基于约束相位解卷绕的正弦信号高精度相位估计*

陈　勇，王　芳，叶志清
（江西师范大学 物理与通信电子学院，南昌 330022）

摘　要：在 Tretter 相位估计算法基础上，提出了一种基于约束相位解卷绕的相位估计方法。通过对观测相位进行适当的线性组合，将相位约束在较小的模糊相位集合之中，最后基于相位误差最小原则实现约束相位解卷绕。理论分析与 Monte Carlo 模拟结果显示，约束相位解卷绕的信噪比阈值低于常规解卷绕方法，且在高信噪比条件下相位估计均方根误差接近克拉美罗下限（CRLB），相位估计性能优于分段 DFT 相位差法以及全相位 FFT 测相法。在信噪比为 5 dB、数据长度为 1023 的情况下，相位估计均方根误差约为 0.9°。当信噪比为 0 dB 时，约束相位解卷绕的错误概率仅为 10^{-3} 量级。

关键词：相位估计；约束相位解卷绕；线性组合；克拉美罗下限
中图分类号：TN911.6　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1001-3695(2014)02-0503-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.02.043

High-accuracy phase estimation of single-tone based on restricted phase unwrapping

CHEN Yong, WANG Fang, YE Zhi-qing
(*College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330022, *China*)

Abstract: In order to estimate the original phase of a sinusoidal signal under noisy circumstances precisely, this paper proposed a novel phase estimation method which based on restricted phase unwrapping and Tretter's phase estimation algorithm. Firstly it acquired the coarse estimation of initial phase by using modified segmented DFT estimator. Then an appropriate linear combination of observed phase, by which the ambiguity number of whole cycle restricted in a smaller integer set, was simply unwrapped on the basis of the principle of minimum phase error. Formulas for evaluating the error probability of restricted phase unwrapping and the RMS error of the initial phase estimation with different SNRs and lengths of signal are also presented. Simulation results show that the SNR threshold of restricted phase unwrapping method is much lower than that of common unwrapping methods, and the estimator derived attains the Cramer-Rao lower bound (CRLB) at high SNR, which has better performance than the segmented DFT estimator developed and the all-phase FFT estimator. For SNR = 5 dB and $N = 1023$, the RMS error of the initial phase estimation is about 0.9 degrees, and the error probability of restricted phase unwrapping is only about 10^{-3} orders of magnitude when SNR = 0 dB.

Key words: phase estimation; restricted phase unwrapping; linear combination; Cramer-Rao lower bound

0　引言

对淹没在噪声中的正弦信号进行频率和初相估计是信号处理的一个经典课题，在雷达和通信等领域有着广泛应用。将加性噪声转换为等效相位噪声之后，Tretter 利用最小二乘线性回归方法估计信号的频率与初相[1]，此时频率及相位估计方差在理论上可达到 CRLB[2]。但实际上瞬时相位只能在主值范围内测量，而在观测期间相位的变化范围一般远远超过 2π，即在相位测量中存在模糊问题。为此，国内外学者提出了很多克服相位模糊的方法，大致可以分为以下两类：

a)相位解卷绕。在常规解卷绕方法中，首先计算相邻采样点的相位差，若相位差大于 π 或小于 −π，则判断该采样点发生相位模糊，因此对该采样点的相位及其之后的所有相位均增加或减少 2π 相位[6]。该方法实现容易，但在低信噪比情况下容易产生解卷绕误差传递，导致解卷绕误差概率较大。文献[4]通过限制每个周期内的样本数，适当改善了低信噪比下的解卷绕性能。基于数论中的最近格点问题，文献[5]提出一种最小二乘相位解卷绕算法，但计算复杂度达到 $O(N^3\log N)$。文献[6]提出一种计算量相对较小的递归解卷绕算法，但在低信噪比情况下同样存在解卷绕误差传递的问题。

b)对相位模糊进行规避处理。文献[7]利用相邻采样点的瞬时相位之差进行频率估计，但在避免相位模糊的同时，也丢失了初相信息。与之类似，文献[8]利用自相关函数的相位差而非相位本身进行频率估计。文献[9]对信号进行频移从而限制相位变化范围，然后依据相位方差最小原则筛选出无卷绕序列，也可以达到规避相位模糊的目的。

