反问题的 Landweber 迭代法及其应用研究进展*

王兵贤[a,b]，胡康秀[b]，王泽文[a,b]
(东华理工大学 a. 核资源与环境省部共建国家重点实验室培育基地；b. 理学院，南昌 330013)

摘 要：基于 Landweber 迭代法在研究反问题中的广泛应用,综述了国内外关于 Landweber 迭代法用于反问题求解的研究现状、基本理论与相关结论,介绍了 Landweber 迭代在一些领域,特别是计算机图像重建等方面的应用,并简要提出了关于 Landweber 迭代法今后的一些研究方向。

关键词：反问题；Landweber 迭代法；龙格—库塔方法；稳定性
中图分类号：TP305 **文献标志码**：A **文章编号**：1001-3695(2013)09-2583-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.09.005

Advances in research in Landweber iterate method for inverse problems and its application

WANG Bing-xian[a,b], HU Kang-xiu[b], WANG Ze-wen[a,b]
(*a. State Key Laboratory Breeding Base of Nuclear Resources & Environment, b. College of Science, East China Institute of Technology, Nanchang* 330013, *China*)

Abstract: This paper introduced studies of domestic and foreign researchers in Landweber iterative method for inverse problems. It overviewed the fundamental theory and conclusion of Landweber iterative method for inverse problems and introduced the application in some areas, especially in image restoration. It put forward briefly some research directions of Landweber iterate method in the future.

Key words: inverse problems; Landweber iterative method; Runge-Kutta method; stability

近年来,反问题已经成为应用数学领域迅速发展的一门理论,在医疗、物理、信号探测等方面有着重要的应用。数学中的几乎所有领域都可以提出反问题。而反问题提法的正确性、其求解方法,以及它的稳定性问题都是微分方程反问题研究的主要方向。数学家 Hadamard 在 1923 年针对偏微分方程的定解问题提出了适定性的概念。适定性的概念主要包括解的存在性、唯一性和稳定性,三者缺一不可。而反问题最显著的特性就是不适定性和非线性性[1]。对于非线性不适定反问题的研究要求应用一些特殊的正则化方法。目前,对于线性不适定问题正则化理论已经相当完备,但是对于非线性不适定问题的正则化理论还有很多问题没有解决。目前应用最多的有 Tiknonov正则化方法和迭代法。在迭代法中,Landweber 迭代法因其良好的稳定性具有很高的研究价值。

1 Landweber 迭代法

1.1 Landweber 迭代法基本原理

1951 年,Landweber[2] 首次提出了解决线性问题的 Landweber 迭代法。考虑算子方程 $T(x)=y, x\in X, y\in Y$,大部分的反问题都可写成这种格式,Landweber 等人改写为 $x=(I-aT^*T)x+\alpha T^*y, a>0$。反复迭代此方程,即

$$x^0=0, x^m=(I-aT^*T)x^{m-1}+\alpha T^*y \quad m=1,2,\cdots$$

这一迭代算法可以看成是求解二次泛函 $x\to\|Tx-y\|^2$ 的最速下降法。Landweber 迭代法的迭代次数越多,精度也越高,但要想方法稳定,迭代次数就要尽可能的少,因此要选取一个恰当的正则化参数 α,才可以得到一种精度又高、稳定性又好的方法。如果 m 表示迭代的停止指标,则可选择正则化参数 $\alpha=1/m$。另外 Morozov 偏差原则是典型的停止法则。

1.2 反问题的 Landweber 迭代法

非线性性和不适定性是反问题最显著的特性。最初对于 Landweber 正则化都是通过对初始条件加以限定或者在特殊的 Hilbert 空间中讨论其收敛性与收敛速度。1994 年,Tautenhahn[3] 分别讨论了存在扰动误差 δ 和不存在扰动误差两种情况下连续的 Landweber 方法的收敛性。当 $\delta\neq0$ 时,通过求解初值问题:

$$x^{\delta}(t):=T'(x^{\delta}(t))^*[y^{\delta}-T(x^{\delta}(t))] \quad 0<t\leqslant T, x^{\delta}(0)=x_0 \quad (1)$$

