

三次样条构造的伪逆解法*

张雨浓, 劳稳超, 肖林, 陈宇曦

(中山大学信息科学与技术学院, 广州 510006)

摘要: 为了提高三次样条构造的可行性, 基于矩阵的伪逆方法, 提出一种不依赖额外约束条件的三次样条构造的伪逆解法。该解法通过求解出三次样条二阶导数的最小范数解, 从而较好地构造出三次样条函数。理论分析及数值实验结果表明该三次样条构造的伪逆解法具有简单、有效等特点。综合分析各种构造解法的性质, 对各种三次样条构造解法进行归类比较, 为在实际工程计算应用中选择合适的三次样条构造解法提供了指导方向。

关键词: 三次样条函数; 插值; 端点约束条件; 伪逆; 最小范数解

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2014)02-0590-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.02.065

Pseudoinverse solution to construction of cubic splines

ZHANG Yu-nong, LAO Wen-chao, XIAO Lin, CHEN Yu-xi

(School of Information Science & Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In order to promote the feasibility of the construction of cubic splines, this paper presented a novel pseudoinverse-based construction method (PCM) to construct the cubic spline function effectively. Without using endpoint-constraint conditions, this method obtained the solution of the second-order derivatives of the cubic spline that was closest to the origin, namely the minimum norm solution. Theoretical analysis and numerical experiments highlight the efficacy of the PCM. For better understanding, it further studied and investigated the characteristics of various construction methods. In this way, it provided guidelines for choosing suitable methods to construct cubic splines in practical applications of engineering calculation.

Key words: cubic spline function; interpolation; endpoint-constraint condition; pseudoinverse; minimum norm solution

由于样条插值是用幂次较低的分段多项式函数逼近高阶的函数, 对于给定数据点集, 能对各种复杂曲线进行拟合, 并且有效地避免龙格现象^[1-3], 因此, 在计算机图形^[4-6]和几何画图^[7-10]等许多方面有着广泛的应用。其中, 三次样条插值是一种全局化的分段插值方法, 它分段光滑且在交接点处有连续的斜率和曲率, 它与分段线性插值方法相比具有更好的光滑特性^[2]。在实际工程应用中, 工程人员往往依据工程实践经验选择三次样条构造解法。本文通过对各种三次样条构造解法进行归类比较, 综合分析各种构造解法的性质, 从而为工程人员选择合适的三次样条构造解法提供参考依据。

传统三次样条的构造需要两个端点约束条件, 对于这些端点条件的选择在实际工程计算中存在一定的难度。另外, 数值实验结果表明, 若端点约束条件选择不当, 会造成较大的计算误差, 严重降低解决问题的效率和精度。

本文基于矩阵的伪逆方法^[11-14], 提出了一种不需要端点约束条件的三次样条构造的伪逆解法。该伪逆解法通过求解出三次样条二阶导数最接近原点的解, 即最小范数解, 从而较好地构造出三次样条函数。理论分析和计算机数值实验结果表明所提出的三次样条构造解法是有有效的。

1 三次样条构造的传统解法

在本章中将给出一些关于三次样条构造的传统解法的理

论基础和必要的分析。首先给出三次样条函数的定义。

定义 1 设在 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 处, 函数 $y = f(x)$ 取值分别为 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ 。如果存在 n 个三次多项式函数 $S_i(x)$, 其系数为 $s_{i,0}, s_{i,1}, s_{i,2}$ 和 $s_{i,3}$, 满足如下性质^[2]:

a) $S(x) = S_i(x) = s_{i,0} + s_{i,1}(x - x_i) + s_{i,2}(x - x_i)^2 + s_{i,3}(x - x_i)^3$ 。其中, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

b) $S(x_i) = f(x_i)$, 其中 $i = 0, 1, \dots, n$ 。

c) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$, 其中 $i = 0, 1, \dots, n-2$ 。

d) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$, 其中 $i = 0, 1, \dots, n-2$ 。

e) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$, 其中 $i = 0, 1, \dots, n-2$ 。

则称函数 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的三次样条函数。

从上述三次样条函数的定义可以看出, 要成功构造一个三次样条, 必须确定 $4n$ 个自由度或条件, 但性质 b) ~ e) 只能确定 $3(n-1) + (n+1) = 4n-2$ 个条件, 剩下两个未能确定的条件分别为 x_0 和 x_n 处的导数 $S'(x)$ 或 $S''(x)$, 它们被称为额外的端点约束条件。根据三次样条的定义, 可以利用以下定理求解三次样条的系数, 从而构造出三次样条函数。

