

# 交通网络中线圈布局优化的支撑树算法<sup>\*</sup>

何胜学

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘要:** 从图的拓扑特征角度出发,提出了一种解决交通网络线圈布局优化问题的支撑树算法。新方法首先通过网络超级变换使得流量守恒条件在变换后网络的所有节点上均成立,再通过分析一般支撑树的拓扑特征,从而得到一种解决全网观测最小线圈集位置确定问题的图论方法。新方法具有如下特点:a)避免了复杂的数学分析与运算;b)揭示了安装线圈路段的网络拓扑结构;c)利用支撑树多样性的优势,可提供多种优化布局方案。最后通过算例验证了该方法的合理性与实用性。

**关键词:** 线圈布局; 支撑树; 流量守恒; 路段可检测性

**中图分类号:** U491; TP301

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-3695(2013)12-3576-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.12.014

## Spanning tree approach to solve network sensor location problems

HE Sheng-xue

(Business School, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** From a perspective of topology, this paper proposed a spanning tree approach to solve the network sensor location problems. The new approach transformed the original traffic network to a network with only one virtual centroid. The flow conservation condition held at every node in the transformed network. Through analyzing the properties of spanning tree, it presented the new method to identify sensor locations for whole link flow inference. The new method has following features: a) avoiding the complex algebraic analysis and computation; b) uncovering the topological property of links installed sensors; c) the variety of spanning trees of a connected graph supplies multiply location schemes. At last, it gave a numerical example to illustrate the rationality and practicability of the new method.

**Key words:** sensor location; spanning tree; flow conservation; link observability

感应线圈检测器出现于20世纪60年代,是高速公路和城市交通道路监控系统中不可缺少的组成部分。它主要是通过数据采集向监控系统提供道路交通流信息(包括交通流量、车速、行程时间、车道占有率以及车流密度等参数),从而为监控中心分析、判断、发布交通信息和调整交通控制方案提供数据支持。因此,感应线圈在智能交通领域发挥着极其重要的作用。但受到投资额和其他条件限制,在实际规模交通网络的所有路段上都安装线圈一般不太现实,因此研究线圈的优化布局就显得十分必要。

研究者对于利用线圈数据估计OD矩阵的线圈布局优化问题已进行了大量的深入研究。例如Bianco等人<sup>[1]</sup>提出在节点处设置分流比率来确定路段流量信息,进而估计OD矩阵;Gan等人<sup>[2]</sup>利用路段使用率矩阵来估计OD矩阵问题;Yang等人<sup>[3]</sup>提出利用屏栅线来优化线圈布局 and 确定设置在分散OD对间的检测站数量的最小值;Castillo等人<sup>[4,5]</sup>研究了路网流量的可检测性问题(这一问题是OD需求预测的子问题,要解决这一问题,需要关联路段和OD流量矩阵<sup>[6,7]</sup>或者基础OD需求矩阵<sup>[8]</sup>以及一些交通分配方法下的路径选择性<sup>[9]</sup>);Gentili等人<sup>[10,11]</sup>建议使用带有计数功能的识别板来提供更多的路段流量信息,但是由于基础交通数据的匮乏以及新技术的不成熟限制了这些研究在实际中的应用。同时,线圈数据也广泛应用于旅行时间可靠性分析中<sup>[12-15]</sup>。最近,Hu等人<sup>[16]</sup>研究了在

路网中布设最少数量线圈的优化布局问题,即网络线圈优化布局问题(network sensor location problems, NSLP)。其研究中利用的是路段—路径关联矩阵。但是在大规模的实际路网中列举所有可能的有效路径是很难的,并且由于可能的人为误差,最后得到的结果只能达到次优。为了避免列举路径这样繁琐的工作,Ng<sup>[17]</sup>改用节点—路段关联矩阵,从而避免了枚举路径的问题。但是这两种代数方法由于操作的复杂性和不直观特征,很难应用于较大规模的现实交通路网。

针对线圈优化布局问题,本文从图论角度出发,充分利用支撑树网络拓扑结构直观易懂的特点,既不建立任何代数模型,也不需要基础OD数据和列举路径,尝试给出一种解决线圈布局优化问题的简洁算法。