在正弦信号的相位估计方面，除 Tretter 相位估计算法之外，文献[10]提出了二分段 DFT 相位差法，但相位估计的均方根误差略高于 CRLB 的 2 倍。文献[11]提出了改进的二分段 DFT 相位差法，使相位估计在整个频率动态范围内具有更好的稳定性。文献[12,13]研究了多分段 DFT 相位平均算法，并给出了最优加权系数，但相位估计均方根误差仅略小于文献

收稿日期：2013-05-13；**修回日期：**2013-06-15　　**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(11164008)；江西省自然科学基金资助项目(2011BAB202003)；江西省光电子与通信重点实验室开放基金资助项目(2011013,2013001)；江西师范大学青年成长基金资助项目(20124516)

作者简介：陈勇(1981-)，男，湖北天门人，讲师，硕士，主要研究方向为信号与信息处理(chenyong198178@hotmail.com)；王芳(1982-)，女，讲师，硕士，主要研究方向为统计信号处理；叶志清(1960-)，男，教授，硕导，主要研究方向为现代通信系统等.

[10];文献[14,15]分析了基于全相位 FFT 的相位估计方法,相位估计精度相对于文献[10]提高约一倍。文献[16]针对时变正弦信号提出一种高斯—牛顿迭代算法,但需要在较高信噪比时才能够同时对幅度、频率及相位进行精确估计。本文在 Tretter 相位估计算法基础上,提出一种基于约束相位解卷绕的相位估计新方法。理论分析和 Monte Carlo 模拟结果显示,约束相位解卷绕的信噪比阈值低于常规解卷绕方法,且相位估计均方根误差在高信噪比条件下接近克拉美罗界(CRLB),相位估计性能优于文献[10,13]的分段 DFT 相位差法,以及文献[14]的全相位 FFT 测相法。

1 Tretter 相位估计算法

设观测信号为单一频率复正弦信号,即

$$r(n)=A\exp[j(\omega_0 nT+\theta)]+z(n),\ n=n_0,n_0+1,\cdots,n_0+N-1 \tag{1}$$

其中:n_0 表示起始时刻;N 为数据长度;A、ω_0、θ 分别为信号的幅度、频率以及相位;T 为采样周期。$z(n)$ 为复高斯白噪声序列,且 $\mathrm{var}[z(n)]=\sigma_z^2$,信噪比定义为 $\mathrm{SNR}_r=A^2/\sigma_z^2$。令 $v(n)=z(n)A^{-1}\exp[-j(\omega_0 nT+\theta)]$,为将加性噪声转换为等效相位噪声,$r(n)$ 可表示为

$$r(n)=[1+v(n)]A\exp[j(\omega_0 nT+\theta)] \tag{2}$$

其中:$\mathrm{var}[v(n)]=\sigma_z^2/A^2=1/\mathrm{SNR}_r$,且 $v(n)$ 仍为复白噪声序列。令 $v(n)=v_I(n)+jv_Q(n)$,在 SNR_r 较大的情况下,则 $1+v(n)\approx\exp[jv_Q(n)]$,从而 $r(n)$ 可进一步表示为

$$r(n)\approx A\exp[j(\omega_0 nT+\theta+v_Q(n))] \tag{3}$$

对瞬时相位 $\varphi(n)=\omega_0 nT+\theta+v_Q(n)$ 采用最小二乘线性回归的方法,得到频率和相位估计为

$$\begin{bmatrix}\bar{\omega}_0\\ \bar{\theta}\end{bmatrix}=\frac{12}{N^2(N^2-1)T^2}\begin{bmatrix}N & -(P+Nn_0)T\\ -(P+Nn_0)T & (Q+Nn_0^2+2Pn_0)T^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=n_0}^{n_0+N-1}kT\varphi(k)\\ \sum\limits_{k=n_0}^{n_0+N-1}\varphi(k)\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中:$P=\sum\limits_{n=0}^{N-1}n$,$Q=\sum\limits_{n=0}^{N-1}n^2$。文献[4]已证明,式(4)是频率与相位的无偏估计,且估计量的协方差矩阵为