可获得解 x^* 的正则化估计值 $x^{\delta}(T)$,这里 T 起到正则化参数的作用。如果用步长为 1 的 Euler 法离散式(1),就是经典的 Landweber 迭代法:

$$x_{k+1}^{\delta}=x_k^{\delta}-T'(x_k^{\delta})^*[T(x_k^{\delta})-y^{\delta}] \quad k=0,1,2,\cdots$$

1995 年,Hanke 等人[4] 证明了 Landweber 迭代法的收敛性,且 Scherzer[5] 提出了解决非线性问题的 Landerweber 迭代法的收敛标准。

定理 1 如果算子 T 满足:

(a)非线性条件

$$\|T(x)-T(\tilde{x})-T'(x)(x-\tilde{x})\|\leqslant\eta\|T(x)-T(\tilde{x})\| \quad \eta<1/2 \quad (2)$$

(b)有界性条件

收稿日期：2013-01-22；**修回日期**：2013-03-21 **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(NSFC10861001,NSFC11161002)
作者简介：王兵贤(1978-),男,甘肃民勤人,讲师,硕士,主要研究方向为数学物理反问题、数学模型算法分析与设计(wbxhkx@163.com)；胡康秀(1978-),女,副教授,硕士,主要研究方向为超越数论、算法分析与设计；王泽文(1974-),男,教授,博士,主要研究方向为数学物理反问题等.

$$\|T'(x)\| \leqslant 1 \quad x \in \beta_\rho(x_0),T'\text{为} T \text{的 Fréchet 导数} \tag{3}$$

且 $T(x)=y$ 在领域 $\beta_{\rho/2}(x_0)$ 中可解，那么 x_k 收敛于方程 $T(x)=y$ 的解 $x^* \in \beta_{\rho/2}(x_0)$。如果 $x^\dagger$ 代表与 x_0 相距最近的唯一解，且对 $x \in \beta_\rho(x_0)$，$N(T'(x^\dagger)) \subset N(T'(x))$（$N$ 表示算子的核空间），那么 x_k 收敛于 $x^\dagger$。通常方程 $T(x)=y$ 右端的光侧数据 y 会受到一定程度的误差扰动，只能获得扰动数据 y^δ，且满足 $\|y-y^\delta\| \leqslant \delta$，结合定理 1 中条件，有以下结论：

定理 2 假设定理 1 的条件成立，如果 y^δ 满足 $\|y-y^\delta\| \leqslant \delta$，且按照 Morozov 偏差原则，即对于停止指标 k_*，使得当 $0 \leqslant k \leqslant k_*$，有

$$\|y^\delta - T(x^\delta_{k_*})\| \leqslant \tau\delta \leqslant \|y^\delta - T(x^\delta_{k_*})\|$$

其中 τ 是依赖于 η 的正数，即 $\tau > 2\dfrac{1+\eta}{1-2\eta}$ 终止迭代，则有

$$x_{k_*}(\delta) \to x^*,\delta \to 0$$

1998 年，Hettlich[6] 对于入射波逆散射问题，研究了通过散射场的远场模式的测量来实现障碍物的重构，用 Landerweber 解决反问题的非线性性和不适定性。2000 年，Neubauer[7] 推导了 Landweber 迭代在 Hilbert 尺度下的收敛率，并用有限维空间估计无限维空间，且给出了有限维估计的收敛性估计，他将 $T'(x^\delta_k)^*: X \to Y$ 中 X 用 X_s 来代替，其中 X_s 为 X 的子空间，且 X_s 中的范数比 X 中的范数强，即以更强的范数来提高收敛速度，则 Hilbert 尺度下的迭代方程为

$$x^{\delta,n}_k = x^{\delta,n}_{k-1} + L^{-2s}T'(x^\delta_{k-1})) \quad k=1,2,\cdots$$

