

熵值理论在多目标演化中的应用研究^{*}

张雨真, 戴光明, 彭 雷, 王茂才

(中国地质大学(武汉)计算机学院, 武汉 430074)

摘要: 为了克服传统多目标演化算法在进化后期遗传操作可能失效使算法性能降低以及基于概率建模的多目标算法在演化初期由于种群分布尚未呈现一定规律, 采样产生的新个体的搜索方向同目标方向存在差异, 提出一种基于熵值的多目标演化算法(entropy based multi-objective evolutionary algorithm, EB-MOEA)。算法利用种群进化过程中, 个体分布存在从无序到有序的现象, 设计了一种基于熵值理论的种群分布计算方法, 并将其作为种群从无序到有序过渡的判定准则, 指导遗传操作和概率建模操作切换的时机。新算法采用 ZDT、DTLZ 系列测试集进行实验, 通过与 NSGA-II 以及 RM-MEDA 算法的实验对比, 证明了新判断准则的有效性, EB-MOEA 具有更好的寻优性能。

关键词: 多目标演化; 熵; 判定准则; 基于熵值的多目标演化算法

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)12-3652-05

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.12.034

Application and research of entropy theory in multi-objective evolution

ZHANG Yu-zhen, DAI Guang-ming, PENG Lei, WANG Mao-cai

(School of Computer Science, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: In the later stage of multi-objective evolutionary algorithm, the traditional genetic operation may be invalid, thus the performance of the algorithm will be reduced, while at the early stage of probabilistic modeling, the search direction of the sampling new individuals may be differ from the exact direction for the lack of distribution rule of the population. The paper proposed an entropy-based multi-objective evolutionary algorithm (EB-MOEA), it used the phenomenon that the population went from disorder to order in the process of evolution. It designed a distribution calculation method and used as the criteria which could guide the switching time of genetic operation and probabilistic modeling operation. The new algorithm adopted ZDT, DTLZ test suits to conduct the comparison experiment with NSGA-II and RM-MEDA, results show that the effectiveness of the new criterion and the proposed algorithm has better optimization performance.

Key words: multi-objective evolution; entropy; criteria; EB-MOEA

0 引言

传统的多目标演化算法^[1,2]: a) 通过交叉、变异等操作来产生新的个体, 算法擅长全局搜索, 局部搜索能力不足, 且在算法接近收敛的后期盲目的遗传操作会失去原有的意义, 使算法的性能降低; b) 这类方法没有利用 Karush-Kuhn-Tucker 条件, 即一个连续的多目标优化问题的 Pareto 解集是一个分段连续的 $m-1$ 维流形, 其中 m 是目标函数的个数^[3]。

为了克服这些不足, 2001 年, Thierens 等人将分布估计算法(EDA)引入到多目标优化领域。其后, Okabe 等人^[4]提出了基于 Voronoi 图的多目标分布估计算法, Bosman 等人^[5]提出了基于混合单变量高斯模型的多目标算法, Dong 等人^[6]提出了基于多变量高斯模型的方法, Laumanns 等人^[7]扩展了协方差矩阵自适应演化策略来处理多目标问题。在组合多目标优化中, Pelikan 等人^[8]提出了基于贝叶斯网络的方法来求解背包问题。然而这些 EDA 算法在建立概率模型时没有很好地利用

Pareto 解集的分布规则。

Zhou 等人^[9]在 2005 年提出采用模型演化多目标优化算法求解两个目标的优化问题, 该算法交替使用遗传操作和概率建模的方法来产生子代种群。2006 年, Zhou 等人^[10]又在该工作的基础上引入一个收敛准则来判断当前种群是采用遗传操作还是建立概率模型来产生下一代种群。2008 年, Zhang 等人^[11]提出了基于 EDA 的规则模型多目标算法 RM-MEDA。2009 年, Zhou 等人^[12]又将 RM-MEDA 扩展用以求解 PS 和 PF 是不同维的问题。此外, 其在求解静态多目标、动态多目标、带许多局部 Pareto 前沿的多目标以及高维的多目标问题中都得到了应用^[13]。2010 年, Mo 等人^[14]将精英策略引入到 RM-MEDA 中。总体而言, 这些 RM-MEDA 最基本的思想都是利用统计以及机器学习技术来指导 EDAs 的搜索。2011 年, Zhang 等人^[15]还提出用主曲线方法建模, 并设计了基于多重分形谱的模型演化多目标算法建模开始评测准则, 为求解多目标优化问题提供了新的思路。