$$\mathrm{cov}\begin{bmatrix}\bar{\omega}_0\\ \bar{\theta}\end{bmatrix}=\frac{6}{N^2(N^2-1)T^2\mathrm{SNR}_r}\begin{bmatrix}N & -(P+Nn_0)T\\ -(P+Nn_0)T & (Q+Nn_0^2+2Pn_0)T^2\end{bmatrix} \tag{5}$$

可见,频率与相位估计方差均达到 CRLB[5],而前提条件是观测相位必须正确解卷绕。但现有的相位解卷绕算法均要求较高的信噪比阈值,因此有必要研究低信噪比条件下的相位解卷绕问题。

2 基于约束相位解卷绕的相位估计

常规的相位卷绕及解卷绕过程描述如下

$$\varphi_w(n)=w[\varphi(n)]=\varphi(n)-2\pi\cdot k_n \tag{6}$$

$$\varphi_{un}(n)=w^{-1}[\varphi_w(n)]=\varphi_w(n)+2\pi\cdot k'_n \tag{7}$$

其中:$\varphi_w(n)$ 为观测所得的模糊相位;$\varphi(n)$ 为真实相位;$\varphi_{un}(n)$ 为解卷绕相位;k_n 为整数。$w[\cdot]$ 代表相位卷绕过程,即选择合适的整数 k_n,使得 $\varphi(n)-2\pi\cdot k_n\in[-\pi,\pi]$;而 $w^{-1}[\cdot]$ 则代表相位卷绕的逆过程即解卷绕过程,为实现相位解卷绕,意味着必须从整数集合 $\mathbb{Z}$ 中选择某个整数 k'_n,使得 $k'_n=k_n$。

若存在一组观测相位,记为 $\{\varphi_w(n_1),\varphi_w(n_2),\cdots,\varphi_w(n_m)\}$,其线性组合表示为 $\Phi_w(n)=\sum\limits_{i=1}^{m}l_i\cdot\varphi_w(n_i)$,其中 l_i 为常系数。与上述观测相位相对应的真实相位,记为 $\{\varphi(n_1),\varphi(n_2),\cdots,\varphi(n_m)\}$,并进行同样方式的线性组合,即 $\Phi(n)=\sum\limits_{i=1}^{m}l_i\cdot\varphi(n_i)$。令 $K=\sum\limits_{i=1}^{m}l_i\cdot k_{n_i}$,结合式(6)不难发现 $\Phi_w(n)=\Phi(n)-2\pi K$。

在线性组合相位 $\Phi_w(n)$ 与 $\Phi(n)$ 之间同样存在着相位卷绕,但值得注意的是,通过合理设置线性组合系数 l_i,以及选择合适的观测时刻 n_i,K 将被约束在 $\mathbb{Z}$ 的子集合 $\mathbb{Z}_0$ 之中,即 $K\in\mathbb{Z}_0\subset\mathbb{Z}$。显然,子集合 $\mathbb{Z}_0$ 包含的元素越少,则对线性组合相位 Φ_w 的解卷绕越有利。为区别起见,将上述方法称之为约束相位卷绕和约束相位解卷绕,分别用符号 $w_r[\cdot]$、$w_r^{-1}[\cdot]$ 表示。

$$\Phi_w(n)=w_r[\Phi(n)]=\Phi(n)-2\pi K \tag{8}$$

$$\Phi_{un}(n)=w_r^{-1}[\Phi_w(n)]=\Phi_w(n)+2\pi K' \tag{9}$$

为了实现基于约束相位解卷绕的相位估计,首先令 $P+Nn_0=0$,即 $n_0=-(N-1)/2$,则式(4)中的相位估计简化为

$$\bar{\theta}=\frac{1}{N}\{\varphi(0)+\sum_{n=1}^{(N-1)/2}[\varphi(n)+\varphi(-n)]\} \tag{10}$$

