

离散高阶分布式一致性算法^{*}

彭焕新^{1,2}, 戚国庆², 盛安冬²

(1. 南京工业职业技术学院 机械系, 南京 210046; 2. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 为了提高分布式一致性算法的收敛速度, 提出了一种离散高阶分布式一致性算法。该算法通过单跳通信, 利用二跳邻接节点的前多步信息来加速分布式一致性算法的收敛速度。对无向通信拓扑下该算法的收敛性能和收敛速度, 以及带通信延时的该算法的收敛性能进行了分析和仿真比较, 结果显示, 该算法在满足条件下能收敛到初始状态的平均值, 与同样利用二跳邻接节点信息的算法相比, 具有通信量小, 收敛速度更快的特点, 但是能容忍的通信延时变小。

关键词: 分布式一致性; 多智能体系统; 延时; 高阶

中图分类号: TP274 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)09-2700-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.09.035

Discrete-time high-order distributed consensus algorithm

PENG Huan-xin^{1,2}, QI Guo-qing², SHENG An-dong²

(1. Dept. of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Industry Technology, Nanjing 210046, China; 2. School of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: In order to improve the convergence rate of distributed consensus algorithms, this paper proposed a discrete-time high-order distributed consensus algorithm. The new high-order algorithm utilized the previous state values of two-hop adjacency nodes to accelerate the convergence rate based on single-hop communication. The convergence performance and convergence rate of the discrete-time high-order distributed consensus algorithm were analyzed under undirected networks, meanwhile, it analyzed the discrete-time high-order distributed consensus algorithm with communication time-delay. It provided the simulation results to verify these analytical results, the results show that an average consensus can be reached under a certain condition, the convergence rate of the high-order algorithm is superior to those consensus algorithms, but the time-delay is smaller than the other algorithms utilizing the information of two-hop adjacency nodes.

Key words: distributed average consensus; multi-agent system; time-delay; high-order

0 引言

近年来,多智能体系统的分布式一致性问题在许多领域应用广泛,已经引起了许多研究人员的兴趣^[1-9]。分布式一致性通常指分布式平均一致性,即所有节点状态能到达初始状态的平均值。在文献[1,2]中,Olfati-Saber等人基于一阶算法为分布式一致性问题建立了一套理论框架。收敛速度是分布式一致性算法的重要研究内容,特别是对于大规模复杂系统。文献[1]根据谱图论和拉普拉斯矩阵理论,指出分布式一致性收敛速度由网络的拓扑结构和局部加权系数确定,收敛速度取决于网络拓扑图的代数连通性(algebraic connectivity)。提高分布式一致性算法的收敛速度,关键是提高网络拓扑图的代数连通性。目前,提高分布式一致性算法的收敛速度主要有优化网络拓扑结构^[10,11]、优化加权系数^[12],以及节点间采用不同通信方式等方法^[13-16]。这些方法虽然能在较大程度上提高一致性算法的收敛速度,但是也存在一些不足。优化网络拓扑结构能大大提高网络拓扑图的代数连通性,但是对于已经给定的通信网络拓扑结构则无能为力,同时,必须事先知道整个网络拓扑结构;优化加权系数方法必须事先知道整个通信网络拓扑结

构;采用不同的通信方式方法的缺点是必须采用特定的通信方式。

上述分布式一致性算法主要通过单跳通信,利用邻接节点的状态来进行自身节点状态的更新。为了提高分布式一致性算法的收敛速度,文献[14]提出采用多跳中继通信(multi-hop delay communication)方法,利用非邻接节点的状态进行自身节点状态的更新。由于每个节点获得的节点信息增加,因此这种方法很大程度上提高了分布式一致性算法的收敛速度。但是,多跳中继通信方式复杂,多跳中继通信要求每个采样间隔进行多次中继通信,增加了通信要求和通信成本,对中继节点的通信负载较重。文献[17]首先提出了伪二跳分布式一致性算法,该算法通过单跳通信,利用二跳邻接节点的信息来进行节点状态更新。与二跳算法相比,伪二跳分布式一致性算法由于采用单跳通信,通信方式简单,通信量大大减少,收敛速度与二跳算法的收敛速度相当。为了进一步提高分布式一致性算法的收敛速度,文献[17]在伪二跳算法基础上提出了伪多跳分布式一致性算法,该算法通过单跳通信,利用多跳邻接节点的信息来进行节点状态更新。伪多跳算法相对于伪二跳算法收敛速度大大提高,但同时通信量也大大增加。