收稿日期: 2013-03-02; **修回日期:** 2013-04-22 **基金项目:** “十二五”民用航天专业技术预先研究项目, 国家自然科学基金资助项目(61103144, 60873107); 中国博士后科学基金资助项目(2011M501260, 2012T50681, 2012M511301); 湖北省自然科学基金资助项目(2010CDB04104, 2011CDB348); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(CUG120114)

作者简介: 张雨真(1990-), 女, 四川都江堰人, 硕士, 主要研究方向为多目标优化(853862301@qq.com); 戴光明(1964-), 男, 安徽安庆人, 教授, 博导, 主要研究方向为动态多目标规划、科学计算可视化; 彭雷(1980-), 男, 湖北武汉人, 讲师, 博士, 主要研究方向为轨道设计与优化研究; 王茂才(1974-), 男, 湖北南漳人, 副教授, 博士(后), 主要研究方向为优化算法设计与卫星任务规划调度研究。

这些算法均可划归为基于概率模型的方法。这类方法不使用传统的交叉、变异算子来进行繁殖操作,而是通过统计学习的手段从群体的宏观角度建立一个描述解集分布的概率模型,然后对概率模型随机采样产生新的种群。由于该类方法提出时间不长,理论体系还不是很成熟,因此对其进一步的研究有很重要的理论意义和创新价值。此外,在算法的初始阶段,由于缺少全局信息,通过概率建模的方法进行的搜索常常会使之与目标方法相差甚远,如何将传统的多目标算法与基于概率模型的方法更好地结合在一起,让两者取彼之长也是一个十分值得研究的问题。

熵的概念是由德国物理学家克劳修斯于 1865 年提出的。1872 年波尔兹曼从分子运动的角度对克劳修斯的热力学熵理论进行了发展,引入了统计熵的定义。1948 年,现代信息论创始人香农把玻尔兹曼定义的熵引入到信息论中,建立了信息熵的概念。随着科学的发展和认识的不断深入,熵这个物理学概念已渗透到自然科学和社会科学的各个领域。在多目标优化研究中,郑金华等人^[16]提出用熵来保持种群的多样性,Oceanasek^[17]提出了基于熵值的收敛性度量,用于判定 EDA 算法是否终止。Wang 等人^[18]提出使用拥挤熵来反映解在目标空间中的拥挤程度,Qin 等人^[19]则采用信息熵来维持种群规模,保证种群的多样性。此外,Wang 等人将熵值度量作为多目标优化算法中的一种新的评价标准^[20]。

多目标演化算法在优化问题的过程中,种群中个体的分布存在从无序到有序的现象,本文将熵值理论引入到多目标演化中,提出了一种熵值计算方法来描述种群的分布,在此基础上给出了判定种群从无序到有序过渡的临界点的方法,并将其作为一种建模判定准则引入到多目标演化的研究当中,提出了一种新的混合算法 EB-MOEA。

1 多目标演化中的熵

1.1 多目标演化中的熵

定义 1 种群的熵。它是种群中所有个体分布的一种量度。若进化种群 Pop 的规模为 N ,决策/目标空间的维数为 n ,将决策/目标空间的每一维划分为 K 个区间,于是整个决策/目标空间的网格数为 K^n ,则定义种群的熵为

$$E = - \sum_{i=1}^{K^n} p_i \log p_i \quad (p_i \neq 0) \quad (1)$$

其中: $p_i = \text{counter}[i]/N$, $\text{counter}[i]$ 为第 i 个网格中个体的数目。

1.2 测试集理论熵值及数值实验

1.2.1 测试集的理论熵值

ZDT 测试集是 Zitzler 等人^[21]于 2000 年提出的,具有许多 Deb's Toolkit 中所描述的特性,包括不同的前沿形状(ZDT1 的前沿是凸的,而 ZDT2 的前沿是非凸的)、不连续问题(ZDT3)、多前沿问题(ZDT4)以及带偏好问题(ZDT6)。所有问题均是两目标的,由 f_1 、 g 、 h 三个函数构成,其形式为

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ & \text{subject to } f_1 = x_1 \\ & f_2 = g(x_2, \dots, x_m)h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) \\ & \text{where } x = (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

ZDT1 ~ ZDT4、ZDT6 五个问题的 PF_{true} 均为对应的 $g(x) = 1$,而

$$g(x) = \begin{cases} 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m-1) & \text{ZDT1-3} \\ 1 + 10(m-1) + \sum_{i=2}^m (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) & \text{ZDT4} \\ 1 + 9(\sum_{i=2}^m x_i / (m-1))^{0.25} & \text{ZDT6} \end{cases}$$

