

污染物减排预测的灰色 Markov 组合模型与算法

郭晓君^{1,2}, 刘思峰¹, 吴利丰¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106; 2. 南通大学 理学院, 江苏 南通 226007)

摘要: 为了科学准确地预测全国污染物排放量, 根据污染物排放受多种灰色因素影响及污染数据采集具有随机波动性的特点, 将灰色预测和 Markov 链相结合, 利用灰色系统模型预测污染物排放量的整体趋势, Markov 链作为传感器检测系统状态的随机波动变化, 并对模型进行实时修正改进, 在此基础上, 提出了一种基于改进灰色 Markov 链的污染物减排预测方法。最后以全国二氧化硫排放量为例, 对模型的预测精度和有效性进行了分析。结果表明, 相对于传统预测方法, 改进的灰色 Markov 组合模型明显提高了预测精度, 是一种有效的污染物排放量预测算法。

关键词: 污染物排放量; 灰色系统; 马尔可夫链; 实时修正; 预测

中图分类号: TP391; TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)12-3670-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.12.039

Modeling and algorithm of prediction about pollutants' emission reduction by combining gray theory and Markov chain

GUO Xiao-jun^{1,2}, LIU Si-feng¹, WU Li-feng¹

(1. College of Economic & Management, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. School of Science, Nantong University, Nantong Jiangsu 226007, China)

Abstract: In order to accurately forecast pollutant emission volume nationwide, this paper constructed an improved gray Markov chain model by combining gray prediction with Markov chain, given the fact that pollutant emission was under the influence of multiple gray factors and the acquired pollution data was characteristic of high stochastic volatility. This gray system model was used for predicting general trend of pollutant emission volume, while the Markov chain was used as a sensor for detecting the system's stochastic volatility. Moreover, this model improved through real-time correction for more accurate prediction. On that basis, this paper applied an improved model to forecast pollutants' emission reduction based on gray Markov chain. Finally, it carried out a case study to forecast SO₂ emission volume nationwide, which analysed the forecast accuracy and validity of this model. The results demonstrate that, compared with traditional ones, this newly-combined gray Markov model has improved the prediction accuracy obviously and is an effective algorithm for the prediction of pollutant emission volume.

Key words: pollutant emission volume; gray system; Markov chain; real-time correction; prediction

0 引言

污染物排放量监测是对污染源排放的主要污染物总量进行核定。其污染识别过程, 首先以经济活动类型、地理位置为基础, 细分污染类型; 然后识别污染源及污染强度, 确定污染物传输路径, 统计各区域内污染状况; 最后定量识别重点污染源与污染物, 统计排放总量。在此过程中, 主要采用手工监测或在线自动监控系统进行污染数据采集, 由于人员专业素质和监测能力参差不齐、技术规范尚不完善、自动监控技术仍不成熟、监测数据缺失或大量数据闲置, 这些多元因素导致了污染数据采集的随机性波动性^[1]。因此对污染物排放量的精准预测, 成为国家节能减排工作中的重要课题。

目前对污染物排放量的统计预测, 主要采用线性回归分析

法、时间序列法、神经网络法、灰色预测法、小波支持向量机法、马尔可夫链预测法等^[2-5]。然而由于受到以上多种灰色因素的影响, 污染物的排放量具有较大随机性和波动性等变化特点, 传统的统计预测方法处理非线性特征的污染问题时具有较大的局限性, 无法准确识别污染过程的随机波动变化规律, 预测精度较低。

针对传统预测方法的不足, 本文首先用灰色预测来处理系统的不确定性、描述其整体发展趋势; 再借助 Markov 链这个传感器, 检测污染过程的状态变化, 消除其波动性, 推测未来的污染信息数据。本文模型的创新点在于, 在将灰色预测与 Markov 链组合的基础上, 考虑随时间推移不断进入系统的随机扰动因素, 通过实时修正反映系统的新特征。仿真实例结果表明, 提出的预测算法能够优势互补、具有较好的精度, 是一种有效地处理随机波动性问题的预测算法。