2001 年，Jin 等人[8] 主要研究了 Landweber 迭代法有限维估计，设 X 为有限维空间，引进集合序列 $\{X_n\}$，满足 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$，且 $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X$，$D(T)$ 非空，设 P_n 是从 X 到 X_n 的正交投影，且对于所有的 n，$C_n := D(T) \cap X_n \neq \varnothing$，则对于 $x^{\delta,n}_0 = P_n x_0$，有以下迭代格式：

$$x^{\delta,n}_k = P_n T'(x^{\delta,n}_{k-1} - y^\delta) \quad k=1,2,\cdots$$

并将原有的终止原则修正，提出了新的终止原则，有以下结论：

定理 3 给定常数 c_1、c_2、τ，满足 $c_1,c_2>0$ 且 $\tau \geqslant 1$，设 $k_0(\delta,n)$ 为满足 $k_0(\delta,n) \leqslant (c_1\delta + c_2\gamma_n)^{-2}$ 的最大整数，则：(a) 选择 $k(\delta,n)$ 作为第一个整数，满足 $k(\delta,n) \leqslant k_0(\delta,n)$ 且 $\|T(x^{\delta,n}_{k(\delta,n)}) - y\delta\| \leqslant \delta\tau$；(b) 如果找不到满足上述条件的 $k(\delta,n)$，则选择 $k(\delta,n)=k_0(\delta,n)$，进而在某些条件下可得到收敛性、收敛率及伪最优化估计。

2 修正的 Landweber 迭代法

在 Landweber 迭代法中，算子 T 的 Fréchet 导数在计算中占有较大的分量。1995 年，Scherzer 将非线性条件减弱，提出了一个修正的 Landweber 迭代法，而后又在 1998 年，Scherzer[9] 在原有迭代法的基础上引入了一个修正项，提出了一个修正的 Landweber 迭代法：

$$x^\delta_{k+1} = x^\delta_k + T'(x^\delta_k)^*(y^\delta - T(x^\delta_k)) - \alpha_k(x^\delta_k - \zeta) \quad k=0,1,\cdots \tag{4}$$

并指出在适当的终止收敛准则下，若 T 满足定理 1 中非线性条件式(2)和有界性条件式(3)，则修正 Landweber 迭代式(4)是收敛的。当算子 T 是 Fréchet 可导的，又 Lipschitz 是连续的，且满足源条件 $x^* - \zeta = T'(x^*)^*\omega$，则获得修正 Landweber 式(4)的收敛速度为 $O(k^{-\psi/2})$，ψ 为 0 与 1 之间的任意常数。

2003 年，Kügler[10] 针对一类椭圆型方程：

$$(q(z_{xx}+vz_{yy}))_{xx} + (q(z_{yy}+vz_{xx}))_{yy} + (qz_{xy})_{xy} = f \quad (x,y) \in \Omega \subset R^2$$

的参数 $q=q(x,y)$ 识别问题，利用 Scherzer 的修正的 Landweber 迭代法的特殊结构，提出一个无导数的 Landweber 迭代法：

$$q^\delta_{k+1} = q^\delta_k + \lambda L(q^\delta_k)^*(z^\delta - u_{q^\delta_k})$$

并通过与正问题有关的假设条件，证明了方法的收敛性。

2004 年，Chapkoa 等人就 Landweber 迭代和高斯—牛顿迭代求解一类抛物型方程边界值反问题进行了比较。为了加快 Landweber 迭代法的收敛速度。2007 年，Xu 等人[11] 将萨马斯基技巧应用到 Landweber 迭代法中，得到了修正的 Landweber 迭代法：

