

Contourlet 域方向子带稀疏表示的图像压缩感知^{*}

倪雪, 王华力, 陈亮, 王金明

(解放军理工大学通信工程学院, 南京 210007)

摘要: 为了提高压缩感知中图像的稀疏表示性能, 提出了一种 Contourlet 域方向子带稀疏表示的图像压缩感知算法。将图像 Contourlet 分解后的多个高频子带根据方向正交特点进行重组, 采用随机高斯矩阵对重组后的子带分别进行测量, 实现压缩采样; 利用正交匹配追踪法重建各子带系数, 并进行 Contourlet 反变换重构原图像。实验结果表明, 在相同采样率下, 算法重构图像的主观视觉效果和峰值信噪比都优于小波压缩感知算法。

关键词: 压缩感知; Contourlet 变换; 稀疏表示; 方向子带; 图像重构

中图分类号: TN911.73; TP393.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)06-1889-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.06.076

Image compressed sensing based on sparse representation using Contourlet directional subbands

NI Xue, WANG Hua-li, CHEN Liang, WANG Jin-ming

(College of Communication Engineering, PLA University of Science & Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: To improve image sparse representation in compressed sensing, this paper proposed a new compressed sensing algorithm based on sparse representation using Contourlet directional subbands. Firstly, it decomposed images by Contourlet transform, and restructured directional subbands according to orthogonality, and then it used Gaussian random matrices to measure subbands and used orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm to recover the subbands coefficients. Finally, it applied inverse Contourlet transform to reconstruct images. The experiments show that the proposed algorithm has better improvement in image visual effect and peak signal-to-noise ratio (PSNR).

Key words: compressed sensing; Contourlet transform; sparse representation; directional subbands; image reconstruction

压缩感知^[1-3] (compressed sensing, CS) 是基于信号稀疏性的一种新型采样理论, 它是 2004 年由 Candes 和 Donoho 等人提出。该理论利用信号在某个变换域下的稀疏表示, 将信号进行压缩测量, 以远低于奈奎斯特采样率实现信号采样, 并通过求解非线性优化问题精确重构原始信号。这一新理论突破了奈奎斯特采样定律的限制, 直接将采样与压缩相结合, 极大地降低了信号的采样频率、信号处理的时间以及数据存储和传输的代价。目前, CS 理论已在信号处理、通信、医学成像、图像处理、数据重构、无线传感器网络等应用中崭露头角。国内外关于压缩感知理论与应用的研究正在积极开展^[4-7]。

在压缩感知理论中, 稀疏表示是压缩感知的理论基础和前提。所谓稀疏表示是指用较少的系数就能描述信号的主要信息。实际信号往往都是非零的, 但是在某个变换域下的绝大部分系数取值很小, 只有少量系数取值较大, 因此, 可以认为信号在这个变换域是稀疏的。目前, 常用的变换主要有 DCT 变换、小波变换、Curvelet 变换^[8]、Contourlet 变换^[9]等。CS 理论表明信号越稀疏, 重构信号就越准确。目前, 国内外关于小波变换用于压缩感知的研究成果不少^[10,11]。文献[10]提出采用单层小波变换实现压缩感知, 较好地提高了重构图像的质量, 算法思路有一定的借鉴意义。但是, 小波变换只具有有限个方向, 无法充分描述图像的边缘信息, 并不是图像最稀疏的表示方

法。大量的研究表明, 框架理论下信号的稀疏表示更加有效。2002 年 Do 等人^[9]提出的非自适应方向多尺度 Contourlet 变换可以用最少的系数来逼近奇异曲线, 并且逼近精度远高于小波。在图像表示方面, Contourlet 变换相比小波变换具有更优的稀疏表示能力。目前, 国内外关于 Contourlet 变换用于压缩感知的研究成果并不多见^[12,13]。借鉴于小波压缩感知算法思想, 本文在图像压缩感知中采用 Contourlet 变换实现图像的稀疏表示, 并考虑 Contourlet 分解后的高频方向子带对应正交, 与测量矩阵具有较好的非相关性, 能进一步提高图像重构的精度。因此, 结合 Contourlet 变换稀疏表示及方向子带正交的特点, 提出了一种 Contourlet 域方向子带的图像压缩感知算法。

1 压缩感知理论

设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 是 $N \times 1$ 维列向量, 如果 $\mathbf{x}$ 是一个 K -稀疏 (仅有 $K (K \ll N)$ 个非零元) 信号, 采用一个观测矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$) 对信号 $\mathbf{x}$ 进行测量, 得到观测向量 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