### 1 交通网络变换

在交通网络中,出行起点和讫点叫做形心点,其他的节点叫做非形心点或普通节点。假设网络中除了形心点外,不存在度为1或0的节点(节点 $v$ 的度是与该节点相关联的路段数目)。为了更好地利用节点的流量守恒方程,以及各形心点处交通需求的平衡关系(即总的出行产生量与总的出行吸引量相等关系),本文通过改进了交通网络,使得改进后的网络中只含有一个虚拟的形心点。该虚拟形心点代表了网络中所有的形心点。

**收稿日期:** 2013-02-27; **修回日期:** 2013-04-10 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(71171135);上海市(第三期)重点学科资助项目(S30504);上海市教委科技创新资助项目(10YS105);上海市一流学科建设资助项目(S1201YLXX)

**作者简介:** 何胜学(1976-),男,陕西三原人,副教授,博士,主要研究方向为超级网络、交通网络建模(lovellhe@126.com)。

下面是添加虚拟小区形心点的方法。首先,如果在起点 $o$ 处仅有向外发散的路段,那么将这些路段的起点 $o$ 转为虚拟形心点,但不改变其流量方向;然后将 $o$ 从网络中删除。进一步而言,如果由该起点向外发散的路段数目大于1,为了附带获得该起点处的出行产生量,在把该起点转变为虚拟形心点之后,需要统计与其相关联路段上的流量。同样的方法也可以用于汇点,在此不再赘述。

在某些交通网络中,一个节点可能既是起点又是汇点,因此在该节点处既有发散的又有汇聚的路段。如果只有一条发散和一条汇聚路段,可以将这两条路段的端点与虚拟的形心点相连;或者增加两条不同方向的路段来连接该节点与虚拟小区形心点。以上做法有助于附带获得出行产生量和出行吸引量。

在只含有一个虚拟形心点的交通网络中,所有节点处都可以应用流量守恒方程。网络的上述变换将简化对后续线圈布局问题的分析,使得问题的处理更具有一般性。

本文假设所研究交通网络都是连通的且不存在回路(回路在这里指只有一个端点的路段)。显然该假设在现实中总是可满足的。

## 2 针对 NSLP 的支撑树算法

### 2.1 树的特征

在只含有一个虚拟形心点的交通网络中,如果与某一节点相关联的路段中只有一条路段的流量未知,那么通过流量守恒条件可确定该未知流量。如果能依次在每个节点处应用流量守恒,一步一步获得各条路段上的流量信息,直至最后获取所有路段的流量信息,那么本文的全网路段流量观测问题即得以解决。事实上在网络中的确存在一种能够快速实现上述过程的结构,这种结构就是支撑树。

**定义1** 当一个图中不存在非平凡回路时,可称其是无回路的。一个无回路的连通图称为树。图 $G$ 的支撑树是包含了 $G$ 的每一个节点的无回路连通子图。

**定理1** 任何一个树如果其节点数大于1,那么这些节点中至少包含一个节点度为1的节点。

**证明** 假设 $T$ 是任意一个节点数大于1的树,考虑下面的算法:

- a) 在 $T$ 中选取一个节点 $v$ ,假设 $e$ 是节点 $v$ 处的一条路段。
- b) 当节点 $v$ 的度大于1时,重复(a)~(c):
  - (a) 选择 $e'$ 作为节点 $v$ 处的一条路段,并且 $e' \neq e$ ;
  - (b) 令 $v'$ 为路段 $e'$ 的另一个端点;
  - (c) 令 $e' = e, v' = v$ 。

由于 $T$ 的节点数目有限且不存在回路,上述算法一定会停止迭代,最终结束;此时就找到了一个节点度为1的节点。

**定理2** 对于任意一个节点数大于1的树,将度为1的节点及与其关联的路段删除后,该树的余图仍是树。

**证明** 设 $T$ 是任意一个节点数大于1的树,将度为1的节点及与其关联的路段删除后,不会改变剩余节点的连接属性,该树的余图还保持连通性。根据树的定义,该树的余图仍满足树的定义。

**定理3** 如果图 $G$ 是个连通图, $C$ 是图 $G$ 中的任意一个回路,删除 $C$ 中的一条路段,图 $G$ 仍是连通的<sup>[18]</sup>。

**定理4** 每一个连通图都有支撑树。

**证明** 设图 $G$ 是连通图,如果 $G$ 不含回路,那么 $G$ 本身是一个树,从而 $G$ 是它自身的一个支撑树;如果 $G$ 含回路,任取

一个回路 $C_1$ 。通过定理3可知从 $C_1$ 中任意去掉一条边,得到图 $G$ 的子图是连通的。如果这个子图中不存在回路,那么其就是支撑树;如果这个子图中仍存在回路,那么至少存在一个回路 $C_2$ ,从 $C_2$ 中任意去掉一条边,得到图 $G$ 的子图仍是连通的。重复上述步骤,直到最后得到的子图 $T$ 中不含回路。因为在这一过程中并没有删除图 $G$ 的节点,所以 $T$ 包含了 $G$ 的每一个节点,因此 $T$ 是 $G$ 的一个支撑树。