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + T'(x_k)^*[y - T(x_{k,i})]$$

$$i=0,1,\cdots,m-1;x_k = x_{k,0};x_{k+1} = x_{k,m};k=0,1,\cdots$$

通过数值算例表明与经典的 Landweber 迭代法相比，运行时间更短。Li 等人[12] 也在 2007 将式(1)用 R 级 Runge-Kutta 方法离散，利用二级 Gauss 型显方法，提出了 Runge-Kutta(R-K) 型 Landweber 迭代法。特殊地，取二阶 Gauss 型显格式离散式(1)，当误差水平 $\delta=0$ 时，则有

$$x^{k+1} = x^k - T'(x^k - \frac{1}{2}T'(x^k)^*T(x^k))^* \times$$
$$[T(x^k - \frac{1}{2}T'(x^k)^*T(x^k))] \quad k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

并设

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}T'(x)^*[T(x) - y] \tag{6}$$

当误差水平 $\delta \neq 0$ 时，则有

$$\varphi(x^\delta_k) = x^\delta_k - \frac{1}{2}T'(x^\delta_k)^*[T(x^\delta_k) - y^\delta] \tag{7}$$

$$x^\delta_{k+1} = x^\delta_k - T'(\varphi(x^\delta_k))^*[T(\varphi(x^\delta_k)) - y^\delta] \quad k=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

显然，迭代式(7)和(8)的形式类似于经典的 Landweber 迭代法，分析了方法的收敛性，并证明了方法的稳定性及收敛率为 $O(\delta^{2/3})$。2008 年，Wang 等人[13] 考虑一般情况，对于初值问题：

$$\dot{x}(t) = -T'(x(t))^*(T(x(t)) - y) \quad x(0) = x_0$$

添加某一修正项 $-\alpha(t)(x(t)-\zeta)$，对此连续型问题，用步长为 1 的欧拉方法得到修正的 Landweber 迭代法式(4)，同样地，用步长为 1 的二阶 Runge-Kutta 方法，则得到修正的 R-K 型修正 Landweber 迭代法，即当 $x^\delta_0 = x_0$ 时，有以下迭代过程：

$$x^\delta_{k+1} = x^\delta_k - T'(z^\delta_k)^*(T(z^\delta_k) - y^\delta) - \alpha_k(z^\delta_k - \zeta)$$

$$z^\delta_k = x^\delta_k - \frac{1}{2}T'(x^\delta_k)^*(T(x^\delta_k) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x^\delta_k - \zeta) \quad k=0,1,\cdots$$

并且分析方法的收敛性，与 Scherzer 所提出的方法相比，该方法稳定且大范围收敛，但不足之处是在该方法的每一步迭代过程中，都需要计算算子的两次 Fréchet 导数。2009 年，Wang 等人[14] 又以三阶的中点 Newton 法[15] 为基础，将 Newton 法中 $T'(\cdot)^{-1}$ 改写为 $T'(\cdot)^*$，提出了一个隐式的 Landweber 方法：

$$x^\delta_{k+1} = x^\delta_k - hT'(\frac{1}{2}(x^\delta_k + x^\delta_k))^*(T(x^\delta_k) - y^\delta) \quad k=0,1,\cdots$$

这里假定：(a) 算子 T 在 x^* 的开领域 $\Omega \subset D(T)$ 内满足算子的非线性条件式(2)，而且保证了

$$\frac{1}{1+\eta}\|T'(x)(x-\tilde{x})\| \leqslant \|T(x) - T(\tilde{x})\| \leqslant \frac{1}{1-\eta}\|T'(x)(x-\tilde{x})\| \tag{9}$$

其中 $0<\eta<\dfrac{1}{2}$；(b) T' 满足算子的有界性以及在 Ω 内是一致 Lipschitz 连续的；(c) 初值 x_0 足够接近于真解 x^*。则当误差水平 $\delta=0$ 时，序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*；当误差水平 $\delta \neq 0$ 时，在有限的迭代步数内，

$$\| T(x_{k_*}^\delta) - y^\delta \| \leqslant \tau\delta \leqslant \| T(x_{k_*}^\delta) - y^\delta \| \quad \forall k \leqslant k_* - 1$$