收稿日期: 2013-01-18; **修回日期:** 2013-03-07 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61104186);江苏省智能传感器网络工程技术研究中心开放基金资助项目(401050611ZK111)

作者简介: 彭焕新(1973-),男,湖南涟源人,博士研究生,主要研究方向为非线性滤波、数据融合(penghx@niit.edu.cn);戚国庆(1977-),男,副研究员,博士,主要研究方向为非线性滤波、数据融合;盛安冬(1964-),男,研究员,博导,主要研究方向为满意控制。

为了提高分布式一致性算法的收敛速度,同时减少节点间的通信量,在伪二跳分布式一致性算法的基础上,提出了一种离散高阶分布式一致性算法。该算法通过单跳通信,利用二跳邻接节点的前多步信息进行节点状态的更新。

1 离散高阶分布式一致性算法

首先介绍本文要用到的一些相关概念。无向拓扑图 $G = (V, E)$ 代表带 n 个节点的多智能体系统的通信拓扑,节点集 V 内的元素代表智能体,边集 E 的元素代表智能体之间的通信连接。节点 $i, j \in V$, 用 $(i, j) \in E$ 表示边,边的前后节点分别称为边的头与尾。与节点 i 相连,且头为 i 的边数的和,称为节点 i 的出度,即 $\deg_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$; 与节点 i 相连,且尾为 i 的边数的和,称为节点 i 的入度,即 $\deg_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ 。如果每个节点的出度等于其入度,则称该图是平衡图。无向图是平衡图。路径是指有序节点集 $(1, 2, \dots, m)$, 其任意相邻的两个节点所构成的边 $(i, j) \in E$ 。如果图 G 的任意两个节点间都存在一条路径相连,两节点分别为路径的头与尾,则图 G 是连通的。对于节点 i , 所有满足 $(i, j) \in E$ 的节点的集合称为 i 的邻接节点集,用 N_i 表示节点 i 的邻接节点集,邻接节点集的元素为节点 i 的邻接节点。 $A = \{a_{ij}\}$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} \neq 0 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}$, L 分别为 $G = (V, E)$ 对应的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵,设 $\hat{G} = (V, \hat{E})$ 为二跳通信拓扑^[17], $\bar{A} = \{\beta_{il}\}_{n \times n}$, $\bar{L}$ 分别为二跳通信拓扑的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵:

$$L = \Delta - A, \Delta = \text{diag} \{ \sum_j a_{ij} \}. \bar{A} = \{\beta_{il}\} = \begin{cases} \sum_j a_{ij} a_{jl} & i \neq l \\ 0 & i = l \end{cases}, \bar{\Delta} = \text{diag} \{ \sum_l \beta_{il} \}, \bar{L} = \bar{\Delta} - \bar{A}.$$

本文提出一种新的离散高阶分布式一致性算法,节点间通过单跳通信进行信息交换,对于无向通信拓扑 $G = (V, E)$, 每个节点将其状态值和状态派生值传送给邻接节点。离散高阶分布式一致性算法可以写成

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij} \{ (x_i(k) - x_j(k)) + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-1) - y_j(k)) + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-2) - y_j(k-1)) + \dots + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-m+1) - y_j(k-m+2)) \} \quad (1)$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_j(k) \quad (2)$$