可以看到, 压缩感知将信号 $\mathbf{x}$ 从 N 维降为 M 维观测信号 $\mathbf{y}$, 实现数据压缩。实际图像信号都不是稀疏的, 但通过某个正交基或紧框架 $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 变换可以得到图像的稀疏表示, 即

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s} \quad (2)$$

收稿日期: 2012-09-17; 修回日期: 2012-11-05 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61072042, 61271354)

作者简介: 倪雪 (1984-), 女, 江苏镇江人, 助教, 硕士, 主要研究方向为图像处理与压缩感知 (nixue1213@126.com); 王华力 (1967-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为自适应阵列信号处理、压缩感知; 陈亮 (1974-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为语音与图像处理; 王金明 (1972-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为语音信号处理。

其中: Ψ 为信号的稀疏基; s 表示信号在变换域 Ψ 下的稀疏系数, 满足 K-稀疏条件, 通过变换可知 $s = \Psi^T x$ 。因此, 可将式 (1) 修改为

$$y = \Phi s = \Phi \Psi^T x = A x \quad (3)$$

其中: A 称为测量矩阵 ($A_{M \times N} = \Phi_{M \times N} \Psi_{N \times N}^T$)。因观测维数 M 远远小于信号维数 N , 所以无法直接从 y 的 M 个观测值中解出信号 x 。CS 重构问题的实质就是在已知低维观测信号 y 和观测矩阵 Φ 的条件下, 如何根据优化算法快速准确地重构出原始高维信号 x 。

Candes 等人提出了利用 l_1 范数下的最优化问题求解 x 的精确或近似逼近, 即

$$\min \|\Psi^T x\|_1 \quad \text{s. t.} \quad \Phi \Psi^T x = y \quad (4)$$

这里, Φ 与 Ψ 要求满足不相干性, 即选取测量矩阵 Φ 时应尽可能与 Ψ 正交, 才能实现原始信号 x 的精确重构。式 (4) 常用的求解方法有基追踪 (basis pursuit, BP)、匹配追踪法 (matching pursuit, MP) 和正交匹配追踪法 (orthogonal matching pursuit, OMP) 等。实际中, 可先求解信号的稀疏系数估计 $\hat{s}$, 再根据式 (2) 作反变换, 得到重构后的信号 $\hat{x}$ 。

2 图像的 Contourlet 变换

Contourlet 变换是一种多分辨率、局域的、多方向的图像表示方法。Contourlet 变换基的支撑区间是随尺度而长宽比变化的长条形结构, 具有方向性和各向异性, 使表示图像边缘的 Contourlet 系数能量更加集中, 即可用少量系数来表示图像的光滑轮廓。因此, 相比于小波变换, Contourlet 变换能更稀疏地表示图像。连续 Contourlet 变换将平方可积空间 $L^2(R^2)$ 分解为一系列相互正交的多尺度、多方向子空间 (如图 1 所示)。

$$L^2(R^2) = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{2^j-1} W_j \right) = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{2^j-1} \left(\bigoplus_{k=0}^{2^j-1} W_{j,k}^{(l)} \right) \right) \quad (5)$$

其中: $\oplus$ 表示正交和运算; 子空间 V_0 是最低尺度上的逼近分量, 由尺度函数正交基的缩放和平移构成; W_j 为 2^j 尺度上的细节子空间, 通过 Contourlet 变换 W_j 被分解为 2^j 个方向子空间 $W_{j,k}^{(l)}$ 。其中 j, k, n 分别代表尺度、方向和位置参数。图 2 是频域 Contourlet 分解示意图, 其分解尺度为 1, 方向子带数为 8。

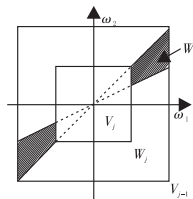


图1 Contourlet变换多尺度多方向空间

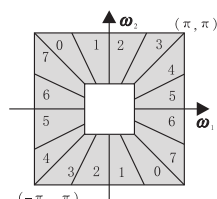


图2 Contourlet频域分解图

离散 Contourlet 变换由拉普拉斯金字塔分解 (Laplacian pyramid, LP) 和方向滤波器组 (directional filter bank, DFB) 两部分组成, 具体实现过程如图 3 所示。LP 用来实现多尺度分解, 每一级分解得到一个低频子带和高频子带, 然后将高频子带采用 DFB 进行分解, 进一步将图像分解到 2 的 n 次方数目的方向子带。LP 与 DFB 结合形成塔形方向滤波器组 (PDFB)。