成立,这里 τ 是一个依赖于 η 的整数,即 $\eta > \dfrac{1+\eta}{1-2\eta} > 2$。2009 年,李景等人[16]利用一致凸一致光滑的 Banach 空间的几何性质,研究了 Banach 空间中线性和非线性算子的正则 Landweber 迭代法,假定所测的右端数据具有扰动的情况下,得出了此正则 Landweber 迭代法的收敛性。2010 年,Hein 等人[17]在 Banach 空间中研究用修正的 Landweber 迭代法来实现非线性算子方程的正则化,在光滑且强凸型假设条件下,给出收敛性和稳定性结果。2011 年,Xiao 等人[18]提出了非线性反问题的一个新的 Newton-Landweber 型迭代方法,记 $d_k^\delta = x_{k+1}^\delta - x_k^\delta$,则考虑迭代格式 $x_{k+1}^\delta = x_k^\delta + d_k^\delta$。记 $d_{n_k}^\delta = d_{n_{k-1}}^\delta + T'(x_{k-1}^\delta)^*[y^\delta - T(x_{k-1}^\delta) - T'(x_{k-1\delta})d_{n_{k-1}}^\delta]$,其中 n_k 表示在外部 k 迭代时的内部迭代,从而得到 d_k^δ 迭代格式:

$$d_{n_k}^\delta = (I - T'(x_k^\delta)^* T'(x_k^\delta)^{n_k}) d_0 + \sum_{i=0}^{n_k-1} (I - T'(x_k^\delta)^* T'(x_k^\delta))^i T'(x_k^\delta)^* (y^\delta - T(x_k^\delta))$$

如果 $d_0 = 0$,则

$$d_{n_k} = \sum_{i=0}^{n_k-1} (I - T'(x_k^\delta)^* T'(x_k^\delta))^i T'(x_k^\delta)^* (y^\delta - T(x_k^\delta))$$

如果选择 $n_k = 1$,则

$$d_{n_{k-1}}^\delta = T'(x_k^\delta)^*[y^\delta - T(x_{k-1}^\delta)]$$

并在此基础上,在强非线性条件和参数选择规则下得到 Newton-Landweber 型迭代方法的收敛率。2012 年,Leitão 等人[19]研究了病态方程的 Landweber-Kaczmarz 型正则化方法,在Banach空间中,当满足一致凸性一致光滑条件下,证明该方法的单调性结果,并建立了收敛性和稳定性结果。

3　Landweber 迭代法的应用

Landweber 迭代法是求解线性和非线性反问题的一种有效方法,因其良好的稳定性,所以在实际生活中也具有很强的应用价值。图像重建或者恢复是计算机工程等领域的一个很重要的研究方向,属于一类反问题。迭代算法成为图像重建或者恢复中的一类有效方法。对于在图像恢复问题中算子方程一般用

$$Kf = g \tag{10}$$

来描述。其中:g 是一个 m 维向量,表示标准电容;f 是一个 n 维向量,表示标准介电常数分布;K 表示 m 行 n 列的敏感度矩阵。

1990 年, Biemond 等人[20]就提出了 Landweber 迭代是在图像重建或者恢复中最简单的一种迭代算法。2003 年,Liang 等人[21]提出自适应 Landweber 迭代法用于模糊图像的恢复。经典的 Landweber 迭代在图像恢复的过程中需要不断更新参数,收敛速度慢;而自适应 Landweber 迭代法则在每一步迭代过程中更新参数,选择所计算参数的最大值,而先前设定的参数则用于下次迭代。这一种迭代法特别强调前一步迭代的速度和后一步迭代的稳定性,与经典的 Landweber 迭代法相比,具有较低的均方误差和平均绝对误差,以及更高的收敛率。2005 年,Lu 等人[22]就电容层析成像图像恢复算法提出了一种预条件 Landweber 迭代方法。因为求解式(10)相当于求解