定理 1 用 $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 表示定义 1 中三次样条函数 $S(x)$ 在 x_i 上的二阶导数 $S''(x_i)$, 并令

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$
$$d_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

收稿日期: 2013-03-06; **修回日期:** 2013-04-28 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61075121); 国家教育部高等学校博士学科点专项科研基金博导类课题资助项目(20100171110045)

作者简介: 张雨浓(1973-), 男, 河南信阳人, 教授, 博导, 博士, 主要研究方向为神经网络、机器人、科学计算与优化 (zhynong@mail.sysu.edu.cn); 劳稳超(1989-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为神经网络、科学计算; 肖林(1986-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为神经网络、机器人; 陈宇曦(1989-), 男, 技术员, 主要研究方向为科学计算、神经网络。

$$u_i = 6(d_i - d_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

则三次样条函数 $S(x)$ 满足下列重要关系式:

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)m_i + h_im_{i+1} = u_i \quad (1)$$

其中, $i = 1, \dots, n-1$ 。另外, 三次样条函数 $S_i(x)$ 的系数 $\{s_{i,j}\}$ ($i = 1, \dots, n; j = 0, 1, 2, 3$) 可由式(2)计算得到:

$$\begin{aligned} s_{i,0} &= f(x_i), s_{i,1} = d_i - h_i(2m_i + m_{i+1})/6 \\ s_{i,2} &= m_i/2, s_{i,3} = (m_{i+1} - m_i)/(6h_i) \end{aligned} \quad (2)$$

从定理1可知, 利用式(2)计算样条系数, 必须先解出未知数 $\{m_i\}$ 。但关系式(1)是一个包含 $n+1$ 个未知数, 且只具有 $n-1$ 个线性方程的不定方程组, 从传统解法的角度看, 它无法解出全部的 m_i , 必须再联立两个描述端点条件(m_0 和 m_n), 构成 $n+1$ 个线性方程, 才能得到全部的 $\{m_i\}$ 。为了更方便地表述, 表1给出三次样条构造的传统解法的端点约束条件。

表1 三次样条构造传统解法的端点约束条件

方法	描述端点条件 m_0 和 m_n 的方程
紧压法	$m_0 = 3(d_0 - S'(x_0))/h_0 - m_1/2$ $m_n = 3(S'(x_n) - d_{n-1})/h_{n-1} - m_{n-1}/2$
自然法	$m_0 = 0, m_n = 0$
外推法	$m_0 = m_1 - h_0(m_2 - m_1)/h_1$ $m_n = m_{n-1} + h_{n-1}(m_{n-1} - m_{n-2})/h_{n-2}$
抛物线法	$m_0 = m_1, m_n = m_{n-1}$
端点曲率调整法	$m_0 = S''(x_0), m_n = S''(x_n)$

注: $S'(x_0)$ 、 $S'(x_n)$ 为指定端点处的一阶导数值; $S''(x_0)$ 、 $S''(x_n)$ 为指定端点处的二阶导数值。

利用表1的端点约束条件和关系式(1)可组成一个包含 $n+1$ 个未知数且具有 $n+1$ 个线性方程的方程组, 然后通过直接求逆或追赶法^[1, 2]解出 $\{m_i\}$ 的值。最后便能求出三次样条函数 $S(x)$ 的样条系数, 从而构造出相应的三次样条函数。

2 三次样条构造的伪逆解法

本章首先引入右伪逆矩阵的概念, 展示伪逆法求解方程组最小范数解; 接着根据伪逆法以及三次样条的定义, 提出三次样条构造的伪逆解法。理论分析表明该方法是可行的。

2.1 右伪逆矩阵

在实际的工程计算中, 待求解的线性方程组 $AX = B$ 往往不具有唯一解, 因为系数矩阵 A 可能是奇异的甚至不是方阵。当方程组中未知数个数多于线性方程的个数时, 方程组可能包含无穷组解。一般地, 可选择最接近原点的解 X_0 作为方程组的最优解。 X_0 是唯一的且满足 $\|X_0\| \leq \|X\|$, 因此被称为线性方程组 $AX = B$ 的最小范数解^[11-13]。下面引入右伪逆矩阵的概念, 并解释如何利用伪逆法求方程组 $AX = B$ 的最小范数解。