在式(10)中,正好包含了真实相位 $\varphi(n)$ 与 $\varphi(-n)$ 的线性组合,即 $\Phi(n)=\varphi(n)+\varphi(-n)$。为此,选取观测相位 $\varphi_w(n)$ 与 $\varphi_w(-n)$,并构造与真实相位相同的线性组合 $\Phi_w(n)=\varphi_w(n)+\varphi_w(-n)$。假设 $\varphi_w(n)=\varphi(n)-2\pi\cdot k_+$,且 $\varphi_w(-n)=\varphi(-n)-2\pi\cdot k_-$,则此时 $K=k_++k_-$,而 K 所属于的集合 $\mathbb{Z}_0$ 正是本文所关注的重点。为此,利用 $\varphi_w(n)$ 重新计算 $\varphi(-n)$ 得到

$$\varphi(-n)=-\varphi_w(n)+2\theta+v_Q(n)+v_Q(-n)-k_+\cdot 2\pi \tag{11}$$

由于 $\theta\in[-\pi,\pi]$,$\varphi_w(n)\in[-\pi,\pi]$,并假设相位噪声 $v_Q(n)$、$v_Q(-n)$ 较小,则为了将 $\varphi(-n)$ 卷绕到主值区间 $[-\pi,\pi]$,可能出现的情况有:$k_-=-k_+$,$k_-=-k_++1$,或 $k_-=-k_+-1$。可见,当设置线性组合系数 $l_1=1$,$l_2=1$,并选择关于 $n=0$ 对称的观测时刻 $n_1=n$,$n_2=-n$ 时,K 被约束在一个比整数集合 $\mathbb{Z}$ 小得多的子集合 $\mathbb{Z}_0=\{-1,0,1\}$ 之中。此时,基于解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)$ 与真实相位的数学期望即 $E[\Phi(n)]=2\theta$ 之间相位误差最小的原则,可得到 K' 为

$$K'=\arg\min_{K'\in\mathbb{Z}_0}|\Phi_w(n)+2\pi K'-2\theta| \tag{12}$$

实际上,相位 θ 是未知的,K' 并不能立即由式(12)计算得到。一种较简单的方法是用 $n=0$ 时刻的观测相位 $\varphi_w(0)$ 直接代替式(12)中的 θ,但在低信噪比情况下该方法并不可行。另一种方法是利用文献[10]的二分段 DFT 相位差法对 θ 进行粗测,但需要指出的是:a) 文献[10]中序列的起始时刻定义为 $n=0$,而本文中起始时刻在 $n=-(N-1)/2$ 处;b) 文献[10]要求序列长度为偶数,而本文中序列长度为奇数。为此,下面给出适用于本文的二分段 DFT 相位粗测法。

首先,截取 $r(n)$ 的前 $N-1$ 个点,使得序列长度为偶数,记录时间长度 $T_p=(N-1)T$。将截取之后的序列等分为长度为 $(N-1)/2$ 的两个子序列。若不考虑噪声的影响,则两个子序列分别表示为

$$r_1(n)=r_2(n)\exp(-j\omega_0 T_p/2),\ n=0,1,\cdots,(N-3)/2 \tag{13}$$

$$r_2(n)=A\exp[j(\omega_0 nT+\theta)],\ n=0,1,\cdots,(N-3)/2 \tag{14}$$

分别对 $r_1(n)$ 和 $r_2(n)$ 进行 $(N-1)/2$ 点 FFT,得到离散频谱

$$R_1(k)=R_2(k)\exp(-j\omega_0T_p/2),k=0,1,\cdots,(N-3)/2 \tag{15}$$

$$R_2(k)=A_k\exp(j\varphi_k),k=0,1,\cdots,(N-3)/2 \tag{16}$$

其中:$R_2(k)$ 的幅度项和相位项 A_k 和 φ_k 分别为

$$A_k=\frac{A\sin[\pi(k-\omega_0T_p/4\pi)]}{\sin[2\pi(k-\omega_0T_p/4\pi)/(N-1)]} \tag{17}$$

