) 所示。

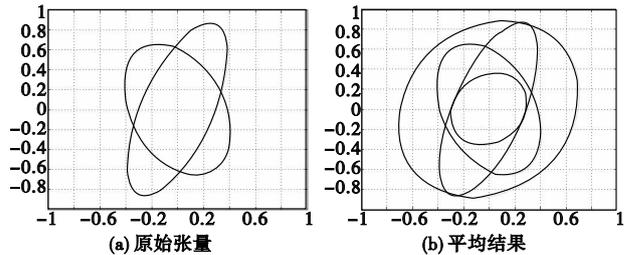


图2 张量的反调和平均结果

当阶数 $P > 0$ (例 $P = 15$) 时, 张量 A_1 和 A_2 的反调和平均数所对应的椭圆是原张量所对应的椭圆族的外包椭圆, 其对应的彩色像素亮度增大; 反之, 当阶数 $P < 0$ (例 $P = -15$) 时, 则其反调和平均数所对应的椭圆包含于原椭圆, 其对应的彩色像素亮度减小, 这与灰度情况是一致的。当 $P \rightarrow \pm \infty$ 时, 其反调和平均数分别对应原椭圆族的最小外包椭圆和最大内接椭圆。同时, 根据彩色像素的张量模型, 若两像素色调差异较大(椭圆主方向间夹角较大)时, 其反调和平均对应的彩色像素的饱和度将降低。

由于用于构造灰度形态学算子的标量反调和平均是张量调和平均的一种特殊形式, 并且张量反调和平均具有与标量反调和平均相似的性质, 所以基于 HSV 空间下彩色图像的张量模型和张量的反调和平均手段, 可以将灰度的形态学模型推广到彩色空间。因此, 本文通过二阶张量空间下的反调和平均方法, 定义新的彩色形态学膨胀和腐蚀算子。

考虑论域 E 上的彩色图像 $F: E \rightarrow R^3$, 设 $T: E \rightarrow PDS(2)$ 为图像 F 所对应的张量模型(PDS(2)为二阶正定对称张量的全

体)。对任意像素 $(x, y) \in E$, 令 $A_{(x,y)} = \{T(s, t) | (s, t) \in B(x, y)\}$, 图像 F 关于结构元素 B 的膨胀和腐蚀算子定义如下:

$$\delta_B^T(F)(x, y) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \kappa_B^P(T)(x, y) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \kappa^P(A_{(x,y)})$$

$$\varepsilon_B^T(F)(x, y) = \lim_{P \rightarrow -\infty} \kappa_B^P(T)(x, y) = \lim_{P \rightarrow -\infty} \kappa^P(A_{(x,y)})$$

基于反调和平均的形态学算子构造方法不仅能够阶数 P 趋于正负无穷时收敛到极限的膨胀和腐蚀, 还可以通过 P 的不断变化得到膨胀和腐蚀间的渐变滤波结果。因此, 基于反调和平均的形态学算子 $\kappa_B^P(T)$ 是一种分等级 (rank) 的形态学滤波器。

张量形态学滤波 $\delta_B^T(F)(x, y)$ 和 $\varepsilon_B^T(F)(x, y)$ 的结果也是一个张量, 在实际的应用中, 根据彩色图像的张量模型, 将该结果映射回 HSV 彩色空间。图 3 给出了图像关于不同阶数 P 下的滤波结果。随着阶数 P 从小到大不断变化, 滤波后的图像逐渐由暗变亮, 这与灰度形态学算子是一致的。