定义2 设 $m \times n$ 矩阵 A 是行满秩矩阵, 即 $\text{rank}(A) = m$ 。此时 AA^T 为 $m \times m$ 可逆矩阵, A^T 表示 A 的转置, 记^[11-16]

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$$

则有

$$AA^+ = AA^T(AA^T)^{-1} = I_m$$

其中: I_m 表示 m 维单位矩阵, A^+ 被称为 A 的右伪逆矩阵。

显然, 右伪逆矩阵可用于求出前述线性方程组 $AX = B$ 最小范数解。对上述定义以及分析综述如下: 若系数矩阵 A 为 $m \times n$ 行满秩矩阵^[17], X 为 $n \times 1$ 矩阵, B 为 $m \times 1$ 矩阵, 则该线性方程组的最小范数解可由式(3)得出

$$X = A^+B = A^T(AA^T)^{-1}B \quad (3)$$

2.2 用伪逆法构造三次样条

三次样条构造的伪逆解法与传统解法相比, 基本步骤是类似的, 但在计算未知数 $\{m_i\}$ 时, 伪逆解法无须使用额外的端点约束条件, 而是通过使用右伪逆矩阵直接确定 $\{m_i\}$ 。为了更好地展示伪逆解法的过程, 对式(1)进行下列改写:

$$a_im_{i-1} + b_im_i + c_im_{i+1} = u_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

其中: $a_i = h_{i-1}$, $b_i = 2(h_{i-1} + h_i)$, $c_i = h_i$ 。将上式写成 $HM = U$ 的矩阵形式, 表示为

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

不难发现: 系数矩阵 H 为 $(n-1) \times (n+1)$ 矩阵, M 为 $(n+1) \times 1$ 矩阵, U 为 $(n-1) \times 1$ 矩阵。显然, 系数矩阵 H 行满秩, 可用式(3)求出 $\{m_i\}$ 的最小范数解:

$$M = H^+U = H^T(HH^T)^{-1}U$$

最后, 把 $\{m_i\}$ 的值代入式(2), 求出三次样条系数, 从而完成三次样条构造。

3 样条解法归类和分析

本章首先定义总体误差函数以衡量三次样条的插值效果; 接着综合分析各种三次样条构造解法的性质, 对各种三次样条构造解法进行分类对比研究, 并通过数值实验验证三次样条构造伪逆解法的有效性; 最后对各类三次样条构造解法进行综合分析。

3.1 三次样条构造解法分类

为了更好地对各种构造解法进行比较, 先对各种构造解法作出适当的分类。如表1所示, 紧压法和端点曲率调整法的使用需要给出样条函数端点处的一阶导数或二阶导数的具体值, 因此对于不同的给定值, 这两种方法得到的三次样条是不同的, 这里将它们归为 A 类构造解法; 而自然法、外推法、抛物线法和伪逆解法得到的三次样条是唯一的, 因此这里将它们归为 B 类构造法。对于端点约束条件的不同给定值, A 类的紧压法和端点曲率调整法会构造出不同插值效果的三次样条。为研究插值效果与端点约束条件给定值的关系, 可对目标函数及其三次样条进行采样, 并使用如下总体误差函数 E 来观察三次样条的插值效果:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [f(z_j) - S(z_j)]^2$$

其中: N 为采样点的个数; $f(z_j)$ 为采样点 z_j 上的函数真实值; $S(z_j)$ 为三次样条函数在采样点 z_j 上的值。值得指出的是, 这里所说的采样点 z_j 是在构造三次样条时的数据点以外的点中选取的。为了更好地说明各种构造解法的性质, 选用六种不同的目标函数进行三次样条插值。表2为六种目标函数的插值区间和端点处一、二阶导数真值。

3.2 A类三次样条构造解法分析

利用表2中的插值区间, 在不同的情况下(即取在端点处不同的一、二阶导数取值), 用两种 A 类的构造解法分别对六种目标函数进行三次样条插值, 其中插值间隔取 0.1。然后, 在其插值区间内以 0.01 为采样间隔进行总体误差 E 计算, 并绘制紧压法中总体误差 E 关于 $S'(z_0)$ 和 $S'(z_n)$ 的关系图像