因此,为取得最优解,在决策空间中有

$$x_1 \in [0, 1], x_i = 0 (i=2, \dots, m)$$

按照式(1)给出的熵值计算方法,种群收敛到 PF 时的熵值,只与决策变量在第一维上的取值分布有关,此时,所有个体均聚集在前 K 个网格中,并且在这些网格中均匀分布。种群的理论熵值为

$$E = - \sum_{i=1}^K p_i \log p_i = -K \left(\frac{1}{K} \log \frac{1}{K} \right) = \log K \quad (2)$$

1.2.2 实验结果

为研究种群演化过程中的熵值特性采用 NSGA-II^[22] 算法对 ZDT 测试集进行实验。NSGA-II 中种群的规模 N 均设置为 1 000,进化代数设为 250 代,采用模拟二进制交叉算子,交叉概率为 0.9,变异采用多项式变异,变异的概率为 $1/n$ 。在每个 ZDT 测试问题上,算法独立运行 10 次,选取将每一维划分为三个区间,变量维数为 5、8、10 时的熵值曲线。

由式(2),在决策空间的每一维上划分三个区间,ZDT 问题在种群收敛时的理论熵值应为

$$E = \log K = \log 3 \approx 1.0986$$

图 1 和 2 中,图 1(a)(d)(g)、图 2(a)(d) 分别表示决策变量维数为 5 时 ZDT1 ~ ZDT4、ZDT6 的熵值曲线,图 1(b)(e)(h)、图 2(b)(h) 以及图 1(c)(f)(i)、图 2(c)(f) 分别表示 ZDT1 ~ ZDT4、ZDT6 决策变量维数为 8 和 10 时的熵值变化曲线图。图中横坐标为演化代数,纵坐标为种群的熵值。

对图 1 和 2 进行分析,可得出以下结论:

- 在演化初期,种群的熵值较大,随着演化的进行,种群的熵值逐渐减小,当演化进行到一定阶段后,该值趋于稳定;
- 对于 ZDT1、ZDT2、ZDT3 以及 ZDT4 这四个测试问题而言,种群收敛也即趋于稳定时的熵值在理论值 1.0986 附近,比较特殊的是 ZDT6,熵值曲线图上趋于稳定时的值在 0 附近;
- 比较图 1 和 2 中第 1 列(决策变量维数为 5),第 2 列(决策变量维数为 8)以及第 3 列(决策变量维数为 10)子图,可以明显改变决策空间的维数并不会影响种群趋于稳定时的熵值。