图 4 为 zoneplate 图像经 Contourlet 分解的示意图 (尺度为 1, 方向为 8)。图像经 Contourlet 分解后的低频子带如图 4(a) 所示为原始图像的逼近信号, 大部分系数不为零, 因此, 低频子带并不具备稀疏性。Contourlet 分解的高频子带如图 4(b) 所

示包含了图像在各个方向的信息, 其中绝大部分系数接近零, 幅值较大的系数都集中在图像的轮廓边缘上, 可以认为高频子带系数是稀疏的。同时, 方向 0 与 4 子带对应正交, 方向 1 与 5、2 与 6、3 与 7 对应正交。

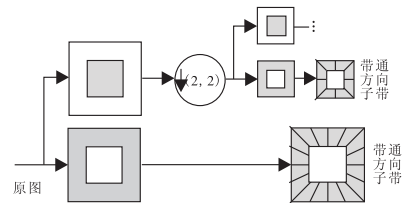


图3 Contourlet变换滤波器组结构



(a) zoneplate 图像 (b) 低频子带 (c) 高频子带

图4 zoneplate 图像 Contourlet 分解图

3 Contourlet 域方向子带稀疏表示图像压缩感知算法

Contourlet 变换是继小波变换后发展起来的一种新的多尺度几何分析方法, 在图像处理方法上与小波有一定的相似性。根据小波变换压缩感知算法 (简称 W-CS) 原理, 首先将大小 $N \times N$ 的图像进行小波变换, 然后构造测量矩阵 Φ (目前, 测量矩阵主要有服从 $(0, 1/N)$ 分布的随机高斯矩阵、贝努里分布的 ± 1 矩阵等), 利用 Φ 对小波变换后的全部系数进行测量, 得到 $M \times N$ ($MN \ll N$) 大小的测量系数矩阵。恢复图像时, 根据 Φ 和 $M \times N$ 大小的测量系数, 通过 OMP 算法等恢复出原图像。文献 [10] 提出基于单层小波变换的压缩感知算法, 只对高频系数进行测量, 提高了重构图像质量。

本文提出的基于 Contourlet 方向子带压缩感知算法与 W-CS 算法相比, 具有以下特点:

- 采用 Contourlet 变换取代小波变换。小波变换每一层分解都得到三个高频分量 (水平、垂直和对角线)。Contourlet 变换在任意尺度能分解成 2 的任意次方个方向子带, 具有多方向性。
- W-CS 算法采用测量矩阵对全部变换系数进行测量, 本文仅对 Contourlet 变换后的高频系数进行测量。低频系数是原图像在不同尺度下的逼近信号, 不能认为是稀疏的。
- 利用 Contourlet 变换方向子带之间对应正交, 将对应方向子带组合, 形成多个方向子带 (尽可能满足 Φ 与 Ψ 正交), 分别对组合后的方向子带进行压缩测量。

具体算法实现如下:

- 对 $N \times N$ 的图像进行一级 Contourlet 分解 (LP 结构采用 “9-7” 双正交小波分解, DFB 的方向数为 8)。
- 保持低频子带不变, 将 8 个方向的高频子带按照对应正交特点重组, 形成 4 个方向子带 (每个子带大小为原始图像的 $1/4$)。
- 选择合适的 M 值 ($1 \leq M \ll N/2$), 构造 $M \times (N/2)$ 大小的高斯分布的测量矩阵 Φ 分别对 4 个方向子带进行测量, 并采用 OMP 算法求解方向子带系数的精确估计。
- 将估计得到的方向子带恢复重组。
- 根据重构后的方向子带以及低频子带进行 Contourlet 反变换得到重构图像。算法流程如图 5 所示。