其中: $x_i(k)$ 是节点 i 在 k 时刻的状态值, $y_i(k)$ 是节点 i 在 k 时刻的状态派生值, ε 是采样间隔。离散高阶分布式一致性算法中,节点将 k 时刻的自身状态值和状态派生值传送给邻接节点,而节点在 $k-1, k-2$ 等时刻的状态值和状态派生值已经分别在 $k-1, k-2$ 等时刻传送给邻接节点,并保存在邻接节点中,因此,在 k 时刻,节点 j 需要传送的信息只有 $x_j(k), y_j(k)$ 两个值。离散高阶分布式一致性算法与文献[17]中的伪二跳分布式一致性算法的通信量相同、计算量相同,远小于伪多跳分布式一致性算法的通信量,计算量也比伪多跳分布式一致性算法的计算量小。

2 动态分析

2.1 收敛性分析

将式(2)代入式(1),可以得到

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij} \{ (x_i(k) - x_j(k)) + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} ((x_i(k-1) - x_l(k-1)) + \dots + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-m+1) - x_l(k-m+1))) \} \quad (3)$$

写成向量形式:

$$x(k+1) = (I_n - \varepsilon L)x(k) - \varepsilon \gamma Lx(k-1) - \dots - \varepsilon \gamma Lx(k-m+1) \quad (4)$$

其中: $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$ 。

定义 $X(k+1) = [x(k+1)^T, x(k)^T, \dots, x(k-m+2)^T]^T$

$$H = \begin{bmatrix} I - \varepsilon L & \dots & -\varepsilon \gamma L & -\varepsilon \gamma L \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

其中: $K = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ 是 n 维向量。式(4)可写成

$$X(k+1) = HX(k) \quad (5)$$

设初始条件 $X(0) = [x(0)^T, x(-1)^T, x(-2)^T, \dots, x(-m+1)^T]^T$, $x(0)^T = x(-1)^T = x(-2)^T = \dots = x(-m+1)^T$ 。有下列引理:

引理1 除了矩阵 H 的特征值 1, 即 $\lambda(H) = 1$ 被矩阵 $H - J$ 的 0 特征值, 即 $\lambda(H - J) = 0$ 取代之外, 矩阵 $H - J$ 与矩阵 H 有相同的特征值。

证明 引理的证明与文献[18, 19]的证明类似, 在这里不再详细证明。

定理1 当无向通信拓扑 G 为连通拓扑, 且矩阵 $H - J$ 的谱半径 $\rho(H - J) < 1$, 则离散高阶分布式一致性算法能收敛到初始状态的平均值, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T x(0)$ 。

证明 无向通信拓扑 G 为连通拓扑, 且矩阵 $H - J$ 的谱半径 $\rho(H - J) < 1$, 则根据引理1可知, 矩阵 H 有唯一值为 1 的特征值, 其他特征值的模小于 1。定义向量 w_r, w_l 分别为矩阵 H 的特征值 1 所对应的左右特征向量, 由于 G 为无向连通拓扑, 所以矩阵 $L, \bar{L}$ 为行和与列和都等于 0 的矩阵, 从而满足 $w_l^T H = w_l^T, H w_r = w_r, w_r^T w_l = 1$, 其中 $w_r = \frac{1}{n} [1^T, \dots, 1^T]^T, w_l = [1^T, 0^T, \dots]^T, \mathbf{1} = [1 \dots 1]^T$ 与 $\mathbf{0} = [0 \dots 0]^T$ 是 n 维向量。从式(5)可以得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} HX(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} H^{k+1} X(0) = w_r w_l^T X(0), \text{ 即}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T x(0). \text{ 证毕。}$$

2.2 收敛速度分析

根据文献[1]可知, 分布式一致性算法的收敛速度取决于网络拓扑图的代数连通性, 因此, 当离散高阶分布式一致性算法收敛, 其收敛速度由矩阵 H 的第二最大特征值或矩阵 $H - J$ 的谱半径 $\rho(H - J) < 1$ 决定。矩阵 H 的第二最大特征值的计算比较困难, 本文对离散高阶分布式一致性算法的收敛速度采用一种比较简单的方法粗略地与伪二跳算法^[17]的收敛速度进行比较。离散高阶分布式一致性算法可以写成

$$x(k+1) = (I_n - \varepsilon \gamma L - \varepsilon \gamma L - \dots - \varepsilon \gamma L)x(k) + \varepsilon \gamma L[x(k) - x(k-1)] + \dots + \varepsilon \gamma L[x(k) - x(k-m+1)] \quad (6)$$