收稿日期: 2013-03-22; **修回日期:** 2013-04-25 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(71111130211, 71363046); 国家教育部人文社会科学青年基金资助项目(13YJC790198); 江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXZZ13_0184); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目; 南通市科技计划资助项目(HS2013026)

作者简介: 郭晓君(1978-), 男, 江苏南通人, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为系统工程、灰色系统理论等(guoxj159@163.com); 刘思峰(1955-), 男, 河南平舆人, 教授, 博导, 主要研究方向为灰色系统理论、数量经济学等; 吴利丰(1983-), 男, 河北邯郸人, 博士研究生, 主要研究方向为灰色系统理论等。

1 灰色 Markov 链模型的建模机理

灰色预测模型^[6,7]是利用微分方程给出系统生成序列长期、持续的变化过程,这一过程通过生成序列转换得到,生成序列指减弱原序列随机性后的序列,还原生成序列就得到系统趋势作用。灰色系统预测主要用于解决时间短、数据资料少及波动不大的预测问题,其预测的图形是一条单调递增或单调递减的平滑曲线,对随机波动性较大的数据序列拟合性较差,预测精度较低。而马尔可夫链预测的对象是随机变化的动态系统,其预测是根据状态之间的转移概率来推测系统未来的发展趋势。其中转移概率反映了各种随机因素的影响,揭示了各状态之间转移的内在规律性,比较适合随机波动性较大的数据预测问题。灰色理论与马尔可夫链的有机结合,可以充分发挥各自的优点,避免各自的缺陷,从而提高模型预测的精度^[8,9]。

1.1 GM(1,1) 模型原理

灰色系统将所有的随机变量都看做灰色变量,将随机过程看做是灰色过程,通过一系列数据生成方法将无规律或规律性不强的一组原始数据序列变得具有明显的规律性。GM(1,1)模型是灰色预测模型中最常用的一种,其建模过程如下:

设原始时间序列为

$$X^{(0)} = \{x_i^{(0)}, t=1, 2, \dots, n\}$$

作一次累加生成得到 1-AGO 序列:

$$X^{(1)} = \{x_i^{(1)}, t=1, 2, \dots, n\}, x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^i x_j^{(0)}$$

以生成序列 $X^{(1)} = \{x_i^{(1)}, t=1, 2, \dots, n\}$ 为基础建立如下一阶线性微分方程:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + \alpha X^{(1)} = \beta \quad (1)$$

其中:模型参数 α, β 分别称为发展灰度和内生成控制灰度。微元离散化后微分方程参数估计的矩阵形式为

$$[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2)$$

其中:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{(x_1^{(1)} + x_2^{(1)})}{2} & 1 \\ -\frac{(x_2^{(1)} + x_3^{(1)})}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{(x_{n-1}^{(1)} + x_n^{(1)})}{2} & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

解微分方程后可得时间响应序列:

$$\hat{x}_{t+1}^{(1)} = (x_1^{(0)} - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}) \exp(-\hat{\alpha}t) + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \quad (3)$$

则作累减还原可得拟合序列:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t+1) &= \hat{x}_{t+1}^{(1)} - \hat{x}_t^{(1)} = \\ &= (1 - \exp(-\hat{\alpha})) (x_1^{(0)} - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}) \exp(-\hat{\alpha}t) \end{aligned} \quad (4)$$

即为系统预测值。

1.2 Markov 链模型原理

1.2.1 马尔可夫链

马尔可夫过程是随机过程的一个分支,它的最基本特征是“无后效性”,即在已知某一随机过程现在的条件下,“将来”与“过去”是独立的,马尔可夫链是一个时间与状态都离散的时间序列,数学描述如下:

若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足

a) 状态空间 S 为 R 的可列(有限集);

b) 任 $n \geq 1, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 有

$$P\{X(t_n) < i_n | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} =$$

$$P\{X(t_n) < i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为马尔可夫链。如果时间 T 为可列离散集,则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为离散参数的马尔可夫链。