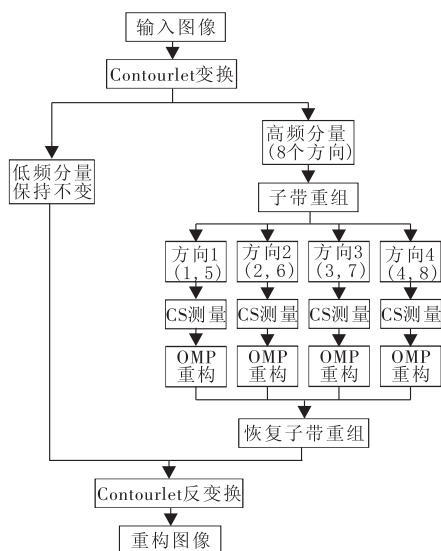


图5 算法流程框图

4 仿真结果与分析

为了验证本文算法的有效性,采用 256×256 大小的 Lena 图像仿真测试,并将该算法与小波变换压缩感知算法(W-CS)、文献[10]提出的单层小波压缩感知算法(SW-CS)以及 Contourlet变换压缩感知算法(C-CS)(注:对 Contourlet 高频子带整体压缩测量)进行比较。实验中,W-CS 选取‘sym8’小波函数对图像进行4层分解,得到 256×256 大小的变换系数矩阵。SW-CS 采用‘db2’小波函数进行单层分解,得到 128×128 的低频子带和3个方向大小为 128×128 的高频子带。Contourlet 变换选取“9-7”双正交小波函数进行单层分解,DFB 方向数为8,得到 128×128 的低频系数和 256×256 的高频系数。为保证测量后的系数点总个数相同, M 值分别取128、42、64和32(采样率=50%)。实验结果如图6所示(局部放大),重构图像的质量以峰值信噪比(PSNR)作为测度指标。仿真硬件平台是 Core2 AMD 4800,2.5 GHz CPU,2.0 GB 内存,操作系统是 Windows XP,软件环境是 MATLAB R2010a。

从实验效果图中可以明显看出,采用 W-CS 方法重构后的图像有明显失真,细节信息丢失,视觉效果欠缺。文献[10] SW-CS 方法视觉效果得到较大提高,但图中类似帽檐等曲线细节不突出。采用 C-CS 方法图像视觉效果更佳,细节重构保持较好,PSNR 值比 W-CS 提高了 2.7 dB;本文算法中充分利用了方向子带正交的特点,重构图像质量进一步提升,与原始图像较为逼近。本文算法的 PSNR 值较 W-CS、SW-CS 和 C-CS 相比分别提高了 3.0 dB、1.0 dB 和 0.3 dB。



(a) W-CS (PSNR = 26.7 dB) (b) SW-CS (PSNR = 28.7 dB) (c) C-CS (PSNR = 29.4 dB) (d) 本文算法 (PSNR = 29.7 dB)

图6 四种方法 Lena 图像重构对比

为了进一步说明本文算法的有效性,本文对 Lena 图像在不同采样率(测量数量与像素数之比)下图像重构的 PSNR 值(取10次平均值)与运行时间进行了对比,结果如表1和2所示。

表1给出了四种方法对于不同采样率下的 PSNR 值对比。可以看出:a)不同采样率下采用 Contourlet 变换压缩感知算法

(C-CS)图像重构的 PSNR 值明显高于 W-CS 和 SW-CS,实验说明利用 Contourlet 变换进行图像的稀疏表示能进一步提高压缩感知中图像重建的质量;b)本文提出的 Contourlet 方向子带压缩感知算法相比 C-CS,在采样率较低的情况下 PSNR 值均有所提高,实验结果进一步证明了 Contourlet 变换高频子带之间对应正交性提高了图像重构的精度。

表1 不同采样率下 Lena 图像重构 PSNR /dB

算法	sampling rate				
	30%	40%	50%	60%	70%
W-CS	21.5	24.2	26.7	28.6	30.2
SW-CS	27.9	27.9	28.7	29.9	31.3
C-CS	28.3	28.6	29.4	30.1	31.8
本文算法	29.3	29.1	29.7	30.3	31.7

表2 不同采样率下 Lena 图像重构时间 /s

算法	sampling rate				
	30%	40%	50%	60%	70%
W-CS	5.0	7.1	9.7	13.2	17.6
SW-CS	0.5	1.1	1.9	2.9	3.9
C-CS	0.8	2.2	3.9	4.9	5.9
本文算法	0.4	1.1	2.0	2.8	3.7

表2中列出了四种方法在不同抽样率下的图像重构时间对比。从表中数据可以看出 W-CS 算法图像重构时间较长,并随着采样数据增多,重构速度变慢;SW-CS 算法中只进行单层小波分解,相比 W-CS 实现速度较快;采用 Contourlet 压缩感知对整体高频子带测量,重构迭代次数多,算法实现时间略比 SW-CS 长;本文算法对4个子带压缩测量并重构,由于方向子带大小只有原始图像的1/4,故重构迭代次数少,运行时间较短,与 SW-CS 算法实现时间基本相当。