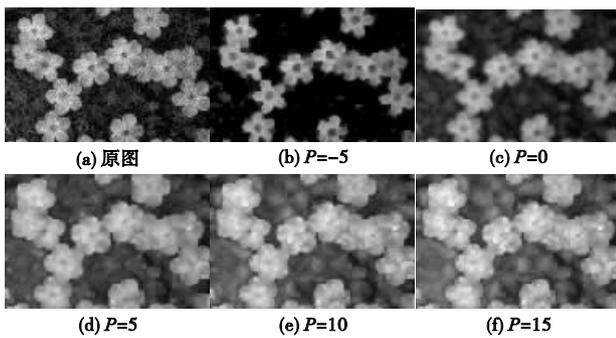


图 3 不同参数下反调和平均的彩色形态学算子

需要指出的是, 由于二阶张量族的反调和平均算子与矩阵的算术平均类似, 不具有封闭性, 所以上述基于张量反调和平均的形态学算子模型在滤波的过程中会产生新的颜色, 这在边缘检测应用中是无关紧要的。但是在某些特定应用中, 如图像平滑, 这是不愿看到的。输入保持性是彩色平滑滤波的一个重要性质, 即滤波后不能产生新的颜色。因此, 根据不同的应用需要, 本文在此基础上通过构造张量全序关系定义具有输入保持的形态学算子。

2.2 基于参考全序的彩色张量形态学算子

基于参考值的排序方法是构造具有输入保持性的彩色形态学算子模型的重要手段, 其基本思想是通过一定的准则选择一个或一组参考值, 然后由待排序向量与参考值间的距离诱导的标量大小关系构造全序关系, 这是一种退化序。本文据此思想, 定义基于反调和平均的张量全序, 进而构造彩色张量形态学算子模型。

设 $A = \{A_i\}_{i=1}^N$ 为 N 个对称正定张量, 定义基于参考张量 (S, I) 的全序关系:

$$A_i \leq_{(S,I)} A_j \Leftrightarrow h_{(S,I)}(A_i) \leq h_{(S,I)}(A_j)$$

$$h_{(S,I)}(A) = K(S, A) - K(I, A)$$

映射 $h_{(S,I)}(A)$ 反映张量 A 与参考张量 (S, I) 间的距离关系。其中映射 $K: \text{POS}(n) \times \text{POS}(n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 用于度量两个二阶对称正定张量间的距离。为计算方便, 本文采用差张量的 Frobenius norm 作为张量距离的度量。

对于参考张量的选择, 在没有其他先验知识的情况下, 可以由张量反调和平均数确定。设 $A = \{A_i\}_{i=1}^N$ 为待排序的一组正定对称张量, 则其参考张量由下式给出:

$$S = \lim_{P \rightarrow +\infty} \kappa^P(A), I = \lim_{P \rightarrow -\infty} \kappa^P(A)$$

在实际应用中可以选择一个相对较大的 P 值进行计算。

据此可以定义基于参考全序的形态学膨胀和腐蚀算子。

考虑论域 E 上的彩色图像 $F: E \rightarrow \mathbb{R}^3$, 设 $T: E \rightarrow \text{PDS}(2)$ 为其对应的张量模型, 对任意像素 $(x, y) \in E$, 令 $A_{(x,y)} = \{T(s, t) | (s, t) \in B(x, y)\}$, $\leq_{\text{sup}}^{(S,I)}$ 为 $A_{(x,y)}$ 上自适应确定的参考全序, 则其膨胀和腐蚀算子定义如下:

$$\delta_B^T(F)(x, y) = \bigvee_{(S,I)} A_{(x,y)}$$

$$\varepsilon_B^T(F)(x, y) = \bigwedge_{(S,I)} A_{(x,y)}$$

其中: B 表示形态学算子的结构元素。

2.3 实验分析

数学形态学算子是空间域图像处理的常用方法之一, 由于其通常利用卷积运算实现, 具有很好的并行性而被广泛应用于图像处理问题中。形态学算子除了对图像进行平滑处理外, 另一个重要应用是提取图像的边界。由于图像的边界是刻画图像形状轮廓、进行图像分割和目标提取的重要手段, 因此对图像边界的提取是十分必要的^[10]。基本形态学梯度 (Beucher 梯度) 算子利用膨胀和腐蚀运算的差值作为像素的梯度信息, 用于描述像素属于边界的程度, 该算法具有简单易行的特点。

本节利用基于张量的彩色形态学梯度算子 $\nabla = \|\delta^T - \varepsilon^T\|$ 对彩色图像进行边缘检测实验, 并与基于向量的彩色模型进行对比, 以验证所提彩色张量形态学算子模型的有效性, 实验结果如图 4 所示。其中在基于向量的边缘检测方法中采用局部算术均值作为参考值定义彩色向量序, 离参考值越近 (与参考向量的距离越小) 的向量越大。根据以上向量全序定义形态学膨胀、腐蚀算子, 进而构造基于向量的形态学梯度 $\nabla = \|\delta^V - \varepsilon^V\|$ 边缘检测模型。