设 I 为离散参数马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间,称条件概率

$$p_{ij}(m, n) = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}$$

$$i, j \in I, m \geq 0, n \geq 0$$

为 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的 n 步转移概率。当转移概率 $p_{ij}(m, n)$ 与时间起点 m 无关时,称此马尔可夫链为齐次马尔可夫链,且记 $p_{ij}(m, n)$ 为 $p_{ij}(n)$,记 $P^{(n)} \triangleq p_{ij}(n)$ 为 n 步转移概率。

1.2.2 状态划分

以 $\hat{Y}(t+1)$ 曲线为基准,根据每个预测对象的具体情况,划分成与 $\hat{Y}(t+1)$ 曲线平行的若干条形区域,每个条形区域构成一个状态。为了便于表示,以实际值除以预测值得到的相对值为标准划分状态,任一状态记为 $E_i \in (E_{1i}, E_{2i}]$, $i=1, 2, \dots, s$,其中 s 为划分的状态数目,灰元 E_{1i} 和 E_{2i} 分别表示第 i 种状态的上下界。 E_{1i}, E_{2i} 随时间 t 变化而变化,划分状态数 s 和 E_{1i}, E_{2i} 可根据具体情况而定。

1.2.3 计算状态转移概率矩阵

状态转移概率矩阵公式为

$$P_{ij}^{(n)} = \frac{K_{ij}^{(n)}}{K_i} \quad i, j=1, 2, \dots, s \quad (5)$$

式中: $P_{ij}^{(n)}$ 为由状态 E_i 经过 n 步转移到 E_j 的概率, K_i 为状态 E_i 出现的频数, $K_{ij}^{(n)}$ 为状态 E_i 经过 n 步转移到 E_j 的频数。

由此,求得状态转移概率矩阵为

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & \dots & P_{1s}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & \dots & P_{2s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{s1}^{(n)} & P_{s2}^{(n)} & \dots & P_{ss}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

1.2.4 编制预测表及确定预测值

选取距离预测时间最近的 s 个时间(s 为划分的状态个数),在转移步数所对应的转移概率矩阵中,取初始状态所对应的行向量,组成新的矩阵,对该矩阵的列向量求和,其和值最大的列向量的状态即为系统随机值的预测转向状态。

当未来转移状态确定后,也就确定了预测值的变动区间 $(E_{1i}, E_{2i}]$,预测值取该区间的中位数,即

$$\hat{G}(t+1) = \frac{1}{2} (E_{1i} + E_{2i}) \hat{Y}(t+1) \quad (7)$$

1.3 灰色 Markov 链模型的算法优化

一般的灰色 Markov 链模型,转移概率矩阵的数据来源固定不变。而在现实问题中,随着系统的发展及时间的推移,老数据的信息意义将逐步降低,同时一些随机扰动或驱动因素也将不断进入系统。因此在实际应用中,必须不断地考虑那些随着时间的推移相继进入系统的随机扰动或驱动因素,随时将每一个新得到的数据置入系统中,同时又及时剔除已不能反映系统目前特征的老数据,从而建立相应的灰色 Markov 链实时修正模型。

2 基于优化的灰色 Markov 链模型的全国污染物总量减排预测

我国的主要污染物总量减排目标包含二氧化硫、氮氧化物、化学需氧量及氨氮四个主要指标,本文选取全国 2004—

2010年的二氧化硫排放总量(万吨)进行模拟计算(实际值来源于《中国环境统计年鉴2011》)^[10]。

2.1 建立GM(1,1)预测模型

根据上述GM(1,1)模型建立的方法,得到二氧化硫年排放总量的预测模型:

$$\hat{x}_{t+1}^{(1)} = 68592.5 - 66337.6e^{-0.04t}$$

$$\hat{x}_{t+1}^{(0)} = 2707.3e^{-0.04t}$$

其预测结果如表1所示。

表1 2004—2010年全国二氧化硫排放总量的实际值与一次拟合值

年份	排放总量 实际值	GM(1,1)模型		
		一次模拟值	残差	相对误差/%
2004	2254.9	2254.9	0.0	0
2005	2549.3	2612.4	-63.1	-2.48
2006	2588.8	2518.1	70.7	2.73
2007	2468.1	2427.2	40.9	1.66
2008	2321.2	2339.5	-18.3	-0.79
2009	2214.4	2255.0	-40.6	-1.83
2010	2185.1	2173.6	11.5	0.53
2011		2095.1		