当离散高阶分布式一致性算法收敛, 在有限步后, $\|x(k) - x(k-1)\|_2 \rightarrow 0, \|x(k) - x(k-2)\|_2 \rightarrow 0, \dots, \|x(k) - x(k-m+1)\|_2 \rightarrow 0$, 其中, $\|\cdot\|_2$ 指向量的 2 范数。从而可以近似地得到

$$x(k+1) \approx (I - \varepsilon L - \varepsilon \gamma L - \dots - \varepsilon \gamma L)x(k) = (I - \varepsilon L - (m-1)\varepsilon \gamma L)x(k) \quad (7)$$

将式(7)与文献[17]的伪二跳算法作比较可以发现,离散高阶分布式一致性算法的收敛速度可以近似地由矩阵 $I - \varepsilon L - (m-1)\varepsilon\gamma\bar{L}$ 的第二最大特征值决定。在离散高阶分布式一致性算法收敛的前提下,当 $(m-1) > 1$,离散高阶分布式一致性算法的收敛速度要快于伪二跳一致性算法的收敛速度。

2.3 带通信延时的收敛性分析

当智能体之间的通信存在延时,分布式一致性算法的收敛性通常会变差。下面分析离散高阶分布式一致性算法在带延时的通信拓扑下的收敛性能。设每条通信连接的延时相同,为 τ ,则带通信延时的离散高阶分布式一致性算法可以写成

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij} \{ (x_i(k-\tau) - x_j(k-\tau)) + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-1-2\tau) - y_j(k-\tau)) + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-2-2\tau) - y_j(k-1-\tau)) + \dots + \gamma \sum_{l \in N_j} a_{jl} (x_i(k-m+1) - y_j(k-m+2)) \} \quad (8)$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_j(k-\tau) \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),写成向量形式:

$$x(k+1) = x(k) - \varepsilon Lx(k-\tau) - \varepsilon\gamma\bar{L}x(k-1-2\tau) - \dots - \varepsilon\gamma\bar{L}x(k-m+1-2\tau) \quad (10)$$

对于带通信延时的分布式一致性算法的收敛性分析,可以采用时域中的 Lyapunov 方法,对于离散的带延时系统,要求其特征值都位于单位圆内,系统才会一致性收敛。从式(10)可以得到

$$zx(k) = x(k) - \varepsilon Lz^{-\tau}x(k) - \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+1)}x(k) - \dots - \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+m-1)}x(k) \quad (11)$$

从式(11)可以推出

$$(z - 1 + \varepsilon Lz^{-\tau} + \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+1)} + \dots + \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+m-1)})x(k) = 0 \quad (12)$$

其特征方程等于

$$\det(I + \frac{\varepsilon Lz^{-\tau} + \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+1)} + \dots + \varepsilon\gamma\bar{L}z^{-(2\tau+m-1)}}{z-1}) = 0 \quad (13)$$

显然,如果式(13)所示特征方程的根除了一个根等于 1,其余根都位于单位圆内,则当无向拓扑 G 连通时,带通信延时的离散高阶分布式一致性算法能收敛到初始状态的平均值。

从式(13)可以看出,要计算出离散高阶分布式一致性算法收敛所能容忍的最大通信延时比较困难。为了简单起见,本文不具体计算离散高阶分布式一致性算法保持收敛所能容忍的最大通信延时,而是与二跳分布式一致性算法所能容忍的最大通信延时进行比较。