$$\varphi_k=\theta+(1-2/N)(\omega_0T_p/4\pi-k)\pi \tag{18}$$

由式(17),幅度最大值处对应的离散频率 $k_0=[\omega_0T_p/4\pi]$,其中 $[x]$ 表示取最接近 x 的整数。用 φ_1 和 φ_2 分别表示 $R_1(k)$ 和 $R_2(k)$ 在最大谱线处的相位,则两者的差值为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega_0T_p/2-2k_0\pi \tag{19}$$

将式(19)代入式(18),得到相位的粗测值为

$$\bar{\theta}_c=\frac{N-2}{2N}\varphi_1+\frac{N+2}{2N}\varphi_2 \tag{20}$$

当 N 较大时,式(20)可近似为 $\bar{\theta}_c=0.5\varphi_1+0.5\varphi_2$,将该相位粗测值 $\bar{\theta}_c$ 代替式(12)中的相位 θ,则在约束相位解卷绕过程中,对 K' 的计算可重新表示为

$$K'=\arg\min_{K'\in\mathbb{Z}_0}|\Phi_w(n)+2\pi K'-\varphi_1-\varphi_2| \tag{21}$$

将式(21)代入式(9),即可得到约束解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)$,在解卷绕正确的情况下,有 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)$ 或 $\Phi_{un}(n)=\varphi(n)+\varphi(-n)$。故将 $\Phi_{un}(n)$ 代入式(10),得到基于约束相位解卷绕的相位估计 $\bar{\theta}_r$ 为

$$\bar{\theta}_r=\frac{1}{N}\{\varphi(0)+\sum_{n=1}^{(N-1)/2}\Phi_{un}(n)\} \tag{22}$$

基于约束相位解卷绕的相位估计系统,如图 1 所示。其中,Arg[·]表示计算序列 $r(n)$ 的观测相位 $\varphi_w(n)$,z^{-1} 表示单位延迟,w_r^{-1} 表示约束相位解卷绕。

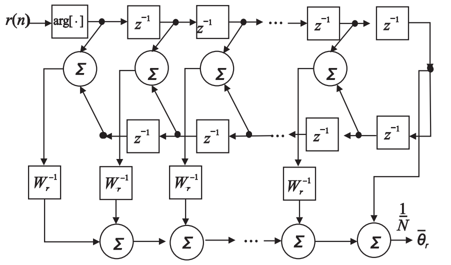

图1 基于约束相位解卷绕的相位估计系统框图

3　相位估计的统计性能分析

假设由式(21)表示的约束相位解卷绕过程无误,则 $K'=K$,且 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)$。对式(22)整理,此时基于约束相位解卷绕的相位估计 $\bar{\theta}_r$ 为

$$\bar{\theta}_r=\theta+\frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}v_Q(n) \tag{23}$$

其中:$v_Q(n)$ 为复白噪声 $v(n)$ 的虚部,$\mathrm{var}[v_Q(n)]=1/(2\cdot \mathrm{SNR}_r)$。容易证明:$E(\bar{\theta}_r)=\theta$,$\mathrm{var}(\bar{\theta}_r)=1/(2N\cdot\mathrm{SNR}_r)$。因此,在约束相位解卷绕完全正确的情况下,$\bar{\theta}_r$ 是对相位 θ 的无偏估计,且估计方差达到 CRLB[2]。将式(8)代入式(21)发现,当 $|\Phi(n)-2\bar{\theta}_c|>\pi$ 时,将导致约束相位解卷绕出现错误,即 $K'\neq K$。当 N 较大时,$\bar{\theta}_c\approx\theta$,以上的判断条件可简化为 $|\Phi(n)-2\theta|>\pi$,故约束相位解卷绕的错误概率 P_e 为

$$P_e=2\cdot P[\sqrt{\mathrm{SNR}_r}(v_Q(n)+v_Q(-n))>\pi\sqrt{\mathrm{SNR}_r}] \tag{24}$$