$$K^{\mathrm{T}}Kf = K^{\mathrm{T}}g \tag{11}$$

则按照经典的 Landweber 迭代法,式(10)即可表述为

$$f_k = f_{k-1} + \tau K^{\mathrm{T}}(g - Kf_{k-1}) \tag{12}$$

这里 τ 是松弛因子。为加速 Landweber 迭代,Strand[23]曾经提出了预条件方法,即

$$f_k = f_{k-1} + \tau DK^{\mathrm{T}}(g - Kf_{k-1}) \tag{13}$$

其中 D 表示预处理器,它有很多可能的取值,在这里简单地选取 D 为一对角矩阵,对式(13)进行奇异值分解,则得

$$f_k = \sum_{j=1}^{p} [1 - (1 - \tau d_j \sigma_j^2)^k] \cdot \frac{u_j^{\mathrm{T}} \cdot g}{\sigma_j} \cdot v_j \tag{14}$$

其中 d_j 为 D 的第 j 个对角元素。从式(14)可得到其收敛性条件,即对于任意的 j,满足 $|1 - \tau d_j\sigma_j^2| < 1$,并且满足 $\tau d_j \sigma_j^2$ 的取值小于且非常接近,才能使得算法快速收敛。

此外,1998 年,Bertero 等人[24]曾经还引入了一个投影算子 P:

$$P[f(x)] = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(x) < 0 \\ f(x) & \text{if} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \\ 1 & \text{if} \quad f(x) > 1 \end{cases}$$

则式(13)变形成 $f_k^C = P[f_{k-1}^C + \tau DK^{\mathrm{T}}(g - Kf_{k-1}^C)]$。其中 f_k^C 是式(13)中引入了投影算子 P 后 f_k 的结果;投影算子能够使得每一个迭代结果都能收敛于一个凸集,即对于恢复的图像一定是非负的且具有上界。

2006 年,Jang 等人[25]利用修正的 Landweber 迭代法来加速迭代收敛率和提高图像恢复的效果。2007 年,陈至坤等人[26]在分析电容成像基本原理和图像重建算法的基础上,针对 Landweber 迭代算法收敛速度慢的特点,提出一种基于 Tikhonov 正则化算法的 Landweber 迭代法。图像重建速度与线性反投影法相同,但在重建图像的形状、位置、面积、对测量区中心区域及对多目标体的分辨质量较线性反投影法都有极大的提高,对于迭代算法,确定合适的迭代终止条件仍然比较困难。2009 年,吕小红等人[27]利用由 Landweber 迭代正则化方法改进所得到的快速收敛的迭代正则化方法,处理具有可分离点扩散函数的图像恢复问题。该方法与传统的 Landweber 迭代正则化方法相比,可大大提高收敛速度,而且具体的计算中只需要较少的存储量。2010 年,武兰兰[28]在 Landweber 迭代算法的基础上介绍了一种基于投影射线组对称性结构改进的图像重建代数迭代算法(SB-Landweber 迭代算法)。由于投影数据中噪声的存在,重建的图像均对投影射线的迭代顺序有一定的依赖关系。所以,与传统的按角度分块相比,SB-Landweber 迭代算法加大了迭代前后两条射线的位置夹角度,从而提高了图像重建效果。2011 年,薛姣阳[29]将 Landweber 图像重建算法应用于电磁层析成像(EMT)技术中,他在研究 EMT 正问题和逆问题、正问题的有限元仿真方法和 EMT 图像重建算法的基础上,提出了以线性反投影(LBP)为初值的 Landweber 的迭代算法,明显地改善了图像重建的效果。