### 2.2 支撑树算法步骤

基于以上理论,针对如下问题:a)在能够推断出未安装线圈路段流量的前提下,确定需要安装线圈的路段集合并且使之包含的路段数最少;b)通过已经安装的线圈,推断未安装线圈路段上的流量,本文提出如下支撑树算法。

针对 NSLP 的支撑树算法的具体步骤如下:

a) 为只含有一个虚拟形心点的交通网络构建一个支撑树,将支撑树中所包含的路段标记为“不需要安装线圈的路段”,将其余的路段标记为“安装线圈的路段”。注:由于只含有一个虚拟形心点的交通网络是连通的,根据定理4,该网络有支撑树,因此所有构建支撑树的方法在该网络中都适用。在能够获取全部路段流量信息的前提下,上述标记安装线圈的路段集合包含路段数目最小。

b) 搜索支撑树或该支撑树的余图,令 $S$ 是度为1的节点的集合(根据定理1,集合总是存在的)。重复执行下属操作:

(a) 如果 $S$ 是空集,则算法终止;如果 $S$ 不是空集,则需要进行如下步骤:从 $S$ 中任意选取一个节点 $v$ ,在节点 $v$ 处,应用流量守恒计算出属于该支撑树并与节点 $v$ 相关联路段的流量或支撑树的余图中流量未知路段的流量。

(b) 从集合 $S$ 和支撑树(或支撑树的余图)中同时删除节点 $v$ ,并从支撑树(或支撑树的余图)中删除连接节点 $v$ 与支撑树(或支撑树的余图)的路段。如果此时集合 $S$ 不是空集,返回(a);否则,再次搜索支撑树(或支撑树的余图)找到一个新的集合 $S$ ,然后进入(a)。

注:由定理2可知该支撑树的余图仍是树,因此可以不断更新找到新的集合 $S$ ,直至推断出所有路段的流量。

### 2.3 支撑树算法性质

**定理5** 存在一个安装线圈数量最少的路段集合,基于该集合中的路段检测流量可推测出网络全部路段的流量,但是该路段集合并不唯一。

**证明** 由定理4可知,只含一个虚拟形心点的交通网络是连通的,因此该网络有支撑树。根据支撑树算法,支撑树的余图所包含的路段就构成了安装线圈的路段集合(路段数最少),由此存在性得证。从只含一个虚拟形心点的交通网络的构建过程可知必然存在一条由连接原始网络的一OD对的一条路径(路段的起讫点可能变为了虚拟形心点)和可能新增的虚拟路段(与上述路径相连)构成的回路。由定理4的证明可知,在回路中选择不同的路段进行删除,从而可以得到不同的支撑树,由此解的多样性得证。

**定理6** 在只含有一个虚拟形心点的交通网络中,分别用 $m$ 和 $n$ 表示路网中的路段数和节点数。在满足可推测出全部路段流量的条件下,路网中需要安装线圈的路段数最少为 $m - n + 1$ 条,不需要安装线圈的路段数最多为 $n - 1$ 条。

**证明** 给定正整数 $i$ ,任意一个含有 $i$ 个节点的树都包含 $i - 1$ 条路段<sup>[14]</sup>。由于支撑树包含了交通网络(这里指只含一个虚拟形心点的交通网络)中的所有节点,并且有 $n - 1$ 条路

段,如果增加任意一条路段到支撑树中,则至少形成一个回路;如果将回路中所有路段的流量都增加或减少一定量,那么在所有节点处流量守恒条件依然成立,但是这将使得一部分路段的流量无法被推断出来。因此不需要安装线圈的路段数最多为  $n-1$  条。又因为该交通网络中有  $m$  条路段,因此在能够推断出全部路段流量的前提下,需要安装线圈的路段数最少为  $m-n+1$  条。