因 $n\neq0$,$v_Q(n)$ 及 $v_Q(-n)$ 均服从正态分布且互不相关,$\mathrm{var}[\sqrt{\mathrm{SNR}_r}(v_Q(n)+v_Q(-n))]=1$,所以

$$P_e=\mathrm{erfc}(\pi\sqrt{\mathrm{SNR}_r/2}) \tag{25}$$

其中 erfc(x) 为补误差函数。对于约束相位解卷绕可能的错误类型共有四种,即

a) 当 $\pi<\Phi(n)-2\theta\leqslant3\pi$ 时,则 $K'=K-1$,解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)-2$。

b) 当 $-\pi>\Phi(n)-2\theta\geqslant-3\pi$ 时,则 $K'=K+1$,解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)+2\pi$。

c) 当 $\Phi(n)-2\theta>3\pi$ 时,则 $K'=K-2$,解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)-4\pi$。

d) 当 $\Phi(n)-2\theta<-3\pi$ 时,则 $K'=K+2$,解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)=\Phi(n)+4\pi$。

由于 $v_Q(n)$ 及 $v_Q(-n)$ 均服从正态分布且互不相关,因此错误类型 a) 出现的概率 $P(\pi<\Phi(n)-2\theta\leqslant3\pi)$ 与 b) 错误概率 $P(-\pi>\Phi(n)-2\theta\geqslant-3\pi)$ 相等;同样地,错误类型 c) 出现的概率 $P(\Phi(n)-2\theta>3\pi)$ 与 d) 错误概率 $P(\Phi(n)-2\theta<-3\pi)$ 相等。在利用式(22)计算相位估计 $\bar{\theta}_r$ 时,各个错误解卷绕相位 $\Phi_{un}(n)$ 相对于真实相位 $\Phi(n)$ 的误差将相互抵消。这说明当 N 足够大时,即使出现错误的约束相位解卷绕,相位估计 $\bar{\theta}_r$ 仍等同于式(23),且相位估计方差仍可达到 CRLB。但在实际过程中,数据长度 N 必然是有限的,从而导致上述各种错误类型出现的次数并不完全相同,如 $K'=K-1$ 与 $K'=K+1$ 的数目不一定相等,因而实际的相位估计方差将略大于 CRLB。最后需要特别指出的是,仅当信噪比高于 5 dB 时,才能将加性复高斯白噪声 $z(n)$ 近似转换为等效实高斯相位噪声 $v_Q(n)$,即瞬时相位可由 $\varphi(n)=\omega_0nT+\theta+v_Q(n)$ 表示,而本章与第 4 章的分析均建立在此条件之上。因此,上述相位估计的方差结果是在高信噪比情况下得到的,在低信噪比条件下相位估计方差将明显偏离 CRLB。

4　仿真分析

将约束相位解卷绕方法与常规的相位解卷绕方法进行比较,表 1 列出的是当 $N=1023$ 时,上述解卷绕方法在不同信噪比 SNR 下经过 1000 次 Monte Carlo 模拟得到的解卷绕错误概率,以及由式(25)计算得到的约束相位解卷绕的理论错误概率(表 1 中各概率值仅保留小数点后 5 位)。常规相位解卷绕方法的信噪比阈值约为 6 dB,且随着信噪比的降低,解卷绕错误概率急剧增大。约束相位解卷绕方法的实际错误概率与理论值基本吻合,信噪比阈值约为 3 dB 或更低。当信噪比为 0 dB 时,约束相位解卷绕的错误概率仅为 10^{-3} 量级。