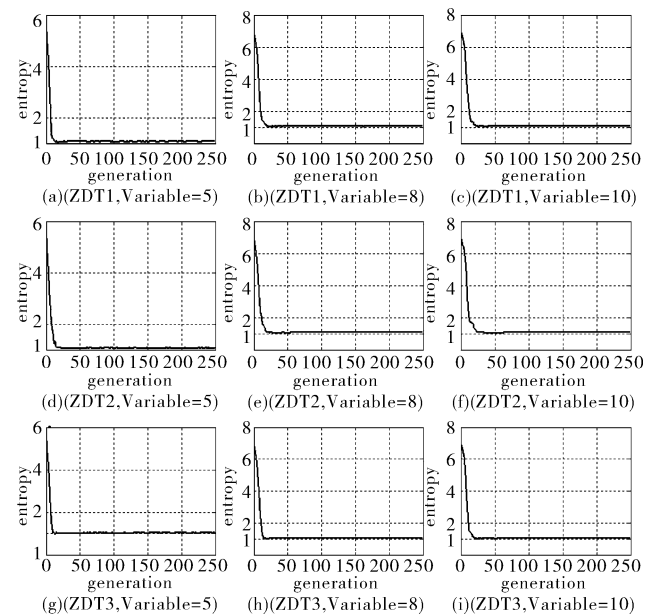


图 1 GridNum=3,ZDT1 ~ ZDT3 在决策变量维数为 5(第 1 列)、8(第 2 列)、10(第 3 列)时的熵值曲线图

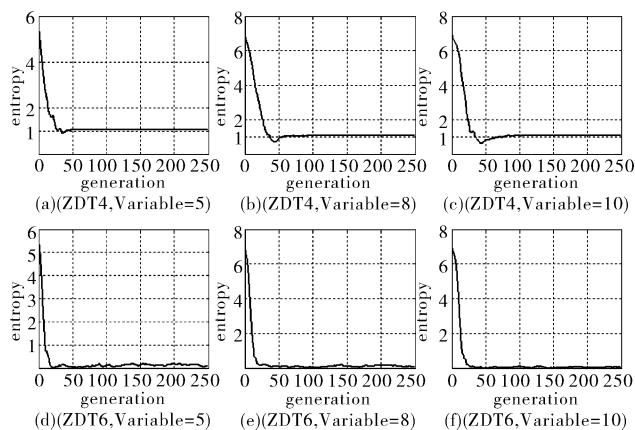


图2 GridNum=3, ZDT4, ZDT6 在决策变量维数为5(第1列)、8(第2列)、10(第3列)时的熵值曲线图

对于 ZDT6 的特殊值,本文选取决策变量维数为 5 时进行分析。由式(2)可知,种群收敛时的熵值由个体在决策空间中第一维上的取值决定。理论上个体应该是在 $[0, 1]$ 上均匀分布,所以种群的 PS 呈一维线性流形如图 3(a) 所示,而算法实际得到的种群的 PS 分布并不均匀,如该图 3(b) 中所示将 $[0, 1]$ 划分为三个区间时,统计得第一个区间中的个体占 98.6%,第二个区间中的个体占 1.4,此时种群的熵值为

$$E = -(0.986 \log 0.986 + 0.014 \log 0.014) \approx 0.032$$

因而实际得到的种群熵值同理论分析不一致。

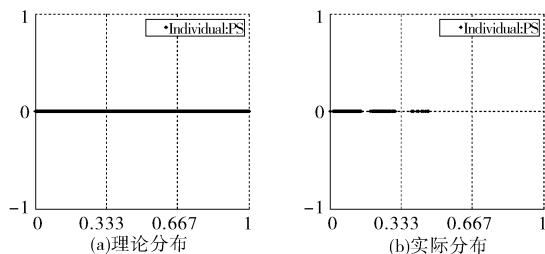


图3 ZDT6 问题种群在决策空间前两维中的分布

2 基于熵值的建模开始准则

2.1 多目标演化中的临界点

在基于概率模型的多目标演化算法中,对建模开始准则的研究是十分关键的。Zhou 等人提出了一种采用特征值关系来判定建模是否开始的方法,但该方法需要对每一代种群进行聚类分析,且只适用于两目标以及三目标的优化问题。实际上,建模开始点是演化种群分布开始形成一定规则的点,也即是种群的分布从无序到有序过渡的一个临界点。

定义2 多目标演化中临界点。在进化过程中种群的熵值曲线图上,满足

$$\frac{|E_c - E_{c-k}|}{k} < \varepsilon \quad (3)$$

的点 c 称为多目标演化的临界点。其中, E_c 为第 c 代进化群体的熵值, E_{c-k} 为第 $(c-k)$ 代种群的熵值, ε 是一常数。

多目标演化算法优化问题的过程中找到的临界点即是建模开始点,在该临界点之前,采用传统的遗传操作进行繁殖,越过该点之后,通过建模采样方法产生新的个体。

2.2 基于熵值建模开始准则的混合多目标算法流程

将此建模判定准则应用到 NSGA-II 同 RM-MEDA 的混合

中,形成的新算法 EB-MOEA 具体流程如下:

a) 初始化种群:令演化代数 $t=0$,随机初始化种群 $P(t)$ 。

b) 循环迭代:

(a) 根据熵值的计算方法求得当前种群 $P(t)$ 的熵值 $E(t)$;

(b) 若 $t > k$ 并且满足 $\frac{|E(t) - E(t-k)|}{k} < \varepsilon$ 采用 RM-MEDA 中的方法建立概率模型,采样产生新的种群 $P_s(t)$,否则运用 NSGA-II 中交叉、变异等演化策略产生新的种群 $P_s(t)$ 。

c) 选择:从 $P(t)$ 及 $P_s(t)$ 中选择出下一代个体 $P(t+1)$ 。

d) 算法停止:如果满足停止条件,则算法停止,否则 $t = t + 1$,转步骤 b)。

3 实验结果

NSGA-II 和 RM-MEDA 是演化多目标优化中两种具有代表性的算法,对于两目标测试问题除采用标准的 ZDT 测试集外,还采用其变种 ZDT.1^[11] (ZDT1.1、ZDT2.1、ZDT6.1) 以及 ZDT.2^[11] (ZDT1.2、ZDT2.2、ZDT6.2) 等测试函数,三目标测试函数,本文选取 DTLZ2、DTLZ2.1、DTLZ2.2^[11],将提出的混合算法 EB-MOEA 同 NSGA-II、RM-MEDA 进行实验对比,分析各自的性能。