(图1)以及端点曲率调整法中总体误差 E 关于 $S'(z_0)$ 和 $S'(z_n)$ 的关系图像(图2)。

表2 六种目标函数插值区间及端点处一、二阶导数真值

目标函数	插值区间	$f'(z_0)$	$f'(z_n)$	$f''(z_0)$	$f''(z_n)$
$\cos(z)$	$[0, 3]$	0.00	-0.14	-1.00	0.99
z^5	$[-2, 2]$	80	80	-160	160
$\log_2(z)$	$[0.5, 2]$	2.88	0.72	-5.77	-0.36
2^z	$[0, 2]$	0.69	2.77	0.48	1.92
$\text{atan}(z)$	$[-1, 1]$	0.5	0.5	0.5	-0.5
$\sin(z)/z$	$[1, 3]$	-0.30	-0.35	-0.24	0.18

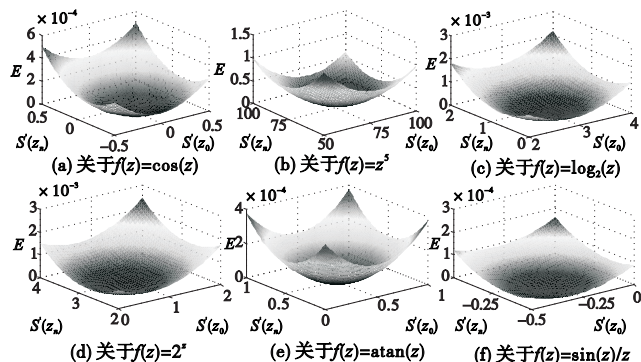


图1 总体误差 E 关于 $S'(z_0)$ 和 $S'(z_n)$ 的关系图像(紧压法)

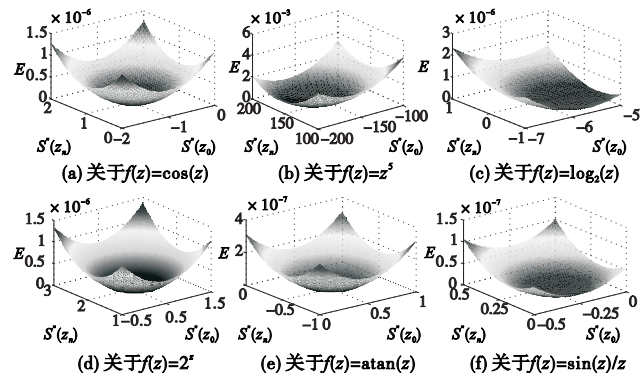


图2 总体误差 E 关于 $S'(z_0)$ 和 $S'(z_n)$ 的关系图像(端点曲率调整法)

观察图1和2可知,当使用A类方法对目标函数进行三次样条构造时,每个目标函数的总体误差与端点关系图像曲面都是向下凹的,即都存在一个最低点,显然,在该点处的总体误差值 E 达到最小。实验结果显示这些点对应的 $S'(z_0)$ 、 $S'(z_n)$ 或 $S''(z_0)$ 、 $S''(z_n)$ 的取值就是表2中各函数在端点处的一、二阶导数的真值。因此,若端点处一、二阶导数的取值远离真值,对应构造出来的三次样条的总体误差将会变大,即三次样条的插值效果变差。而在实际应用中,这些一、二阶导数的真值是难以精确给出的,造成了该类解法使用上的困难。

3.3 B类三次样条构造解法分析

B类三次样条构造解法的特点是它们构造的三次样条具有唯一性,即对于确定的三次样条插值区间和插值间隔,它们构造出来的三次样条必定是唯一的,对应的三次样条总体误差也是唯一的,所以B类三次样条构造解法的性能比较可直接通过比较其总体误差来实现。利用表2中的插值区间,用四种B类构造解法分别对六种目标函数进行三次样条插值,其中插值间隔取0.1,并在插值区间内以0.01为采样间隔进行总体误差 E 计算。对应的总体误差如表3所示。

分析表3中B类构造解法的总体误差可以看出,该类的构造解法均可有效地对目标函数进行插值。其中,外推法与抛

物线法插值效果最好,伪逆法次之,自然法的总体误差最大。

表3 B类构造解法的总体误差

目标函数	自然法	外推法	抛物线法	伪逆法
$\cos(z)$	1.3×10^{-6}	4.4×10^{-11}	1.6×10^{-10}	6.7×10^{-7}
z^5	3.2×10^{-2}	2.4×10^{-6}	4.0×10^{-4}	1.8×10^{-2}
$\log_2(z)$	2.0×10^{-5}	9.5×10^{-8}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-5}
2^z	2.5×10^{-6}	1.8×10^{-11}	6.9×10^{-9}	1.4×10^{-6}
$\text{atan}(z)$	3.2×10^{-7}	3.3×10^{-11}	2.0×10^{-9}	1.6×10^{-7}
$\sin(z)/z$	5.7×10^{-8}	7.5×10^{-13}	2.3×10^{-10}	3.2×10^{-8}