**定理7** 路段流量的整数性质。如果已安装线圈路段上的流量是整数,则利用这些已安装的线圈能推断出来的其余路段上的流量也是整数。

**证明** 根据支撑树算法,利用流量守恒来逐个计算未安装线圈路段的流量。可知如果检测到的路段流量是整数,那么推断出来的路段流量也一定是整数。

**定理8** 对于图中任何一个由度大于或等于2的节点组成的连通子图(回路),其路段流量是无法确定的。

**证明** 将连通子图分成两类:第一类是由度等于2的节点构成;第二类是由度大于或等于2的节点构成,并且至少有一个节点的度大于2。

假设  $C$  是任意一个属于第一类且至少含有两个节点的子图,考虑下面的算法:

- a) 从  $C$  中选择一条路段  $e$ , 令  $v$  和  $v'$  是  $e$  的两个端点。
- b) 当  $v$  和  $v'$  不相同, 重复步骤(a) ~ (c):
  - (a) 选择与  $v$  相关联的路段  $e'$ , 并且  $e \neq e'$ 。
  - (b) 令  $v'$  是路段  $e'$  的另一个端点。
  - (c) 令  $e = e', v = v'$ 。

该算法最终一定会终止,因为子图  $C$  是连通的且节点的个数是有限的。当算法终止时,包含了  $C$  中所有节点的一个回路就出现了。事实上这个回路就是  $C$  本身。如果回路  $C$  中每条路段的流量均增加或减少一定量,由于流量守恒在所有节点处仍然成立,因此第一类子图的路段流量都是无法确定的。

对于第二类子图,当利用节点流量守恒条件时,易知未知数数目大于方程数目,因此根据线性方程理论可知问题的解不唯一。这里方程数对应节点数目,未知数对应网络的路段数目。

### 3 算例分析

图1所示的网络为鱼骨型网络<sup>[12]</sup>。该网络中包含了4个小区形心点、18条路段和10个节点。节点1和2是出行起点,节点9和10是出行终点。应用本文提出的方法对该网络进行改进,使改进后的鱼骨形网络仅含有一个小区形心点,并且标号为11,如图2所示,该网络中包含18条路段和7个节点。

对于基本的 NSLP 问题, Hu 等人<sup>[16]</sup> 提出不需要安装线圈的路段是 6、8、12、14、16、18, 其余的路段上则需要安装线圈。最近 Ng<sup>[17]</sup> 提出了不同的方案, 他认为路段 1、2、4、9、11、15 也可以是不需要安装线圈的路段。显然无论是 Hu 还是 Ng 提出的方案, 每个方案中不需要安装线圈的路段集合都可以构成图2所示的网络支撑树。这证实了上文提出的结论, 也充分表明了利用支撑树算法可以得到不同的安装策略。

对于图2所示的网络, 根据定理6, 为了能够检测出全部路段的流量, 安装线圈的路段数最少应为  $18-7+1=12$  条。由于一般连通图存在众多的支撑树, 因此可以灵活地给出布局方案, 使其满足一定的要求。例如, 要求节点对间存在双向路段连接时, 只能有一个方向安装线圈。可以通过画出支撑树的办法方便地给出两个布局方案。第一个方案中无须安装线圈

的路段集合为  $\{1, 5, 7, 9, 13, 15\}$ , 第二个方案无须安装线圈的路段集合为  $\{4, 6, 8, 14, 15, 16\}$ 。