表 1　相位解卷绕错误概率对比($N=1023$)

SNR/dB	常规解卷绕方法	约束解卷绕方法	理论错误概率
-1	0.92794	0.00524	0.00511
0	0.87013	0.00166	0.00168
1	0.73564	0.00045	0.00042
2	0.49960	0.00006	0.00008
3	0.21837	0.00002	0.00001
4	0.06677	0	0
5	0.01328	0	0
6	0.00093	0	0
7	0	0	0

分析基于约束相位解卷绕的相位估计性能,表 2 列出的是在 SNR = 5 dB,$N=1023$ 条件下,对若干给定的相位 θ 经 1000 次 Monte Carlo 模拟得到的估计值的均值和均方根误差。相位估计均方根误差接近 Cramer-Rao 下限(CRLB = 0.7123°),且

对于不同的相位 θ 均方根误差无显著变化。当 $N=1023$ 时，相位估计均方根误差随信噪比 SNR 的变化情况如图 2 所示，在高信噪比情况下（如 SNR≥5 dB），相位估计均方根误差仅略大于 CRLB，而在低信噪比情况下相位估计均方根误差明显偏离 CRLB。当 SNR = 5 dB 时，相位估计的均方根误差随着数据长度 N 的变化情况如图 3 所示，随着 N 的增大，均方根误差逐渐趋近于 CRLB。因此，仿真结果与第 3 章的理论分析吻合。

表 2　相位估计的 1000 次 Monte Carlo 模拟结果

（SNR = 5 dB，$N=1023$，CRLB = 0.7123°）

θ/°	$E(\bar{\theta}_r)$/°	$\sigma_{\bar{\theta}_r}$/°	θ/°	$E(\bar{\theta}_r)$/°	$\sigma_{\bar{\theta}_r}$/°
0	0.0307	0.8652	120	120.0117	0.8255
30	30.0419	0.8199	120	120.0117	0.8255
60	60.0288	0.7957	180	179.8400	0.8471
90	90.0575	0.8155			

将基于约束相位解卷绕的相位估计方法（方法 1）与文献[10]的二分段 DFT 相位差法（方法 2）、文献[13]的四分段 DFT 相位差法（方法 3）以及文献[14]的全相位 FFT 测相法（方法 4）进行比较，其中方法 1 与方法 4 的数据长度须为奇数，选择 $N=1023$；而方法 2 与方法 3 的数据长度须为偶数，选择 $N=1024$。信号均采用 AWGN 下的复正弦序列，窗函数为矩形窗，在不同的信噪比 SNR 及相对频率偏差 δ 下进行 1000 次 Monte Carlo 模拟，得到上述四种相位估计方法的均方根误差如表 3 所示。其中，不同的相对频率偏差 δ 对应不同的频率位置，且 $|\delta|\leq 0.5$，具体定义见文献[10]。随着相对频率偏差 δ 的增大，方法 1 的均方根误差无显著变化，而其他三种方法的均方根误差逐渐增大。在不同的信噪比 SNR 及相对频率偏差 δ 下，方法 1 的均方根误差均小于其他三种方法。

