# 分段自相关频率估计算法研究\*

张晓威<sup>†</sup>,李洋洋,孟凡明 (哈尔滨工程大学理学院,哈尔滨150001)

摘 要:针对两步自相关频率估计算法(TSA 算法)的估计性能和计算量不能兼顾的缺点,提出了基于正弦信号 LP性质的分段自相关频率估计新算法。该算法首先将观测信号二等分,得到与源信号频率相同、相位不同且噪 声互不相关的观测信号,然后利用正弦信号的 LP性质,结合自相关函数建立参数估计方程,得到高精度频率估 计算法,最后通过多次蒙特卡洛仿真对算法的有效性进行了验证。仿真结果表明,分段自相关算法整体优于 TSA 算法,有较强的实用性。

 关键词:正弦信号;频率估计;LP性质;自相关;TSA算法

 中图分类号:TN911.6
 文献标志码:A

 文章编号:1001-3695(2014)01-0092-03

 doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2014.01.021

## Research of segmented autocorrelation frequency estimation algorithm

ZHANG Xiao-wei<sup>†</sup>, LI Yang-yang, MENG Fan-ming

(College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract**: In view of the question that the estimation performance and the computation for two-stage autocorrelation frequency estimation algorithm(TSA algorithm) can't be taken into account, this paper proposed a new two-stage autocorrelation approach which was based on sinusoidal signal to solve it. The algorithm first bisected the observed signal to get two signals of same frequency as the source one with different phase and uncorrelated noise. Then it used the LP property of sinusoidal signal and the self-correlation function, established the parameter estimation equation and obtained the high-precision frequency estimation algorithm. Finally, it performed the Monte Carlo method to verify the effectiveness of the algorithm. The simulation results show that the new algorithm is better than the TSA algorithm as a whole, and also it has a good practicability. **Key words**: sinusoidal signal; frequency estimation; LP property; autocorrelation; TSA algorithm

对淹没在高斯白噪声中的正弦信号进行频率估计是信号 处理的经典课题,在通信、雷达、电子侦查及振动信号处理等领 域有重要的应用。多年来学者们研究了许多频率估计算法,其 焦点集中在两个方面:估计的精度和算法实现所需的计算量。 常用的方法有最大似然估计法、时域法、频域法等。

最大似然估计<sup>[1]</sup>是最优估计,估计的方差接近克拉美一 罗下限(CRLB),但需要作一维DFT搜索,计算量大,无法满足 实时处理的要求。频域法是基于 FFT 的正弦信号频率估计, 可以分为粗估计和精估计两个过程来实现。粗估计通过直接 观察 FFT 幅谱最大值来完成,但由于加窗截断和栅栏效应的 存在,当有限长采样序列频率不是 DFT 频率分辨率的整数倍 时,正弦信号频谱发生泄露,即使无噪声影响,信号真实频率仍 落于主瓣内两根离散 FFT 谱线之间,导致频率估计无法满足 精度要求,因此各种插值策略应运而生。常用基于 FFT 的插 值算法有 Rife 算法<sup>[2-4]</sup>和 Quinn 算法<sup>[5-7]</sup>等。Rife 和 Quinn 法分别基于主瓣内两根谱线幅度比和实部比进行插值,不仅在 无噪声或信噪比较高时可以十分准确地估计出信号真实频率, 而且简单有效,故在工程中广泛应用。但前者受噪声影响较 大,在确定次大谱线时易发生错误<sup>[8]</sup>,从而导致插值方向错 误;后者在低信噪比的情况下,相位噪声可能会越过180度导 致估计误差增大<sup>[8]</sup>,进而使得估计性能产生波动。

时域法主要是应用于对实信号频率估计算法的研究。如 基于正弦信号 LP(linear prediction)性质的估计算法<sup>[9,10]</sup>,以及 基于正弦信号 LP 性质结合自相关函数的 MC<sup>[9,11-13]</sup>算法和同 样基于 LP 性质和两步自相关函数的 TSA<sup>[14]</sup>算法。TSA<sup>[14]</sup>算 法在 MC 的基础上重新定义了自相关函数,因此估计精度较 MC 算法有较大改善,并且克服了 MC 算法只有在较高信噪比 情况下使用,对于低信噪比情况下无法直接使用 MC 估计算法 的缺点,但是 TSA 算法有一个明显的缺点就是第一步自相关 计算中只用极少的样本参与了计算,因此估计性能有影响。文 献[14]中作了改进,改进后可以用到更多的样本进行计算,但 是与此同时又出现了计算量增大的衍生问题。因此 TSA 算法 在频率估计的精度和算法实现所需的计算量的问题上不能兼 顾。但是本文提出的算法解决了 TSA 算法的缺点,并且还具 有较强的抗噪声能力。