当式(10)收敛在有限步后, $\|x(k-\tau) - x(k-1-\tau)\|_2 \rightarrow 0$, $\|x(k-2\tau) - x(k-2-2\tau)\|_2 \rightarrow 0, \dots, \|x(k-2\tau) - x(k-m+1-2\tau)\|_2 \rightarrow 0$, 其中, $\|\cdot\|_2$ 指向量的 2 范数。从而式(10)可以近似地得到

$$x(k+1) = x(k) - \varepsilon Lx(k-\tau) - \varepsilon\gamma\bar{L}x(k-2\tau) - \dots - \varepsilon\gamma\bar{L}x(k-2\tau) = x(k) - \varepsilon Lx(k-\tau) - \varepsilon(m-1)\gamma\bar{L}x(k-2\tau) \quad (14)$$

从式(14)可以看出,当参数 $\gamma = 0$ 时,离散高阶分布式一致性算法就等于文献[1]所示的一阶分布式一致性算法;当 $\gamma = 1/(m-1)$ 时,离散高阶分布式一致性算法就等于文献[14]中的二跳算法。因此,当 $0 \leq \gamma \leq 1/(m-1)$,离散高阶分布式一致性算法收敛所能容忍的最大通信延时介于一阶算法和二跳算法所能容忍的最大通信延时之间;当 $\gamma > 1/(m-1)$,则离散高阶分布式一致性算法能容忍的最大通信延时小于二跳算法所能容忍的最大通信延时。

从上述分析可以看出,参数 γ 反映了利用二跳邻接节点的程度,当 $\gamma = 0$,完全没有利用二跳邻接节点的信息,这时离散

高阶一致性算法就是一阶一致性算法。 γ 值越大,利用二跳邻接节点信息越多,因此离散高阶一致性算法收敛速度越快,但是当通信拓扑存在延时,所能容忍的最大延时也越小。因此,当智能体存在通信延时,应该在收敛速度与能容忍最大延时之间进行平衡,选择适当的参数 γ 。

3 仿真

为了验证离散高阶分布式一致性算法在无向通信拓扑中的一致收敛性以及收敛速度,采用图 1、2 所示的无向规则拓扑图 G_1 和无向随机拓扑图 G_2 进行仿真, G_1 和 G_2 都是无向连通拓扑图。若无特别说明,选择采样间隔 $\varepsilon = 0.02$ s, $\gamma = 1$ 。每条边的值 $\{a_{ij} | (i, j) \in E\}$ 取值为 1。节点初始值为 1~50 的随机值,通过 500 次蒙特卡洛方法进行仿真。

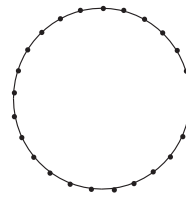


图 1 无向规则拓扑图

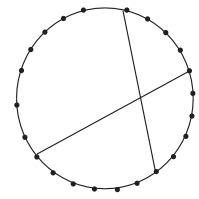


图 2 无向随机拓扑图

图 3 是离散三阶分布式一致性算法在通信拓扑 G_1 下的收敛性,图 4 是离散四阶分布式一致性算法在通信拓扑 G_2 下的收敛性。从图 3、4 可以看出,当参数 ε, γ 满足使矩阵 $H - J$ 的谱半径小于 1,则离散高阶分布式一致性算法收敛,反之则发散。

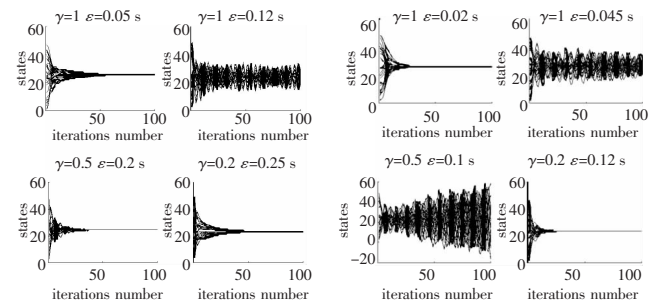


图 3 无向规则拓扑下离散高阶算法的收敛性

图 4 无向随机拓扑下离散高阶算法的收敛性

图 5、6 是离散三阶、四阶分布式一致性算法 (其中 $\gamma = 1$) 与一阶算法、伪二跳算法在通信拓扑 G_1, G_2 下的收敛速度比较。从图 5、6 可以看出,离散三阶、四阶分布式一致性算法的收敛速度远快于一阶算法、伪二跳算法的收敛速度,其中离散四阶分布式一致性算法的收敛速度最快。