对于两目标测试问题,三种算法中种群大小均设为 100,测试问题决策变量的维数 $n=30$ 。三目标测试问题的种群大小均设为 200,决策变量的维数 $n=12$,三种算法的运行代数均设为 100。NSGA-II 采用模拟二进制交叉以及多项式变异,交叉概率设为 0.9,变异概率为 $1/n$,RM-MEDA 中聚类个数取 5,训练 50 代,扩展概率取 0.25,混合算法中 k 设为 5, ε 取 0.1。算法采用 C++ 语言实现,测试环境为:CPU: Intel Pentium G630 2.7 GHz;内存:4 GB;操作系统:Windows 7;开发环境:Microsoft Visual Studio 2008。

为了评估解的收敛性以及分布的均匀性,本文采用 IGD 性能指标。相同条件下,优化解集的 IGD 评估指标值越小,说明算法的收敛性以及均匀性越好。NSGA-II、RM-MEDA 以及本文提出的 EB-MOEA 算法均在各测试问题上独立运行 30 次,统计出各算法解 IGD 评价指标的均值、方差如表 1~3 所示。

表1 ZDT 测试集的 IGD 指标均值(第1行)和方差(第2行)

Algorithm	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	ZDT6
NSGA-II	0.000141595 ± 3.68794e-012	0.000531319 ± 8.93032e-007	0.000768831 ± 5.36824e-006	0.00716484 ± 1.10065e-005	0.000898484 ± 5.92502e-006
RM-MEDA	0.00735474 ± 8.3734e-007	0.0160532 ± 1.60183e-005	0.0205962 ± 1.95937e-006	5.75391 ± 0.102225	0.189617 ± 5.83774e-005
EB-MOEA	0.000264749 ± 7.65634e-009	0.000191141 ± 3.00139e-009	0.000642041 ± 7.09321e-007	0.00633276 ± 8.39026e-005	0.00977484 ± 3.43522e-006

表2 ZDT 测试集变种的 IGD 指标均值(第1行)和方差(第2行)

Algorithm	ZDT1.1	ZDT2.1	ZDT6.1	ZDT1.2	ZDT2.2
NSGA-II	0.00807158 ± 2.84077e-006	0.0230925 ± 7.06667e-015	0.00947368 ± 1.81096e-008	0.0177246 ± 5.52395e-006	0.0175488 ± 7.67355e-008
RM-MEDA	0.000162687 ± 1.45605e-010	0.000172932 ± 5.602e-010	0.0932582 ± 6.80522e-005	0.000643503 ± 4.68654e-007	0.00202343 ± 4.03536e-006
EB-MOEA	0.000152057 ± 5.05999e-011	0.0230924 ± 1.08334e-034	0.00507544 ± 1.37255e-007	0.00494314 ± 2.58027e-005	0.0154242 ± 1.02138e-006

表 3 ZDT6.2、DTLZ2、DTLZ2.1、DTLZ2.2 的 IGD 指标均值(第 1 行)和方差(第 2 行)

Algorithm	ZDT6.2	DTLZ2	DTLZ2.1	DTLZ2.2
NSGA-II	0.00955772 ± 1.44217e-008	0.000536446 ± 4.93242e-010	0.0013537 ± 5.44876e-008	0.00234192 ± 3.29769e-007
RM-MEDA	0.0593737 ± 6.60532e-005	0.000617962 ± 8.84992e-010	0.000510294 ± 2.38059e-010	0.000576977 ± 6.52289e-010
EB-MOEA	0.00755194 ± 8.16747e-008	0.000599087 ± 5.21983e-010	0.000497334 ± 1.06792e-010	0.00055438 ± 3.9106e-010

由上述统计结果可以得出以下结论:

a)表 1 表明,对于标准的 ZDT 测试函数而言,NSGA-II 在 ZDT1、ZDT6 上性能最优,EB-MOEA 次之,RM-MEDA 性能最差,对于 ZDT2、ZDT3、ZDT4 而言,EB-MOEA 性能最优,NSGA-II 次之,RM-MEDA 的性能相对较差。

b)由表 2 和 3 可以看到,对于变种的 ZDT 测试问题,RM-MEDA 在 ZDT2.1、ZDT1.2、ZDT2.2 测试问题上性能表现最优,EB-MOEA 次之,NSGA-II 的性能相对较差,对于 ZDT1.1 本文提出的 EB-MOEA 性能最优,RM-MEDA 性能次之,NSGA-II 的性能相对较差,对于 ZDT6.1、ZDT6.2 这两个测试问题,EB-MODA 性能最优,NSGA-II 在 ZDT6.1 以及 ZDT6.2 上性能次之,RM-MEDA 的性能最差。