- 1 TSA 算法<sup>[14]</sup>
- 1.1 TSA1 算法

假定单一频率实正弦信号表示为

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + g(n) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + \varphi_0\right) + g(n) \\ &= 1, 2, \cdots, N \end{aligned}$$

收稿日期: 2013-04-09; 修回日期: 2013-05-13 基金项目: 哈尔滨市青年科技创新人才研究专项资金资助项目(RC2012QN008012) 作者简介:张晓威(1965-),男(通信作者),黑龙江人,教授,硕士,主要研究方向为不确定系统与信息处理(zhangxiaowei@hrbeu.edu.cn);李洋洋 (1987-),女,硕士,主要研究方向为不确定系统与信息处理;孟凡明(1986-),男,硕士,主要研究方向为不确定系统与信息处理. 其中:A 表示信号幅度, $f_0$  表示信号的真实频率, $\varphi_0 \in (-\pi,\pi]$ 表示信号初始相位, $f_s$ 和 N 分别表示采样频率和采样点数,角 频率为 $\omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s}, \omega_0 \in (0,\pi]$ 。假设g(n)为零均值,方差 $\sigma^2$ 的高斯白噪声,信噪比定义为 SNR =  $A^2/2\sigma^2$ 。

通过实单频正弦信号的 LP 性质有等式

$$\begin{aligned} &2\cos(k\omega_0)s(n-k)=s(n)+s(n-2k)\\ &等式两边同时乘以 s(n-k)可以得到\\ &2\cos(k\omega_0)s^2(n-k)=s(n-k)[s(n)+s(n-2k)] \end{aligned}$$

定义一个自相关的改进函数

$$\lambda_{k,M} = \sum_{n=M+1+k}^{N+M+k} x(n-k) \left[ x(n) + x(n-2k) \right] \quad k = 1, 2, \cdots, M$$

根据 $\lambda_{k,M}$ 的正弦特性,含有和原信号相同的频率,构造基于 $\lambda_{k,M}$ 的自相关函数 $\Lambda_{1,M}$ 和 $\Lambda_{2,M}$ ,进行第二步自相关

$$\Lambda_{1,M} = \sum_{k=4}^{M-1} \lambda_{k-1,M} (\lambda_{k,M} + \lambda_{k-2,M})$$
(1)

$$\Lambda_{2,M} = \sum_{k=5}^{M} \lambda_{k-2,M} (\lambda_{k,M} + \lambda_{k-4,M})$$
(2)

因为 $\frac{E\{\Lambda_{1,M}\}}{E\{\Lambda_{2,M}\}} \approx \frac{\cos(\omega)}{\cos(2\omega)}$ 成立,所以可以构造与 $\Lambda_{1,M}$ 和

 $\Lambda_{2,M}$ 相关的一元二次方程

$$2\Lambda_{1,M}\cos^2(\hat{\omega}) - \Lambda_{2,M}\cos(\hat{\omega}) - \Lambda_{1,M} = 0$$

得到频率估计值为

$$\hat{\omega}^{\text{TSA1}} = \cos^{-1} \left( \frac{\Lambda_{2,M} + \sqrt{\Lambda_{2,M}^2 + 8\Lambda_{1,M}^2}}{4\Lambda_{1,M}^2} \right)$$

TSA1 算法的主要创新点就是重新定义了自相关函数。可 以看出重新定义后的自相关优于现有的以自相关为基础的方 法,传统的自相关方法虽然可以利用所有的样本进行自相关计 算,但是只有一部分样本得出的数值是有用的。这样重新定义 也有一个明显的缺点,就是 $\{x(n)\}_{n=1}^{N}$ 序列中只有极少的样本 参与计算 $\lambda_{k,n}$ ,因此估计效果差强人意。

#### 1.2 TSA2 算法

文献[14]中作了改进,如果第一阶段的自相关函数中的 m < M,就可以利用更多的样本进行计算,即

$$\lambda_{k,M} = \sum_{n=M+1+k}^{N+M+k} x(n-k) [x(n) + x(n-2k)] \quad k = 1, 2, \cdots, m; m = 5, 6, \cdots, M$$
  