此外,Landweber 迭代在地质、医疗、物理、信号等方面都有很重要的作用。1997 年,Berteroy 等人[30]用投影 Landweber 迭代法实现了震源时间函数的估计。2006 年,Bi 等人[31]在基于分布源边界点法的近场声舍息理论基础上,提出采用 Landweber 迭代正则化方法稳定近场声全息重建过程,控制测量误差对重建结果的影响,保证重建结果的有效性,并提出了确定 Landweber 迭代正则化方法中最优迭代次数的方法——辅助面选取法,通过确定各次迭代所获得的辅助面上声压值与测量值之间的相对误差的最小值来确定最佳迭代次数,从而达到最佳的重建和预测效果。2008 年,李芝兰等人[32]针对锅炉内燃烧温度的检测,提出了基于修正 Landweber 迭代的声学温度场重

建算法,根据实际情况,确定了重建算法中的价值函数和迭代步长,使得收敛速度明显提高,而且给出了不同温度场分布模型及其重建图像和重建误差,即使是在声波发射/接收器数目较少时,该算法仍具有较高的重建精度和抗干扰能力。2011年,冯尊德等人[33]针对 GPS 定位中由于观测结构不好等原因常常造成 GPS 定位参数的最小二乘解不稳定的病态问题,提出采用 Landweber 迭代正则化求解整周模糊度,并在实施过程中提出了迭代次数的确定方法。2012 年,杨真真等人[34]提出了语音重构的 DCT 域加速 Landweber 迭代硬阈值算法,它是针对压缩感知理论在语言信号重构过程中迭代硬阈值算法收敛速度慢的特点,对原始语言信号进行 DCT 变换,然后在 DCT 域将每一步 Landweber 迭代分解为矩阵计算和求解两步,通过修改其中的矩阵计算部分实现 Landweber 迭代加速,最后通过迭代硬阈值对信号作阈值处理。

4 结束语

Landweber 迭代法是求解线性和非线性不适定性反问题的一种有效的方法,它具有良好的稳定性、抗噪能力强,能克服迭代收敛速度慢的缺点,具有很好的研究价值,而且还有许多迭代过程中所强调的细节,譬如对于迭代次数的制约等。相应地,在实际生活中,尤其是图像重建的应用过程中,对于最大迭代次数的限制以及修正 Landweber 迭代中松弛因子的选取等,譬如,在 SB-Landweber[28]迭代算法中,松弛因子 λ_m 取常系数,而且随着 λ_m 值的变大,经 SB-Landwebe 迭代算法重建所得到的图像与原图像的距离逐渐减小,重建图像越来越接近于原图,即重建效果越来越好,且当 λ_m 趋于 2 时图像重建的效果最好,而当 λ_m 是一个变系数的情况,将有待于进一步研究。因为反问题涉及社会生活的各个领域,所以,Landweber 迭代法或者修正 Landweber 迭代法也相应地成为社会生活各领域、尤其是计算机领域中解决问题的有力工具。

参考文献:

[1] 韩波,李莉.非线性不适定问题的求解方法及其应用[M].北京:科学出版社,2011:1-8.

[2] LANDWEBER L. An iteration formula for fredholm integral equaions of the first kind[J]. American Journal Mathematics, 1951, 73(3):615-624.

[3] TAUTENHAHN U. On the asymptotical regularization method for nonlinear ill-posed problems[J]. Inverse Problems, 1994, 10(6):1405-1418.

[4] HANKE M, NEUBAUER A, SCHERZER O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems[J]. Numerische Mathematik, 1995, 72(1):21-37.

[5] SCHERZER O. Convergence criteria of iterative methods based on Landweber iteration for solving nonlinear problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 194(3):911-933.

[6] HETTLICH F. The Landweber iteration applied to inverse conductive scattering problems[J]. Inverse Problems, 1998, 14(4):931-947.

[7] NEUBAUER A. On Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems in Hilbert scales[J]. Numerische Mathematik, 2000, 85(2):309-328.

[8] JIN Qi-nian, AMATO U. A discrete scheme of landweber iteration for solving nonlinear Ill-posed problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 253(1):187-203.

[9] SCHERZER O. A modified Landweber iteration for solving parameter estimation problems[J]. Applied Mathematics Optimization, 1998, 38(1):45-68.