2.2 状态划分

模型的预测精度高低与状态划分有密切关系,需要经过反复比较划分才能达到最佳效果。利用实际值除以GM(1,1)预测值,得到相应的相对值,如表2所示。依据相对值及实际情况,将系统划分为三个状态,分别用 E_1 、 E_2 、 E_3 表示,其中: $E_1 \in (97.2\%, 99.0\%]$, $E_2 \in (99.0\%, 101.2\%]$, $E_3 \in (101.2\%, 103.2\%]$ 。

表2 各年份二氧化硫排放总量相对值及状态

年份	相对值/%	状态	年份	相对值/%	状态
2004	100.0	E_2	2008	99.2	E_2
2005	97.6	E_1	2009	98.2	E_1
2006	102.8	E_3	2010	100.5	E_2
2007	101.7	E_3			

2.3 建立状态转移概率矩阵

由表2中各年份相对应的状态,可得到各步的状态转移概率矩阵:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 编制预测表

以预测2011年的数据为例,由于将状态划分为三个,所以选择距离2011年最近的三个数据编制预测表,转移步数分别为1、2、3,在转移步数所对应的转移概率矩阵中,取初始状态所对应的行向量,得到二氧化硫排放总量预测表,如表3所示。

表3 2011年二氧化硫排放总量预测表

年份	初始状态	转移步数	E_1	E_2	E_3
2010	E_2	1	2/3	0	0
2009	E_1	2	0	0	1/2
2008	E_2	3	0	0	1/3
合计			2/3	0	5/6

2.5 预测结果及分析

转移概率之和最大的列向量的状态即为随机值的预测转向状态。一般情况下,列向量之和的最大值所对应的转向状态是唯一的,如果列向量之和的最大值所对应的转向状态不是唯一的,在计算预测值时,可以取所对应的几个转向状态的均值。

由表3可知,转移概率之和的最大值为5/6,所对应状态为 E_3 ,所以可以预测2011年的二氧化硫排放总量处于状态 E_3 。由GM(1,1)模型得到的2011年二氧化硫排放总量的一次预测值为2095.1万吨,由式(7)得:

$$\hat{G}_{\text{year}2011} = \hat{G}(8) = \frac{1}{2}(E_{13} + E_{23})\hat{Y}(8) = \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}(101\% + 103\%) \times 2095.1 = 2141.2(\text{万吨})$$

即为2011年全国二氧化硫排放总量的二次预测值。

根据国家环境保护部公布的《2011年中国环境状况公报》,2011年全国二氧化硫排放总量比上年下降2.21%,为2136.8万吨,可见灰色Markov链模型得到的二次预测结果较为理想,极大地提高了模型的预测精度。

同理,应用灰色Markov链模型计算出2005—2010年全国二氧化硫排放总量的二次预测值,预测结果如表4所示。

表4 2004—2010年全国二氧化硫排放总量的实际值与二次拟合值

年份	排放总量 实际值	灰色Markov链模型		
		二次模拟值	残差	相对误差/%
2004	2254.9	2254.9	0.0	0.00
2005	2549.3	2562.8	-13.5	-0.53
2006	2588.8	2547.1	41.7	1.61
2007	2468.1	2480.6	-12.5	-0.51
2008	2321.2	2341.8	-20.6	-0.89
2009	2214.4	2212.2	2.2	0.10
2010	2185.1	2175.8	9.3	0.43
2011		2141.2		