重复式(1)(2)的过程得到  $\Lambda_{3,M}$ 和  $\Lambda_{4,M}$ , 再定义

$$\Lambda_{3} = \sum_{m=5}^{M} \Lambda_{3,M}, \quad \Lambda_{4} = \sum_{m=5}^{M} \Lambda_{4,M}$$

由 $\frac{E\{\Lambda_3\}}{E\{\Lambda_4\}} \approx \frac{\cos(\omega)}{\cos(2\omega)}$ 成立,依照前面的分析得到改进后的

TSA2 算法频率估计结果为

$$\hat{\omega}^{\text{TSA2}} = \cos^{-1} \left( \frac{\Lambda_{2,M} + \sqrt{\Lambda_{2,M}^2 + 8\Lambda_{1,M}^2}}{4\Lambda_{1,M}^2} \right)$$

### 2 分段自相关算法

$$x_i(m) = s_i(m) + g_i(m)$$
  $i = 1, 2, m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ 

其中:

$$s_{1}(m) = A \cos\left(2\pi \frac{f_{0}}{f_{s}}m + \varphi_{0}\right)$$

$$s_{2}(m) = A \cos\left(2\pi \frac{f_{0}}{f_{s}}\left(m + \frac{N}{2}\right) + \varphi_{0}\right)$$

$$g_{2}(m) = g_{2}\left(m + \frac{N}{2}\right)$$

利用采样频率f。与采样时间长度T,及采样点数N之间的

关系 
$$T = \frac{N}{f_s}$$
,并令  $\theta = \pi f_0 T$  经上两式代入  $s_2(m)$  中得

$$s_2(m) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}m + \theta + \varphi_1\right) = s_1(m + \theta)$$

可以看到 *s*<sub>2</sub>(*m*)与 *s*<sub>1</sub>(*m*)频率相同,只是相差一个相位角 θ。 由正弦信号的 LP 性质有

$$2\cos(k\omega_0)s(n-k) = s(n) + s(n-2k)$$

当存在噪声时,有误差

 $e(m) = x_1(m) + x_1(m - 2k) - 2\cos(k\omega_0)x_1(m - k)$ 

将 LP 等式代入误差项有

 $e(m) = g_1(m) + g_1(m - 2k) - 2\cos(k\omega_0)g_1(m - k)$ 

现将  $x_1(m)$ 由 LP 性质得到的误差项与  $x_2(m)$ 进行互相关运算。

$$R_{ex2}(k) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k^{m}} \sum_{k=1+2k}^{\frac{1}{2}} e(m) x_{2}(m-k) =$$

$$R_{g_{1}x_{2}}(k) + R_{x_{2}g_{1}}(k) + 2\cos(k\omega_{0})R_{g_{1}x_{2}}(0)$$

$$\pm \vec{x} \oplus R_{g_{1}x_{2}}(k) \cdot R_{x_{2}g_{1}}(k) \cdot R_{g_{1}x_{2}}(0) \not \rightarrow \vec{y} \not \rightarrow \vec{y}$$

$$R_{g_{1}x_{2}}(k) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k^{m}} \sum_{k=1+k}^{\frac{N}{2}} g_{1}(m) x_{2}(m-k)$$

$$R_{x_{2}g_{1}}(k) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k^{m}} \sum_{k=1+k}^{\frac{N}{2} - k} g_{1}(m-k) x_{2}(m) =$$

$$N$$

$$(3)$$

$$\frac{1}{\frac{N}{2}-2k}\sum_{m=1+2k}^{\frac{N}{2}}g_1(m-2k)x_2(m-k)$$
(4)

$$R_{g_{1}x_{2}}(0) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k} \sum_{m=1+k}^{\frac{N}{2}-k} g_{1}(m) x_{2}(m) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k} \sum_{m=1+2k}^{\frac{N}{2}} g_{1}(m-k) x_{2}(m-k)$$
(5)

由 s<sub>2</sub>(m) 经变形得等式

$$s_{2}(m) = \cos(\theta)s_{1}(m) - \sin(\theta)\hat{s}_{1}(m)$$

$$\hat{s}_{1}(m) = A \sin\left(2\pi \frac{f_{0}}{f_{c}}m + \varphi_{0}\right)$$
(6)

其中

又知

将上式代入所要化简的式(3)~(5)中得到  

$$R_{g_{1}x_{2}}(k) = R_{x_{2}g_{1}}(k) = \cos(\theta)R_{g_{1}s_{1}}(k) - \sin(\theta)R_{g_{1}\hat{s}_{1}}(k) + R_{g_{1}g_{2}}(k)$$
  