[10] KÜGLER P. A derivative free Landweber method for parameter identification in elliptic partial differential equations with application to the manufacture of car windshields[D]. Linz: Johannes Kepler University, 2003.

[11] XU J, HAN B, LI L. Frozen landweber iteration for nonlinear ill-posed problems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2007, 23(2):329-336.

[12] LI L, HAN B, WANG W. R-K type Landweber method for nonlinear ill-posed problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206(1):341-357.

[13] WANG W, HAN B, LI L. A Runge-Kutta type modified Landweber method for nonlinear ill-posed operator equaions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 212(2):457-468.

[14] WANG Wei, HAN Bo. An implicit Landweber method for nonlinear ill-posed operator equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 230(2):607-613.

[15] FRONTINI M, SORMANI E. Some variant of Newtons method with third-order convergence[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 140(2-3):419-426.

[16] 李景,刘振海. Banach 空间中的正则 Landweber 迭代法[J].湖南大学学报:自然科学版,2009,36(7):89-92.

[17] HEIN T, KAZIMIERSKI K S. Modified landweber iteration in Bananch spaces-convergence and convergence rates[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2010, 31(10):1158-1184.

[18] XIAO Cui-e, DENG You-jun. A new Newton-Landweber iteration for nonlinear inverse problems[J]. Korean Society for Computational and Applied Mathematics, 2011, 36(1-2):489-505.

[19] LEITÃO A, ALVES M M. On Landweber-Kaczmarz methods for regularizing systems of ill-posed equations in Banach spaces[J]. Inverse Problems, 2012, 28(10).

[20] BIEMOND J, LAGENDJIK R L, MERSEREAU R M. Iterative methods for image deblurring[J]. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(5):856-883.

[21] LIANG Lei, XU Yuan-chang. Adaptive Landweber method to deblur images[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(5):129-132.

[22] LU Geng, PENG Li-hui, ZHANG Bao-fen, *et al*. Preconditioned Landweber iteration algorithm for electrical capacitance tomography[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2005, 16:163-167.

[23] STRAND O N. Theory and methods related to the singular-function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind[J]. SIAM Journal Numerical Analysis, 1974, 11(4):798-825.

[24] BERTERO M, BOCCACCI P. Introduction to inverse problem in imaging[M]. Bristol, Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1998.

[25] JANG J D, LEE S H, KIM K Y, *et al*. Modified iterative Landweber method in electrical capacitance tomography[J]. Measurement Science and Technology, 2006, 17(7):1909-1917.

[26] 陈至坤,赵波,王鸿雁.基于正则化的 LANDWEBER 电容层析成像图像重建算法研究[J].电子测量技术,2007,30(10):61-63,72.

[27] 吕小红,吴传生.图像恢复的一种快速迭代正则化方法[J].数学杂志,2009,29(4):563-566.

[28] 武兰兰.基于离散化模型对称结构的图像重建 Landweber 迭代算法研究[D].北京:北京交通大学,2010.

[29] 薛姣阳. Landweber 图像重建算法在 EMT 中的应用[D].北京:北京交通大学,2011.

[30] BERTERO M, BINDI D, BOCCACCI P, *et al*. Application of the projected Landweber method to the estimation of the source time function inseismology[J]. Inverse Problems, 1997, 13(2):465-486.

[31] BI Chuang-xing, CHEN Xin-zhao, ZHOU Rong. Landweber iterative regularization for nearfield acoustic holography[J]. Chinese Science Bulletin, 2006, 51(11):1374-1380.

[32] 李芝兰,颜华,陈冠男.基于修正 Landweber 迭代的声学温度场重建算法[J].沈阳工业大学学报,2008,30(1):90-93.

[33] 冯尊德,李云云.用 Landweber 法求解 GPS 定位参数[J].测绘科学,2011,36(6):144-145.

[34] 杨真真,杨震,李雷.语言重构的 DCT 域加速 Landweber 迭代硬阈值算法[J].信号处理,2012,28(2):172-178.