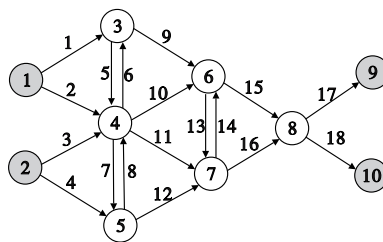


图1 鱼骨网络

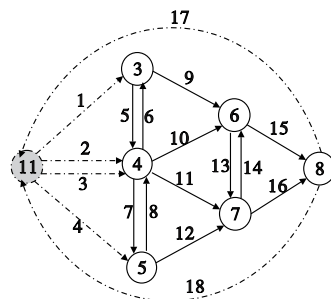


图2 变换后只含有一个虚拟形心点的鱼骨网络

### 4 结束语

道路交通流信息为交通管理部门改善、优化道路交通提供了实际的参考资料,而感应线圈作为能够提供路段流量信息的重要工具之一越来越受到重视。以往针对感应线圈布局的研究是将其视为 OD 需求预测的子问题,很难体现其自身的特点,多是运用线性代数中的矩阵运算方法,很少涉及安装线圈路段的网络拓扑特性。本文从图论的角度,将支撑树理论应用于线圈布局优化,简化了以往研究,既利用了支撑树网络拓扑结构直观易懂的特点,又发挥了支撑树多样性的优势。新方法有效地揭示了安装线圈路段的网络拓扑特性,也为交通管理部门提供了多种线圈优化布局。本文提出的方法也可以应用到其他领域,如 OD 矩阵估计、路径流量估计、路面管理、紧急疏散规划以及动态交通分配等。

#### 参考文献:

- [1] BIANCO L, CONFESSORE G, REVERBERI P. A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates[J]. *Transportation Science*, 2001, 35(1): 50-60.
- [2] GAN Li-ping, YANG Hai, WONG S C. Traffic counting location and error bound in origin-destination matrix estimation problems[J]. *Transportation Engineering*, 2005, 131(7): 524-534.
- [3] YANG Hai, ZHOU Jing. Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation[J]. *Transportation Research Part B*, 1998, 32(2): 109-126.
- [4] CASTILLO E, MENENDEZ J M, JIMENEZ P. Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations[J]. *Transportation Research Part B*, 2008, 42(5): 455-481.
- [5] CASTILLO E, GALLEG0 I, SANCHEZ-CAMBRONERO S, et al. Matrix tools for general observability analysis in traffic networks[J]. *IEEE Intelligent Transportation Systems*, 2010, 11(4): 799-813.
- [6] CASTILLO E, CONEJO A J, PRUNEDA R E, et al. Observability in linear systems of equations and inequalities: applications[J]. *Computers and Operations Research*, 2007, 34(6): 1708-1720.

数据量较大时,两种算法在识别率上差别不是太大,在训练数据较小时 RPEM 算法的识别效果要明显比传统 EM 算法好,这主要是由于数据量较大时特征向量之间相互混叠,使得 RPEM 算法也不能够十分准确地描述数据的分布,所以其识别率并没有太大的提高;但当训练数据量较小时,数据间的混叠相对较小,易于 RPEM 算法的聚类运算,所以此时 RPEM 算法取得了相对传统 EM 算法更好的识别性能。BRPEM 算法虽然在训练时间上比 RPEM 算法减少了很多,但是由于它们在方差的更新上都没有沿着似然函数的梯度上升方向,所以训练模型参数可能并非使似然函数达到最大值的最优参数,而改进的 BRPEM 算法则克服了前两种算法的这一缺点。从实验结果上看,其训练效果要好于前两种算法。

b)从模型的训练时间上看,传统 EM 算法训练单个 GMM 所用的平均时间最短,改进的批处理 RPEM 算法相对于 RPEM 算法极大地提高了训练效率,这是因为传统 EM 算法训练时采用使似然函数极大化各参数的直接迭代表达式,每次迭代只需计算该表达式的值就能完成参数的更新,而 RPEM 和改进的批处理 RPEM 算法训练时采用梯度上升的搜索算法使似然函数最大,初始参数的设置(如学习率、批处理数据的个数、高斯模型的初始参数等)往往会使 RPEM 算法在迭代过程中产生一些振荡,从而需要更多的迭代次数,对其收敛速度的影响很大。改进的 BRPEM 算法采用了数据的批处理方法,不仅极大地减少了运算量,同时把方差的更新改为沿着似然函数梯度上升的方向,更加快了算法的收敛速度,提高了算法收敛的稳定性,所以改进的批处理算法取得了比 BRPEM 更高的训练效率。

#### 4 结束语

本文实验结果表明,改进后的 BRPEM 算法不仅提高了说话人识别的识别率,还极大地缩短了 RPEM 算法的运算时间;同时改进后的算法相对于传统 EM 算法在训练时间相差不大的情况下提高了说话人识别的识别率,说明了算法的有效性。但初始参数  $\eta_\beta$  和  $\eta$  在训练时不能根据训练情况实时调整也是本文工作的不足之处。笔者将在下一步把参数的自适应调整