 $R_{g_{1}x_{2}}(0) = \cos(\theta)R_{g_{1}s_{1}}(0) - \sin(\theta)R_{g_{1}\hat{s}_{1}}(0) + R_{g_{1}g_{2}}(0)$   
由于信号与噪声互不相关的性质以及式(6),上两式得

$$\begin{split} R_{g_{1}x_{2}}(k) &= R_{g_{1}g_{2}}(k) = R_{g_{1}}(k+N/2) \\ R_{g_{1}x_{2}}(0) &= R_{g_{1}g_{2}}(0) = R_{g_{1}}(N/2) \\ R_{g}(k) &= \sigma^{2}\delta_{k}, \ \delta_{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \end{split}$$

得到 
$$R_{ex_2}(k) = \frac{1}{\frac{N}{2} - 2k} \sum_{m=1+2k}^{\frac{N}{2}} e(m) x_2(m-k) = 0$$

从而得到正弦信号角频率估计方程为

$$\frac{1}{\frac{N}{2}-2k}\sum_{m=1+2k}^{\frac{N}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} x_1(m) + x_1(m-2k) - \\ 2\cos(kw_0)x_1(m-k) \end{bmatrix} x_2(m-k) \right\} = 0$$

$$\hat{\omega}_{0} = \cos^{-1} \left( \frac{\sum_{m=3}^{N/2} x_{2} (m-1) [x_{1}(m) + x_{1}(m-2)]}{2 \sum_{m=3}^{N/2} x_{1} (m-1) x_{2} (m-1)} \right)$$

分段自相关算法的具体实现步骤如下:a)将观测信号进行二等分;b)根据第一个观测信号建立正弦信号的 LP 等式;

c)利用第二个观测信号与第一个观测信号的 LP 等式进行自相关;d)经过推导得到角频率的精确估计值。

#### 3 仿真实验

为了更直观地评价本文算法的参数估计性能,本文先给出 频率参数  $\omega_0$  无偏估计所能达到的最小方差,即克拉美一罗下 限。对实正弦信号,在相位、幅值和频率三个参数均未知情况 下,频率估计方差的 CRLB 为 var { $\hat{\omega}$ } = 12/[ $N(N^2 - 1)$  SNR]。 仿真时采样样本长度 N = 200,采样周期 T = 8 s,采样频率  $f_s =$ 25 Hz/s,频率 $f_0 = 1$  Hz/s,幅值 A = 1,初相位  $\varphi_0 = \pi/6 = 0.5236$ rad,角频率  $\omega_0 = 0.08\pi = 0.2513$  rad/s。其中均方误差定义为: MSE =  $E\{(x - \hat{x})^2\}$ ,其中 E 为期望。图 1 分别显示了本文算 法和 TSA1、TSA2 频率估计法的频率均方误差以 SNR 为自变 量的函数。通过观察可知 TSA2 估计性能最好,TSA1 估计性 能相对较差,而本文算法在效果上逼近 TSA2 算法。



最后,检查算法的复杂度,将分段自相关算法与文献[9] 中的算法进行比较,所得结果如表1所示。

表1 三种算法的计算复杂度

方法	加/减	乘
TSA1	$4mN - 8m^2 + 2m - 16$	$2mN - 4m^2 + 2m - 3$
TSA2	$2NM^2 + M^2 - \frac{8M^3}{3} - 32N + 224$	$NM^2 + M^2 - \frac{4M^3}{3} - \frac{26M}{3} - 16N + 104$
分段自相关	$N^2 - 6k + \frac{N}{2} - 3$	$3m^2 - mk - k^2 + 8$

#### 4 结束语

针对加性高斯白噪声背景下观测信号,本文提出了分段自

(上接第91页)新的发展领域。在该算法中提出以机器人作为 辅助检测,能进一步提高跌倒检测的结果,同时也能更直接地 观察事情的现状,为老人摔倒后及时得到救援的远程医疗提供 更好的服务。机器人辅助检测功能的具体实现将在后续工作 中完成。

#### 参考文献:

- [1] 杨冬叶,赵勇. 我国空巢老年人的现状与对策[J]. 现代临床护 理,2004(5):60-62.
- [2] 佟丽娜,宋全军,葛运建.基于时序分析的人体摔倒预测方法[J]. 模式识别与人工智能,2012,25(2):273-279.
- [3] LI Qiang, STANKOVIC J A, HANSON M A, et al. Accurate fast fall detection using gyroscopes and accelerometer derived posture information [C]//Proc of the 6th International Workshop on Wearable and Implantable Body Sensor Networks. 2009;138-143.
- [4] BOURKE A K, LYONS G M. A threshold based fall detection algorithm using a bi-axial gyroscope sensor[J]. Medical Engineering & Physics,2008,30(1):84-90.