由表1与表4比较可知,GM(1,1)模型得到的一次预测结果的平均相对误差 $\bar{\Delta}_1 = 1.67\%$,而灰色Markov链模型得到的二次预测结果的平均相对误差 $\bar{\Delta}_2 = 0.68\%$,显然,通过灰色Markov链模型的二次预测,可以显著降低预测的平均相对误差,从而提高预测精度。两种模型预测结果与实际值的拟合情况如图1所示,从图中也可以看出,灰色Markov链模型的预测结果与实际值的拟合程度明显高于GM(1,1)模型,能较好地反映二氧化硫年排放总量的实际变化趋势。

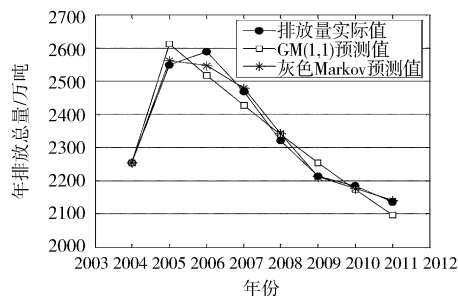


图1 两次预测结果比较

2.6 模型优化后的预测结果及分析

下面继续对全国2012年的二氧化硫排放总量进行预测,

剔除最早 2004 年的数据,将国家环保部公布的《2011 年中国环境状况公报》中 2011 年的数据考虑进来,建立灰色 Markov 链实时修正预测模型。根据 GM(1,1) 建模方法,得二氧化硫年排放总量的一次模拟值,结果如表 5 所示。

表 5 2005—2011 年全国二氧化硫排放总量的 GM(1,1) 预测模型

年份	实际值	一次模拟值	相对值/%	状态
2005	2549.3	2549.3	100.0	E_2
2006	2588.8	2557.4	101.2	E_3
2007	2468.1	2456.8	100.5	E_2
2008	2321.2	2360.1	98.4	E_1
2009	2214.4	2267.3	97.7	E_1
2010	2185.1	2178.1	100.3	E_2
2011	2136.8	2092.4	102.1	E_3

利用实际值除以一次预测值,得到相应的相对值,如表 5 所示。依据相对值及实际情况,划分为三个状态,分别用 E_1 、 E_2 、 E_3 表示,其中: $E_1 \in (97.5\%, 99.0\%]$, $E_2 \in (99.0\%, 100.5\%]$, $E_3 \in (100.5\%, 102.5\%]$ 。由表 5 中各年份相对应的状态,可得到各步的状态转移概率矩阵为

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为了预测 2012 年的数据,选择距离 2012 年最近的三个数据编制预测表,转移步数分别为 1、2、3,在转移步数所对应的转移矩阵中,取初始状态所对应的行向量,得到二氧化硫排放总量预测表,如表 6 所示。

表 6 2012 年二氧化硫排放总量预测表

年份	初始状态	转移步数	E_1	E_2	E_3
2011	E_3	1	0	1/2	0
2010	E_2	2	1/3	1/3	0
2009	E_1	3	0	0	1/2
合计			1/3	5/6	1/2

由表 6 可知,合计值最大为 5/6,所对应状态为 E_2 ,所以可以预测 2012 年的二氧化硫排放总量处于状态 E_2 。由 GM(1,1) 模型得到的 2012 年二氧化硫排放量的预测值为 2010.1 万吨,由式(7)得

$$\hat{G}_{\text{year}2012} = \hat{G}(8) = \frac{1}{2}(E_{12} + E_{22})\hat{Y}(8) = \frac{1}{2}(99.0\% + 100.5\%) \times 2010.1 = 2005.1 \text{ (万吨)} \quad (9)$$