c)表 3 中数据表明,对于三目标测试问题,NSGA-II 在 DTLZ2 上性能最优,EB-MODA 次之,RM-MEDA 的性能相对较差,对于 DTLZ2.1 以及 DTLZ2.2,EB-MOEA 性能最优,RM-MEDA 性能次之,NSGA-II 的性能最差。

d)综上所述,本文提出的基于熵值判定准则的混合多目标算法 EB-MOEA 是有效的。

传统的多目标演化算法利用交叉、变异等遗传操作产生新的个体,在演化前期,收敛较快,而在后期变慢。基于概率建模的方法由于在演化前期缺少指导信息,产生的个体的搜索方向可能与实际搜索方向相差甚远。本文基于提出的熵值判定准则,将 NSGA-II 同 RM-MEDA 相结合产生的算法 EB-MOEA 理论上可以利用 NSGA-II 在演化前期找到的种群分布的规则性,建立概率模型,然后通过采样产生新的个体,利用两种方法各自的优势。但是通过表 1~3 三种算法在各个测试问题上的 IGD 指标可以看到,在 ZDT1、ZDT6、DTLZ2 以及 ZDT2.1、ZDT1.2、ZDT2.2 这几个问题上,本文的 EB-MOEA 算法性能并非最优,下面将对其进行分析。

表 1 及表 3 中数据表明,NSGA-II 在 ZDT1、ZDT6 以及 DTLZ2 上的 IGD 指标优于 EB-MOEA。从图 4~5 演化过程中 NSGA-II 同 RM-MEDA 分别求得的 ZDT1 测试问题的解集前三维在决策空间中的分布中可以看到,RM-MEDA 难以找到正确的主成分方向,而对于 NSGA-II,演化还未到收敛变慢的后期算法已经找到问题的最优解集,因此,EB-MOEA 算法的优势较难以体现(见电子版)。

由表 2 中的统计数据可以看到,对于 ZDT2.1、ZDT1.2、ZDT2.2 三个测试问题,RM-MEDA 算法的 IGD 指标优于 EB-MODA。结合图 6~7 NSGA-II 以及 RM-MEDA 求得的 ZDT1.2 测试问题的解集前三维在决策空间中的分布中可以看到,NSGA-II 只能搜索到部分最优解,通过这些解聚类、建模采样产生的子代不及随机生成的种群,图 7 中 RM-MEDA 在找到解集正确的特征方向后,收敛较快。在该种情况下,NSGA-II 演化得到的种群分布对于 RM-MEDA 的建模没有帮助,因此 EB-