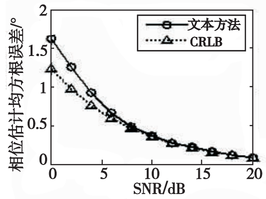

图2　相位估计均方根误差随信噪比长度变化情况（N=1023）

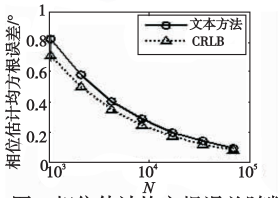

图3　相位估计均方根误差随数据长度变化情况（SNR=5dB）

表 3　四种相位估计方法的均方根误差对比　/°

	方法	$\delta=0$	$\delta=0.1$	$\delta=0.2$	$\delta=0.3$	$\delta=0.4$	$\delta=0.5$
SNR = 5 dB (CRLB = 0.7123)	1	0.8057	0.8055	0.8335	0.8290	0.8067	0.8185
	2	1.5920	1.6185	1.7018	1.8546	2.1035	2.5007
	3	1.4591	1.4834	1.5597	1.6998	1.9279	2.2919
	4	0.8221	0.8497	0.9394	1.1157	1.4353	2.0285
SNR = 10 dB (CRLB = 0.4006)	1	0.4246	0.4177	0.4196	0.4132	0.4096	0.4046
	2	0.8952	0.9101	0.9570	1.0429	1.1829	1.4062
	3	0.8205	0.8342	0.8771	0.9559	1.0841	1.2888
	4	0.4623	0.4778	0.5283	0.6274	0.8071	1.1407
SNR = 15 dB (CRLB = 0.2253)	1	0.2257	0.2272	0.2300	0.2359	0.2345	0.2340
	2	0.5034	0.5118	0.5382	0.5865	0.6652	0.7908
	3	0.4614	0.4691	0.4932	0.5375	0.6097	0.7248
	4	0.2600	0.2687	0.2971	0.3528	0.4539	0.6415

5　结束语

本文提出一种新的约束相位解卷绕方法，并结合 Tretter 相位估计算法，实现在噪声背景下对正弦信号相位的精确估计。当信噪比为 0 dB 时，约束相位解卷绕方法的错误概率仅为 10^{-3} 量级，而常规相位解卷绕方法在低信噪比情况下极易发生误差传递，导致解卷绕错误概率过大而无法使用。基于约束相位解卷绕的相位估计方法当信噪比 SNR≥5 dB 时，其均方根误差仅略大于 CRLB，相位估计性能优于文献[10,13]的分段 DFT 相位差法，以及文献[14]的全相位 FFT 测相法。

参考文献：

[1] TRETTER S A. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1985, 31(6): 832-835.

[2] RIFE D C, BOORSTYN R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.

[3] QI Guo-qing. A new frequency estimator of single sinusoid based on Fitz's algorithm[C]//Proc of the 7th IEEE International Conference on Signal Processing. 2004:1790-1793.

[4] 黄晓红，邓振淼. 改进的相位展开算法及其在瞬时频率估计中的应用[J]. 电子学报, 2009, 37(10): 2266-2272.

[5] McKILLIAM R G, QUINN B G, CLARKSON I L, *et al*. Frequency estimation by phase unwrapping[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(6): 2953-2963.

[6] FU H, KAM P Y. Sample-autocorrelation-function-based frequency estimation of a single sinusoid in AWGN[C]//Proc of the 75th IEEE Vehicular Technology Conference. 2012: 1-5.

[7] KAY S. A fast and accurate single frequency estimator[J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(12): 1987-1990.

[8] MENGALI U, MORELLI M. Data-aided frequency estimation for burst digital transmission[J]. IEEE Trans on Communications, 1997, 45(1): 23-25.

[9] 李小捷，许录平，周雪松. 低信噪比下的高精度复正弦频率估计算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2009, 36(6): 1010-1014.

[10] 齐国清，贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9): 1164-1167.

[11] 叶展，张邦宁，潘小飞. 基于 FFT 相位差的载波估计算法仿真与改进[J]. 系统仿真学报, 2012, 24(11): 2414-2417.

[12] ZHU L, DING H, DING K. Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multifrequency signal[J]. IEE Proceedings Vision Image and Signal Processing, 2004, 151(5): 411-420.

[13] 李炯，王岩飞. DFT 相位估计算法及噪声敏感频率问题分析[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(9): 2099-2103.

[14] 黄翔东，王兆华. 全相位 FFT 相位测量法的抗噪性能[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(3): 286-291.

[15] 张涛，任志良，陈光，等. 改进的全相位时移相位差频谱分析算法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(7): 1468-1472.

[16] DASH P K, HASAN S. A fast recursive algotithm for the estimation of frequency, amplitude, and phase of noisy sinusoid[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2011, 58(10): 4847-4856.