3.4 三次样条构造解法的综合分析

通过使用不同的构造解法,分别对各种目标函数进行三次样条插值的效果对比和性能分析,可以得出各种三次样条构造解法的性质如下:

a) A类构造解法依赖具体的外部条件。紧压法和端点曲率调整法因缺少两个自由度,在三次样条构造过程中需要外部给定一阶或二阶导数值。这些导数值的选取与被拟合曲线的实际数值相近时,插值效果较好;相反,与实际数值相差较大时,则构造出来的三次样条具有较大误差。所以三次样条插值的效果往往取决于外部给定值是否恰当。可以看出,A类构造解法的性能受外部条件影响较大,在精度要求较高且相关参考数据较少的数值计算中并不适合。

b) 外推法、抛物线法有效利用插值点数据进行自我调节。具体而言,外推法在区间 $[x_0, x_2]$ 上形成单个三次样条多项式曲线,由三个已知数据点 $(x_0, f(x_0))$ 、 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 限制了该三次多项式中四个样条系数的取值,使样条函数在点 $(x_2, f(x_2))$ 上的一阶、二阶导数值与真值更加接近,这为后面各段样条的构造提供了较适合的端点约束依据。而对于区间 $[x_{n-2}, x_n]$,在点 $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ 上也具有同样的情况。这样,首尾两个三次多项式共同调节了整体三次样条的构造,使得到的样条函数能最大限度地逼近目标函数。而抛物线法利用邻近端点的插值点的二阶导数值作为约束条件,有效利用了插值点数据,因此构造效果也较好。

c) 自然法虽被归为B类构造解法,但在性质上与A类相似,因为其规定端点处的二阶导数取值是被强制设定的(无论什么情况都取0),这样构造出来的三次样条插值效果自然也不理想。

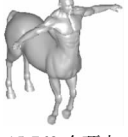
d) 伪逆解法是一种高效的三次样条构造解法,它利用右伪逆矩阵求解三次样条二阶导数向量的最小范数解。从表面上看,它不像外推法那样明显地利用样本点数据解决边界导数问题,但实际上它使用伪逆方法,利用所有样本数据点共同调节了整体样条的构造。同时因为它不引入外部附加条件,所以避免了附加条件对三次样条构造的不利影响。因此伪逆法具有与外推法、抛物线法类似的性质优势。而且伪逆解法不用构造首尾特殊的三次多项式,而是直接进行矩阵运算,比起外推法、抛物线法在理解和使用上更加方便。

4 结束语

本文通过对各种三次样条构造解法分类比较,综合分析各种方法的性质,从而为工程人员选择合适的三次样条构造解法提供参考依据。另外,基于矩阵的伪逆方法,提出三次样条构造的伪逆解法,该解法作为一种新型的三次样条构造法,具有构造方便和总体误差较小等特点,是实际工程(下转第607页)

本文在 MATLAB 中实现了上述算法,针对不同顶点数量模型,表1中给出了算法各个部分的运行时间。计算机系统配置为 Intel i5-3470 CPU@3.2 GHz,4 GB 内存,32 位 Windows 7.0 操作系统。

表1 算法运行时间统计

原始模型		
	15 768 个顶点	
化简模型		
	1 000 个顶点	2 000 个顶点
模型化简时间/s	0.076 8	0.077 1
计算扩散距离时间/s	0.339 2	1.297 3
计算嵌入模型时间/s	3.145 0	9.875 8
ICP 相似度计算时间/s	2.246 0	5.800 3

5 结束语

本文将扩散距离与 MDS 算法相结合,构造非刚性模型的嵌入模型,进而实现模型的相似性分析。实例证明本算法对变形模型有很强的适应能力,尤其是对含有局部拓扑变化的模型,测试结果明显优于基于测地距离的算法。但随着模型顶点数量的增加,本文算法效率并不理想。下一步将研究基于 GPU 的并行算法,改善本算法的运行效率以及处理复杂模型的能力。

致谢 文中使用的 3D 模型来自于 TOSCA^[11]。

参考文献:

- [1] LIAN Z, GODIL A, FABRY T, *et al.* SHREC'10 track: non-rigid 3D shape retrieval[C]//Proc of the 3rd Eurographics Conference on 3D Object Retrieval, Aire-la-Ville; Eurographics Association, 2010: 101-108.
- [2] LIAN Z, GODIL A, BUSTOS B, *et al.* SHREC'11 track: shape retrieval on non-rigid 3D watertight meshes[C]//Proc of the 4th Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval. Aire-la-Ville; Eurographics Association, 2011: 79-88.
- [3] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3D shapes[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [4] JAIN V, ZHANG Hao, Van KAICK O. Non-rigid spectral correspondence of triangle meshes[J]. International Journal on Shape Modeling, 2007, 13(1): 101-124.
- [5] ELAD A, KIMMEL R. On bending invariant signatures for surfaces[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(10): 1285-1295.
- [6] BRONSTEIN A M, BRONSTEIN M M, KIMMEL R. Rock, paper, and scissors: extrinsic vs. intrinsic similarity of non-rigid shapes[C]//Proc of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision. 2007: 1-6.
- [7] COIFMAN R R, LAFON S. Diffusion maps[J]. Application of Computing Harmonic Analysis, 2006, 21(1): 5-30.
- [8] BRONSTEIN A M, BRONSTEIN M M, KIMMEL R. Numerical geometry of non-rigid shapes[M]. [S. l.]: Springer, 2008: 143-146.
- [9] AGARWAL A, PHILLIPS J M, VENKATASUBRAMANIAN S. Universal multi-dimensional scaling[C]//Proc of the 16th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM Press, 2010: 1149-1158.
- [10] GARLAND M, HECKBERT P. Surface simplification using quadric error metrics[C]//Proc of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. 1997: 209-216.
- [11] TOSCA[EB/OL]. http://tosca.cs.technion.ac.il/book/resources_data.html.
- [8] DAVOR P. Causal cubic splines: formulations, interpolation properties and implementations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(11): 5442-5453.
- [9] 朱春钢, 李彩云, 王仁宏. 异度隐函数样条曲线曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(7): 930-935.
- [10] DUAN Qi, DJIDJELI K, PRICE W G, *et al.* Weighted rational cubic spline interpolation and its application[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 117(2): 121-135.
- [11] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.
- [12] DAVID C H. Accuracy of pseudo-inverse covariance learning: a random matrix theory analysis[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(7): 1470-1481.
- [13] 隆昌菊. 伪逆矩阵与线性方程组[J]. 重庆职业技术学院学报, 2006, 15(6): 158-159.
- [14] LAYTON J B. Efficient direct computation of the pseudo-inverse and its gradient[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(22): 4211-4223.
- [15] 张雨浓, 曲璐, 陈俊维, 等. 多输入 Sigmoid 激励函数神经网络权值与结构确定法[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(11): 4413-4416, 4151.
- [16] 张雨浓, 劳稳超, 余晓填, 等. 两输入幂激励前向神经网络权值与结构确定[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(15): 102-106, 122.
- [17] 周杰. 矩阵分析及应用[M]. 成都: 四川大学出版社, 2008.

(上接第 592 页)计算中的一种新工具。值得指出的是,三次样条的构造过程中应尽量利用插值点的数据,避免因利用与插值点数据无关的外部附加条件而对样条插值产生不必要的影响。研究分析伪逆解法对于三次样条构造新方法的开发具有很好的借鉴和应用意义。

参考文献:

- [1] KOKES J, NGHIE N B. Using constrained cubic spline instead of natural cubic spline to eliminate overshoot and undershoot in Hilbert Huang transform[C]//Proc of the 13th International Carpathian Control Conference. 2012: 300-306.
- [2] JOHN H M, KURTIS D F. 数值方法(MATLAB 版)[M]. 周璐, 陈渝, 钱方, 等译. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [3] 周凯汀, 郑力新, 林福泳. 周期 B 样条基函数系数的并行算法[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1800-1803.
- [4] 孙立铸, 刘扬, 赵强. 具有任意自由度的 B 样条非均匀细分[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(5): 1972-1974.
- [5] 徐欣, 武仲科, 周明全, 等. 基于球 B 样条的 3D 人物角色建模与动画[J]. 计算机应用, 2009, 29(8): 2053-2055, 2086.
- [6] TIAN Meng, BIAN Qiu-ju. A rational cubic spline interpolation and its application[C]//Proc of International Conference on Digital Manufacturing & Automation. 2012: 96-99.
- [7] 赖舜男, 吴学礼, 汪国平. G^2 三次 Hermite 样条曲线形状的交互修改[J]. 计算机应用研究, 2004, 21(10): 106-109.