即为 2012 年全国二氧化硫排放总量的二次预测值。

从预测结果可以看出,2012 年全国二氧化硫排放总量较 2011 年将下降 6.2%,较 2005 年将下降 21.3%。同样方法也可以预测出其余三个污染物指标 2012 年的排放总量。自“十一五”规划以来,由于全国环保系统全面加强环境监管和环境应急工作,大力推进节能减排,各项环境保护工作都取得了新的进展,污染减排取得显著成效,污染防治稳步推进,因此二氧化硫等主要污染物年排放总量呈现逐年稳步下降趋势,预计可以较顺利完成“十二五”规划的污染物总量减排目标。

3 结束语

本文针对具有随机波动性特点的污染物减排预测问题,提出了实时修正的灰色 Markov 组合预测模型与算法,充分利用了灰色预测建模所需信息量少的特点和 Markov 链处理随机波动性数据的特性,并利用实时修正对模型进行优化。通过对全国二氧化硫排放总量的预测结果表明,实时修正的灰色 Markov 组合预测的精度明显优于其他单一预测模型,能有效地处理随机波动性问题、反映事物发展的整体规律,适用于全国主要污染物减排预测,具有实际应用和推广意义,可为国家环保部门推进节能减排提供决策依据。

参考文献:

- [1] 刘卫先. 我国现行环境监测体制述评[J]. 中国环境监测, 2009, 25(3): 5-9.
- [2] 蒋益民, 曾光明, 张冀, 等. 湖南省 SO₂ 污染现状、排放强度地理分布及趋势预测[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2004, 31(6): 75-79.
- [3] 郎君, 苏小红, 周秀杰. 基于有机灰色神经网络模型的空气污染指数预测[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 36(12): 1598-1601, 1704.
- [4] 陈柳. 小波支持向量机在大气污染物浓度预测中的应用[J]. 环境科学与技术, 2010, 33(9): 53-56.
- [5] 刘殿海, 杨勇平, 杨昆, 等. 基于马尔可夫链的能源结构与污染物排放预测模型及其应用[J]. 中国电力, 2006, 39(3): 8-13.
- [6] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2010.
- [7] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
- [8] 张超, 马存宝, 许家栋. 基于灰色马尔可夫 SCGM(1,1)_c 模型的空难人数预测[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(5): 135-139, 144.
- [9] 赵琳琳, 夏乐天. 灰色马尔可夫链模型的改进及其应用[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2007, 35(4): 487-490.
- [10] 国家统计局, 环境保护部. 中国环境统计年鉴 2011[M]. 北京: 中国统计出版社, 2011.
- [11] 王玲. 供应链网络竞争机制: 一个演化博弈的视角[J]. 预测, 2007, 26(5): 12-17.
- [12] 林洁. 产业集群内企业合作创新的动态博弈分析[J]. 技术经济与管理研究, 2010(1): 33-35.
- [13] 邓亮章. 最小二乘法的拟合及其应用[J]. 兰州教育学院学报, 2012, 28(8): 109-111.
- [14] 邓倩妮, 陈笠, 陆鑫达, 等. 基于复杂曲线表示的切比雪夫多项式拟合并行算法[J]. 上海交通大学学报: 自然科学版, 2003, 37(6): 906-909.
- [15] 邢志栋, 曹建荣, 曾云辉. 变分不等式问题的法方程解法[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2000, 28(1): 25-27.
- [6] 何静, 徐福缘. SDN 及其内部合作伙伴关系的博弈分析[J]. 系统工程, 2003, 21(2): 60-63.
- [7] 张洪潮, 何任. 非对称企业合作创新的进化博弈模型分析[J]. 中国管理科学, 2010, 18(6): 163-170.
- [8] 潘晨翔, 韩丽川, 陈晓荣. 考虑合作费用的企业合作网络模型[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(9): 2139-2142.
- [9] GIANNOCARO L L, PONTRANDOLFO P. Supply chain coordination by revenue sharing contracts[J]. Production Economics, 2004, 89: 131-139.
- [10] 宋杰鲲, 张宇. 基于博弈论的企业合作竞争情报分析与成本分摊模型[J]. 情报杂志, 2011, 30(7): 22-25.

(上接第 3669 页)