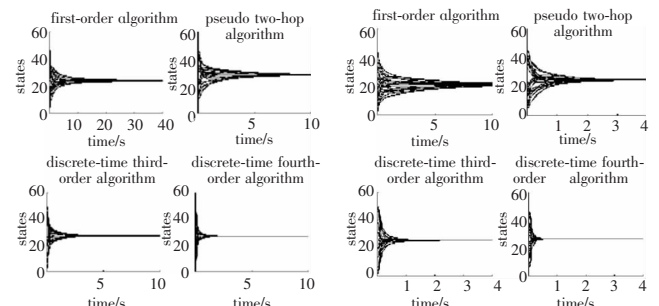


图 5 无向规则拓扑下四种算法的收敛速度比较

图 6 无向随机拓扑下四种算法的收敛速度比较

图 7、8 是在带通信延时下,离散四阶分布式一致性算法的收敛性。从图 7、8 可以看出,当通信延时在一定范围内,离散高阶分布式一致性算法能够收敛;当 γ 值越小,离散高阶分布式一致性算法能容忍的通信延时也越大。

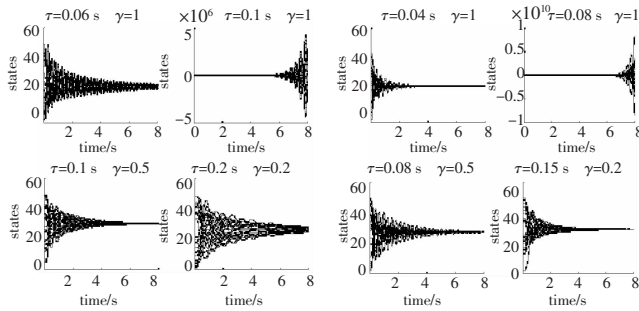


图7 无向规则拓扑下带延时的离散高阶算法的收敛性

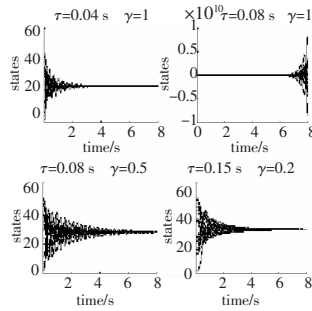


图8 无向随机拓扑下带延时的离散高阶算法的收敛性

4 结束语

本文提出了离散高阶分布式一致性算法,该算法通过利用二跳邻接节点前多步信息来加速一致性算法。当满足一定条件,离散高阶分布式一致性算法能收敛到初始状态的平均值。离散高阶分布式一致性算法在不增加通信量的前提下,其收敛速度大大高于相同条件下的伪二跳一致性算法收敛速度。当存在通信延时,离散高阶分布式一致性算法存在延时累计的现象,可以通过选择较小的参数 γ 来提高其在通信延时情况下的稳定性。

参考文献:

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [2] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215-233.
- [3] ZHANG Ya, TIAN Yu-ping. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(4): 939-943.
- [4] BOYD S, GHOSH A, PRABHAKAR B, *et al.* Gossip algorithms: design, analysis and applications [C]//Proc of IEEE INFOCOM. 2005: 1653-1664.
- [5] MATHUR R, SHARMA M K, MISRA A, *et al.* Energy-efficient deployment of distributed mobile sensor networks using fuzzy logic systems [C]//Proc of International Conference on Advances in Computing, Control, & Telecommunication Technologies. 2009: 121-125.
- [6] AYSAL T C, ORESHKIN B N, COATES M J. Accelerated distributed average consensus via localized node state prediction [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2009, 57(4): 1563-1576.
- [7] FRANCESCHELLI M, GIUA A, SEATZU C. Distributed averaging in sensor networks based on broadcast gossip algorithms [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2011, 11(3): 808-817.
- [8] RAJAGOPAL R, WAINWRIGHT M J. Network-based consensus averaging with general noisy channels [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2011, 59(1): 373-385.
- [9] THANOU D, KOKIOPOULOU E, PU Y, *et al.* Distributed average consensus with quantization refinement [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(1): 194-205.
- [10] OLFATI-SABER R. Ultra-fast consensus in small-world networks [C]//Proc of American Control Conference. Pasadena, CA: IEEE Press, 2005: 2371-2378.
- [11] JIN Z P, MURRAY R M. Random consensus protocol in large-scale networks [C]//Proc of the 46th Conference on Decision and Control. New Orleans: IEEE Press, 2007: 4227-4232.
- [12] XIAO Lin, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(1): 65-78.
- [13] AYSAL T C, YILDIZ M E, SARWATE A D, *et al.* Broadcast gossip algorithms for consensus [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2748-2761.
- [14] JIN Zhi-pu, MURRAY R M. Multi-hop relay protocols for fast consensus seeking [C]//Proc of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006: 1001-1006.
- [15] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph laplacian [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116-120.
- [16] REN Wei, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10-11): 1002-1033.
- [17] 彭焕新, 戚国庆, 盛安冬. 伪多跳中继分布式一致性算法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(5): 623-628.
- [18] YANG W, ANDREA L, BERTOZZI I, *et al.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay [C]//Proc of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2008: 2926-2931.
- [19] MEYER C D. Matrix analysis and applied linear algebra [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

(上接第2699页)匹配问题转换为基于边映射表的连接问题,并有效地提高了匹配过程的效率。但是该算法还存在以下一些需要改进的地方:a)本文提出的算法大大增加了存储需求,从搜索步的构造到映射表的建立,都需要存储大量的中间结果,因此需要构建更有效的存储结构;b)实验选择的匹配标准是“精确标记匹配”,但是对其他一些匹配标准,如关系匹配、层级概念序列匹配和相似度匹配等还没有提供实验证明。下一步工作是研究这些匹配标准对应的映射方法,然后提供利用该匹配算法的实验结果。

参考文献:

- [1] KETKAR N S, HOLDER L B, COOK D J. Subdue: compression-based frequent pattern discovery in graph data [C]//Proc of the 1st International Workshop on Open Source Data Mining. New York: ACM Press, 2005: 71-76.
- [2] CORDELLA L, FOGGIA P, SANSONE C, *et al.* A sub graph isomorphism algorithm for matching large graphs [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 26(10): 1367-1372.
- [3] 代印唐. 基于语义网络的知识协作关键技术的研究 [D]. 上海: 复旦大学, 2009.
- [4] 黄云, 洪佳明, 覃遵跃. 大型网络中近似子图匹配研究 [J]. *计算机工程*, 2012, 38(18): 50-52.
- [5] 陶松桥, 黄正东. 基于属性邻接图匹配的装配图模型搜索方法 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2011, 2(3): 25-27.
- [6] 解春欣, 汪卫. 子网同构验证算法 OES [J]. *计算机工程*, 2011, 37(3): 94-97.
- [7] 马帅, 曹洋, 沃天宇, 等. 社会网络与图匹配查询 [J]. *计算机学会通讯*, 2012, 8(4): 78-81.
- [8] 张治, 施鹏飞. 一种有效的贪婪模式匹配算法 [J]. *计算机研究与发展*, 2007, 44(11): 1903-1911.
- [9] BUNKE H. Graph matching: theoretical, foundations, algorithms and applications [J]. *IEEE Trans on Paml*, 2009, 3(9): 504-519.
- [10] 魏国辉, 杨春德, 谭军. DNA 计算机中图的深度优先搜索遍历算法 [J]. *计算机工程*, 2008, 34(15): 102-104.
- [11] 赵宏伟, 张海龙, 刘萍萍, 等. 基于表象式语义网络的图匹配算法 [J]. *吉林大学学报*, 2008, 11(S1): 35-37.