通过对比实验不难发现, 基于张量模型的检测算法能够提取到更多的边缘信息, 如图 4 上图中鸚鵡不同颜色羽毛的边界、图 4 下图中山峰和天空的交接线, 得到的边缘具有更好的连线段连通性和宽度一致性。这是由于基于向量的模型仅仅采用向量的欧式距离刻画局部邻域内的彩色像素之间的关系, 因为向量距离的固有性质, 该模型很难考虑到彩色分类间的相关性对像素距离的影响, 所以存在两个像素向量距离很小但实际颜色差异较大的情况, 进而产生基于向量的边缘检测算法对边界信息提取能力不足的问题。采用张量模型刻画彩色信息不仅能够考虑到彩色分量间的相关性, 同时可以借助于张量丰富的运算更加准确地度量像素间的关系。因此, 基于张量的形态学模型在图像边缘检测中较向量模型具有一定的优势, 其边缘提取的准确性更高。

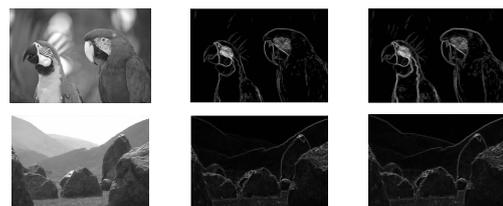


图 4 彩色图像边缘检测

3 结束语

本文提出一种基于彩色信息的张量形态学算子模型。利用 HSV 彩色空间下的三维向量与二阶对称正定张量间的一一对应关系, 结合反调和平均思想, 定义等级的形态学算子。在此基础上, 根据张量距离构造基于参考全序的 (下转第 604 页)

中时间复合在临床应用提供了重要依据,对改进系统中现有时间序列复合的方案设计与参数选择具有重要意义。

时间复合对运动慢的图像,处理后图像明亮程度有所减小,由于帧相关累积效应,对比度下降。后续工作中进一步提高对比度,研究图像特征点匹配或特征分割^[19],进行组织部位同一位置复合,以及图像信噪比、对比度噪声比、分辨力等性能的改进。

致谢 感谢声泰特(成都)科技有限公司提供 iMago C21 彩色多普勒超声诊断仪试验平台,感谢工程师 Pauls 在实验中给出的有益讨论与左晓晖医师为实验所提供的超声图像。

参考文献:

- [1] GOODMAN J W. Some fundamental properties of speckle[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, 66(11): 1145-1150.
- [2] LIU Dong, CZENZSAK S, KIM J. Adaptive speckle reduction with color transparency display [C]//Proc of IEEE Ultrasonics Symposium. 1998: 1611-1614.
- [3] SHAO Dang-guo, LIU Dong. Local histogram matching based bilateral filter to ultrasound speckle reduction [C]//Proc of the 5th IEEE Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering. 2011: 1-4.
- [4] TRAHEY G E, SMITH S W, VON-RAMM O T. Speckle pattern correlation with lateral aperture translation: experimental results and implications for spatial compounding[J]. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics Frequency Control*, 1986, 33(3): 257-264.
- [5] O' DONNELL M, SILVEMTEIN S D. Optimum displacement for compound image generation in medical ultrasound [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics Frequency Control*, 1988, 35(4): 470-476.
- [6] HE Ping. Spatial compounding in 3D imaging of limbs [J]. *Ultrasonic Imaging*, 1997, 19(4): 251-265.
- [7] TRAHEY G E, ALLISON J W, SMITHAV S W, et al. Speckle pattern changes with varying acoustic frequency: experimental measurement and implications for frequency compounding [C]//Proc of IEEE Ultrasonics Symposium. 1986: 815-818.
- [8] GALLOWAY R L, MCDERMOTT B A, THUMTONE F L. A frequency diversity process for speckle reduction in real-time ultrasonic images [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics Frequency Control*, 1988, 35(1): 45-49.
- [9] DANTAS R G, COSTA E T. Ultrasound speckle reduction using modified Gabor flutters [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics Frequency Control*, 2007, 54(3): 530-538.
- [10] PERPERIDIS A, CUSACK D, McDICKEN N, et al. Temporal compounding of cardiac ultrasound data: improving image quality and clinical measurement repeatability [C]//Proc of the 31st Annual International Conference of IEEE EMBS. 2009: 3661-3664.
- [11] EVANS A N, NIXON M S. Temporal methods for ultrasound speckle reduction [C]//Proc of IEE Seminar on Texture Analysis in Radar and Sonar. 1993: 1-6.
- [12] CUI Shao-guo, LIU Dong. Noise reduction for ultrasonic elastography using transmit-side frequency compounding: a preliminary study [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics Ferroelectrics Frequency Control*, 2011, 58(3): 509-516.
- [13] LIU P, LIU Dong. Filter-based compounded delay estimation with application to strain imaging [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics Ferroelectrics Frequency Control*, 2011, 58(10): 2078-2095.
- [14] WANG Gang, LIU Dong. Adaptive persistence utilizing motion compensation for ultrasound images [C]//Proc of the 18th IEEE Conference on Pattern Recognition. 2006: 726-729.
- [15] LI Xiao-ying, LIU Dong. Dynamic persistence of ultrasound images after local tissue motion tracking [C]//Proc of the 3rd IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering. 2009: 1-4.
- [16] LUO Jian-wen, KONOFAGOU E E. A fast normalized cross-correlation calculation method for motion estimation [J]. *IEEE Trans on Ultrasonics Ferroelectrics Frequency Control*, 2010, 57(6): 1347-1357.
- [17] TAN R T. Visibility in bad weather from a single image [C]//Proc of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2008: 1-8.
- [18] YU Yong-jian, ACTON S T. Speckle reducing anisotropic diffusion [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2002, 11(11): 1260-1270.
- [19] AHN C Y, JUNG Y M, KWON O I, et al. Fast segmentation of ultrasound images using robust Rayleigh distribution decomposition [J]. *Pattern Recognition*, 2012, 45(9): 3490-3500.

(上接第595页)张量形态学算子模型,该算子具有输入保持性质。最后,将形态学梯度算子应用于彩色图像边缘检测中,并与基于向量的方法进行了比较,验证了张量模型的有效性。

参考文献:

- [1] SARTOR L J, WEEKS A R. Morphological operations on color images [J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2001, 10(2): 548-559.
- [2] APTOULA E, LEFÉVRE S. A comparative study on multivariate mathematical morphology [J]. *Pattern Recognition*, 2007, 40(11): 2914-2929.
- [3] WELK M, WEICHERT J, BECKE F, et al. Median and related local filters for tensor-valued images [J]. *Signal Processing*, 2007, 87(2): 291-308.
- [4] BURGETH B, BRUHN A, DIDAS S, et al. Morphology for matrix data: ordering versus PDE-based approach [J]. *Image and Vision Computing*, 2007, 25(4): 496-511.
- [5] BURGETH B, PIZARRO L, BREUSS M. Adaptive continuous-scale morphology for matrix fields [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2011, 92(2): 146-161.
- [6] SHIH F Y. Image processing and mathematical morphology [M]. [S. l.]: CRC Press, 2009: 1-398.
- [7] HAN Shou-dong, TAO Wen-bing, WU Xiang-lin. Texture segmentation using independent-scale component-wise Riemannian-covariance Gaussian mixture model in KL measure based multi-scale nonlinear structure tensor space [J]. *Pattern Recognition*, 2011, 44(3): 503-518.
- [8] GROß J. Lowner partial ordering and space preordering of Hermitian non-negative definite matrices [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2001, 326(1-3): 215-223.
- [9] RITTNER L, FLORES F C, LOTUFO R A. A tensorial framework for color images [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2010, 31(4): 277-296.
- [10] SOILLE P. 形态学图像分析:原理及应用 [M]. 王小鹏,译. 2版. 北京:清华大学出版社,2008: 1-276.