引入到本文的工作中来,以提高训练的效率和效果。

#### 参考文献:

- [1] KOMLEN D, LOMBAROVIC T, OGRIZEK-TOMAS M, *et al.* Text independent speaker recognition using LBG vector quantization[C]//Proc of the 34th International Convention. Croatia; MIPRO, 2011: 1652-1657.
- [2] REYNODLS D, ROSE R. Robust text-independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models[J]. *IEEE Trans on Speech and Audio Processing*, 1995, 3(1): 72-83.
- [3] CAMPBELL W, CAMPBELL M, GLEASON T J P, *et al.* Speaker verification using support vector machines and high-level features[J]. *IEEE Trans on Audio, Speech, and Language Processing*, 2007, 15(7): 2085-2094.
- [4] TAN Jian-ding, TING Hua-nong. Malay speaker identification using neural networks[C]//Proc of International Conference on Information Science and Technology. 2011: 476-479.
- [5] MINAEI-BIDGOLI B, TOPCHY A, PUNCH W F. A comparison of resampling methods for clustering ensembles[C]//Proc of International Conference on Artificial Intelligence. 2004: 939-945.
- [6] CHEUNG Y M. Maximum weighted likelihood via rival penalized EM for density mixture clustering with automatic model selection[J]. *IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering*, 2005, 17(6): 750-761.
- [7] CHEUNG Y M, ZENG Hong. Feature weighted rival penalized EM for Gaussian mixture clustering: automatic feature and model selections in a single paradigm[C]//Proc of International Conference on computational Intelligence and Security. 2007: 633-638.
- [8] MATZA A, BISTRITZ Y. Speaker recognition with rival penalized EM training[C]//Proc of IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing. 2011: 1-6.
- [9] ZHANG Dan, CHEUNG Y M. A batch rival penalized EM algorithm for Gaussian mixture clustering with automatic model selection[C]//Proc of the 2nd International Conference on Rough Set and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2007: 252-259.
- [10] CUMMINS F, GRIMALDI M, LEONARD T, *et al.* The CHAINS corpus: characterizing individual speakers[C]//Proc of SPECOM. 2006: 431-435.
- [11] CASTILLO E, CONEJO A J, MENENDEZ J M, *et al.* The observability problem in traffic network models[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2008, 23(3): 208-222.
- [12] CASTILLO E, MENENDEZ J M, SANCHEZ-CAMBRONERO S. Traffic estimation and optimal counting location with path enumeration using Bayesian networks [J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2008, 23(3): 189-207.
- [13] CASTILLO E, JIMENEZ P, MENENDEZ J M, *et al.* The observability problem in traffic models: algebraic and topological methods [J]. *IEEE Trans on Intelligent Transportation Systems*, 2008, 9(2): 275-287.
- [14] GENTILI M, MIRCHANDANI P B. Locating active sensors on traffic networks[J]. *Annals of Operations Research*, 2005, 136(1): 229-257.
- [15] CASTILLO E, JIMENEZ P, MENENDEZ J M, *et al.* A ternary-arithmetic topological based algebraic method for networks traffic observability [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(11): 5338-5354.
- [16] LO H K, LUO X W, SIU B W Y. Degradable transport network: travel time budget of travelers with heterogeneous risk aversion[J]. *Transportation Research Part B*, 2006, 40(9): 792-806.
- [17] CHEN A, YANG Hai, LO H K, *et al.* Capacity reliability of a road network: an assessment methodology and numerical results [J]. *Transportation Research Part B*, 2002, 36(3): 225-252.
- [18] NG M W, WALLER S T. A computationally efficient methodology to characterize travel time reliability using the fast Fourier transform[J]. *Transportation Research Part B*, 2010, 44(10): 1202-1219.
- [19] NG M W, SZETO W Y, WALLER S T. Distribution-free travel time reliability assessment with probability inequalities [J]. *Transportation Research Part B*, 2011, 45(6): 852-866.
- [20] HU Shou-ren, PEETA S, CHU C. Identification of vehicle sensor locations for link-based network traffic applications [J]. *Transportation Research Part B*, 2009, 43(8-9): 873-894.
- [21] NG M W. Synergistic sensor location for link flow inference without path enumeration: a node-based approach [J]. *Transportation Research Part B*, 2012, 46(6): 781-788.
- [22] EPP S S. Discrete mathematics with applications[M]. London: Thomson Learning, 2004.

(上接第 3578 页)