相关频率估计算法,解决了 TSA 算法估计性能和计算量不能 兼顾的缺点。仿真实验和表1给出了本文算法与 TSA1、TSA2 性能及计算量的比较,可以直观地看到本文提出的算法可以在 计算量较小的情况下逼近 TSA2 的性能,弥补了 TSA1 改进后 带来的计算量增加的问题。

#### 参考文献:

- RIFE D C, BOORSTYN R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1974,20(5):591-598.
- [2] RIFE D C, VINCENT G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tone [J]. Bell System Technical Journal, 1970, 49(2):197-228.
- [3] 王宏伟,赵国庆,齐飞林. 一种实时精确的正弦波频率估计算法 [J].数据采集与处理,2009,24(2):208-211.
- [4] 王宏伟,赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处 理,2010, 26(10):1573-1576.
- [5] QUINN B G. Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series [J]. IEEE Trans on SP, 1997, 45(3):814-817.
- [6] 张英龙,刘渝,王旭东.基于频移修正的奎因频率估计算法[J]. 南京航空航天大学学报,2007, 39(5):597-600.
- [7] 谢胜,陈航,于平,等. 基于 Quinn 算法和相位差法的正弦波频率 估计综合算法[J].信号处理,2011,27(5):771-775.
- [8] 齐国清. 几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析 [J]. 振动工程 学报,2006,19(1):86-92.
- [9] TUFTS D, FIORE P. Simple, effective estimation of frequency based on Prony's method [C]//Proc of IEEE International Conference on Speech, and Signal Processing. [S. l.]: IEEE Press, 1996: 2801-2804.
- [10] LUI K,SO H C. Improved variant of Pisarenko harmonic decomposition for single sinusoidal frequency estimation [J]. IEICE Trans on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2007,90(11):2604-2607.
- [11] CHAN K, SO H C. An exact analysis of Pisarenko's single-tone frequency estimation algorithm[J]. Signal Processing, 2003,83(3): 685-690.
- [12] LUI K, SO H C. Modified Pisarenko harmonic decomposition for single-tone frequency estimation[J]. IEEE Trans on Signal Processing,2008,56(7):3351-3356.
- [13] RIM E K, HICHEM B, ROBERTO L V, et al. Frequency estimation of real-valued single-tone in colored noise using multiple autocorrelation lags[J]. Signal Processing, 2010,90(7):2303-2307.
- $[\,14\,]$  LUI K, SO H C. Two-stage autocorrelation approach for accurate singlesinusoidal frequency estimation  $[\,J\,]$ . Signal Processing, 2008,  $88(7):\!1852\!\cdot\!1857.$
- [5] NOURY N, RUMEAUA P, BOURKE A K, et al. A proposal for the classification and evaluation of fall detectors [J]. IRBM, 2008, 29 (6):340-349.
- [6] LUO Su-huai, HU Qing-mao. A dynamic motion pattern analysis apparoch to fall detection [C]//Proc of IEEE International Workshop on Biomedical Circuits & Systems. 2004;53-56.
- [7] ROUGIER C, MEUNIER J, ST-ARNAUD A, et al. Monocular 3D head tracking to detect falls of elderly people [C]//Proc of the 28th IEEE EMBS Annual International Conference. 2006: 6384-6387.
- [8] 王荣,章韵,陈建新,等.基于三轴加速度传感器的人体跌倒检测 系统设计与实现[J].计算机应用,2012,32(5);1450-1453.
- [9] 石欣,熊庆宇,雷璐宁,等.基于压力传感的跌倒检测系统研究 [J].仪器仪表学报,2010,31(3):715-720.
- [10] 薛源,高向阳.基于多传感器信息融合的跌倒监测系统的设计[J]. 武汉理工大学学报:信息与管理工程版,2011,33(5):712-716.
- [11] 朱国忠, 韦彩虹, 潘敏. 基于三维加速度传感器的人体运动能耗 检测算法的研究[J]. 传感技术学报, 2011, 24(8):1217-1221.
- [12] 刘欣荣,阳光. 一种改进的基于加权模型的概念相似度计算方法
   [J]. 微电子学与计算机,2012,29(2):13-17.