MODA 的性能不及 RM-MEDA。

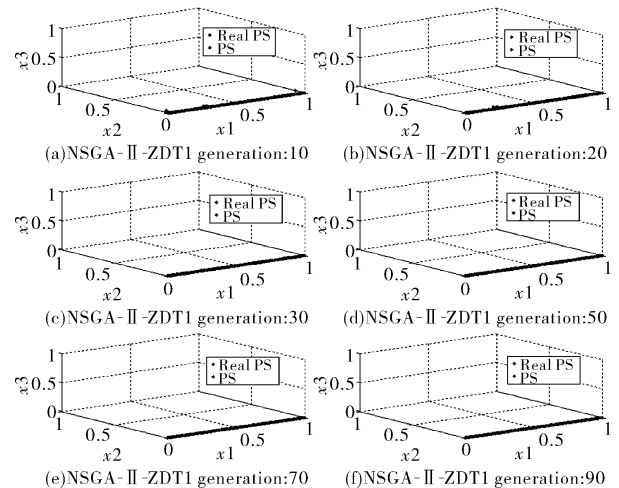


图 4 NSGA-II 算法求得的演化过程中 ZDT1 测试问题的解集在决策空间前三维中的分布

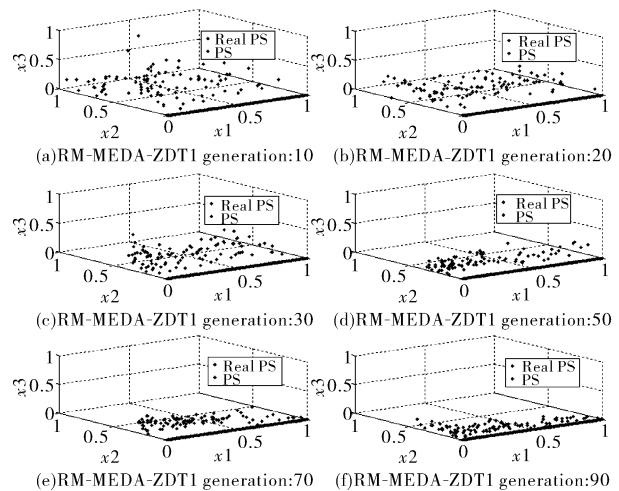


图 5 RM-MEDA 算法求得演化过程中 ZDT1 测试问题的解集在决策空间前三维中的分布

综上,在本文选取的 14 个测试函数中,基于熵值建模开始准则的混合算法在 8 个问题上的 IGD 性能指标最优,其余测试问题上,混合算法并没有取得预期的效果,这是由于 NSGA-II/RM-MEDA 本身对于求解这些问题的性能较优,不存在前文所述传统遗传操作在演化后期收敛停滞,RM-MEDA 中建模时难于找到正确的主成分方向等问题。当然,算法中参数的取值,例如用熵值定义临界点时 k 及 ε 的值,还有测试问题本身的特征等同算法的性能都是息息相关的。总体而言,本文提出的基于熵值判定准则的混合算法 EB-MOEA 能取得一个较优的结果,并非像 NSGA-II 在变种的 ZDT 测试问题上表现不佳,或者类似于 RM-MEDA 对于求解变量之间无关联的标准 ZDT 测试问题效果不佳。

4 结束语

本文将熵值理论引入到多目标演化的研究当中,定义了一种熵值计算方法。根据给定的计算方法分析了 ZDT 测试集种群收敛时的理论熵值,并采用 NSGA-II 算法进行实验,将得到的种群熵值同理论值进行对比分析,证明了所定义的熵值计算方法的有效性。此外,本文在熵值基础上,定义了多目标演化过程中的临界点。在临界点之前,采用传统的交叉、变异等传统遗传操作进行繁殖,在临界点之后,通过建立概率模型、采样

的方法产生新的个体。基于该熵值判定准则,本文提出了一种新的混合算法 EB-MOEA,采用 ZDT 测试集及其变种以及 DTLZ2、DTLZ2.1、DTLZ2.2 进行实验验证,并同 NSGA-II、RM-MEDA 进行数值比较,统计结果表明,EB-MOEA 在部分测试函数上有较好的表现。在其他的传统多目标演化算法同概率建模方法上使用建模开始准则进一步探究传统多目标演化算法同基于概率模型方法混合演化的有效性以及使用一些比较有针对性的测试问题进行测试是下一阶段的工作。

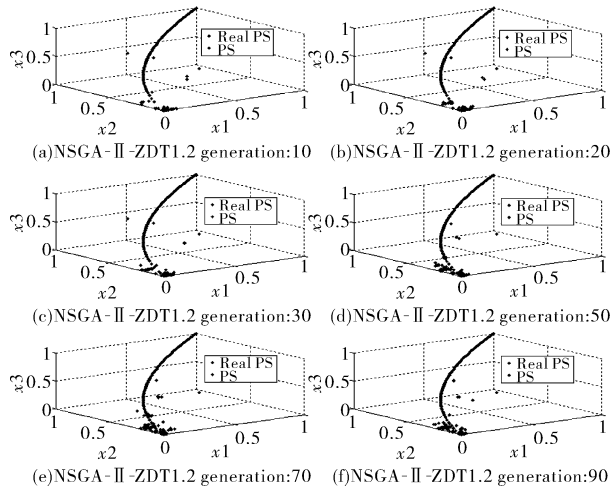


图6 NSGA-II 算法求得的演化过程中 ZDT1.2 测试问题的解集在决策空间前三维中的分布

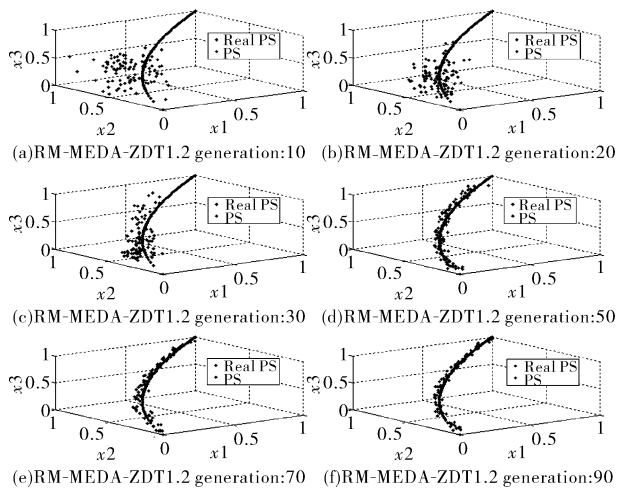


图7 RM-MEDA 算法求得的演化过程中 ZDT1.2 测试问题的解集在决策空间前三维中的分布

参考文献:

- [1] COELLOCOELLO C A. Evolutionary multi-objective optimization; a historical view of the field[J]. *Computational Intelligence Magazine*, 2006, 1(1): 28-36.
- [2] GONG Mao-guo, JIAO Li-cheng, YANG Dong-dong, *et al.* Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms[J]. *Journal of Software*, 2009, 20(2): 271-289.
- [3] 李艳芝. 基于模型多目标原理的星座优化算法设计[D]. 武汉: 中国地质大学(武汉), 2010.
- [4] OKABE T, JIN Yao-chun, SENDHOFF B, *et al.* Voronoi-based estimation of distribution algorithm for multi-objective optimization[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. 2004: 1594-1601.
- [5] BOSMAN P A N, THIENS D. The naive MIDEA: a baseline multi-objective EA[C]//Proc of the 3rd International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization EMO. 2005: 428-442.
- [6] DONG Wei-shan, YAO Xin. Unified eigen analysis on multivariate Gaussian based estimation of distribution algorithms[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(15): 3000-3023.
- [7] LAUMANN M, OCENASEK J. Bayesian optimization algorithms for multi-objective optimization[C]//PPSN VII Proc of the 7th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. 2002: 298-307.
- [8] PELIKAN M, SASTRY K, GOLDBERG D. Multiobjective hBOA clustering, and scalability[C]//Proc of Conference on Genetic and Evolutionary Computation. 2005: 663-670.
- [9] ZHOU Ai-min, ZHANG Qing-fu, JIN Yao-chu, *et al.* A model-based evolutionary algorithm for bi-objective optimization[C]//Proc of Congress on Evolutionary Computation. 2005: 2568-2575.
- [10] ZHOU Ai-min, JIN Yao-chu, ZHANG Qing-fu, *et al.* Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization; using a convergence criterion[C]//Proc of Congress on Evolutionary Computation. 2006: 3234-3241.
- [11] ZHANG Qing-fu, ZHOU Ai-min, JIN Yao-chu. RM-MEDA: a regularity model-based multiobjective estimation of distribution algorithm[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2008, 12(1): 41-63.
- [12] ZHOU Ai-min, ZHANG Qing-fu, JIN Yao-chu. Approximating the set of Pareto optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5): 1167-1189.
- [13] ZHOU Ai-ming, QU Bo-yang, LI Hui, *et al.* Multiobjective evolutionary algorithm; a survey of the state of the art[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 32-49.
- [14] MO Li, DAI Guang-ming, ZHU Jian-kai. The RM-MEDA based on elitist strategy[C]//Proc of the 5th International Conference on Advances in Computation and Intelligence ISICA. 2010: 229-239.
- [15] 张冬梅, 龚小胜, 戴光明. 基于多重分形主曲线模型多目标演化算法研究[J]. *计算机研究与发展*, 2011, 48(9): 1729-1739.
- [16] 郑金华. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [17] OCENASEK J. Entropy-based convergence measurement in discrete estimation of distribution algorithms[M]//Towards a New Evolutionary Computation; Advances in the Estimation of Distribution Algorithms. 2006: 39-50.
- [18] WANG Yao-nan, WU Liang-hong, YUAN Xiao-fang. Multiobjective self-adaptive difference evolution with elitist archive and crowding entropy-based diversity measure[J]. *Soft Computing*, 2010, 14(3): 193-209.
- [19] QIN Yu-fang, JI Jun-zhong, LIU Chun-nian. An entropy-based multiobjective evolutionary algorithm with an enhanced elite mechanism[J]. *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, 2012, 2012: Article No. 17.
- [20] WANG Lin-lin, CHEN Yun-fang. Diversity based on entropy; a novel evaluation criterion in multi-objective optimization algorithm[J]. *Intelligent Systems and Applications*, 2012, 4(10): 113-124.
- [21] ZITZLER E, DEB K, THIELE L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms; empirical results[J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195.
- [22] DEB K, PRATAP A, MEYARIVAN T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.