5 结束语

本文针对 Contourlet 变换能够实现图像的最优稀疏表示,提出了一种 Contourlet 域方向子带稀疏表示的图像压缩感知算法,并与基于小波变换的压缩感知算法进行对比实验。结果表明,本文算法采用 Contourlet 变换实现对图像的稀疏表示,在压缩感知图像重建中能有效地重构图像的细节和纹理信息,一定程度上改善了图像的视觉效果。在50%采样率下,PSNR 值较 W-CS、SW-CS 分别提高了 3.0、1.0 dB,尤其在低采样率情况下本文算法更具优势。同时,本文算法提出针对正交方向子带分别进行压缩测量,相比 C-CS,进一步提高了图像重建的质量,加快了图像重构的速度。

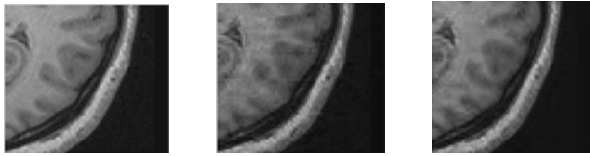
参考文献:

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDES E J. Compressive sampling [C]//Proc of International Congress of Mathematicians. [S. l.]: European Mathematical Society, 2006: 1433-1452.
- [3] CANDES E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [4] CANDES E J, PLAN Y. A probabilistic and RIPless theory of compressed sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2011, 57(11): 7235-7254.
- [5] YU Guo-shen, SAPIRO G. Statistical compressed sensing of Gaussian mixture models [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(12): 489-509.

表2 基于小波变换与基于剪切波的 MSE、SSIM 值和 PSNR 值

方法	MSE	PSNR	SSIM
小波变换基	1.9187e+006	33.46	0.863 3
离散剪切波变换基	1.8993e+006	39.53	0.866 9

同时,为了更好地说明基于剪切波的变换对图像边缘细节的重建优势,图7给出了边缘对比的结果图。



(a)原图边缘部分 (b)基于小波重建的部分 (c)基于剪切波重建的部分
图7 图像边缘细节的重建效果对比

综上所述可知,基于剪切波变换的压缩感知 MRI 重建与基于小波变换的相比,获得了更小的 MSE 值,以及更高的 PSNR 和 SSIM,理论上重建的效果更好。同时,重建图像的视觉效果也明显较好,剪切波变换能克服小波变换对图像细节边缘的非敏感性,对于边缘细节部分的重建具有优势。实验说明,基于剪切波的压缩感知 MRI 重建能够提高图像重建的质量。

4.2.3 在不同采样率下的图像重建质量对比

本文对在不同采样率时,基于小波变换和基于离散剪切波的图像重建质量作了对比分析。在不同采样率下,对应的 SSIM 值如图8所示,其中实线表示基于小波变换的重建,虚线表示基于剪切波的重建。

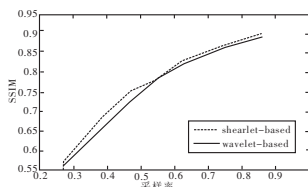


图7 在不同采样率下,两种变换方法重建图像的SSIM值

实验结果表明,随着采样率的增大,基于两种变换的重建图像的结构化相似度增大,图像质量提升。当采样率较低时,基于离散剪切波重建的 SSIM 值明显高于基于小波的重建,其重建质量具有明显的优势。而当采样率较高时,两种方法的差别不太明显。由于压缩感知的目的是通过采样较少的低维信号值来重建原始高维信号,通常选取的采样率会低于 0.5。因此,本文可以得到基于离散剪切波的压缩感知重建是优于基于小波重建的结论。

5 结束语

剪切波变换是一种新的多尺度几何分析工具,本文利用剪切波变换的多方向性和各向异性,能够很好地表达图像的曲线

和轮廓的优点,将离散剪切波应用到压缩感知的 MRI 重建中。相比于传统的基于二维小波变换的压缩感知 MRI 重建,本文的方法具有明显的优势,可以更稀疏地表示 MRI 图像,重建精度更高,并且更有利于保留纹理和边缘信息。

参考文献:

- [1] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDES E, TAO T. Near optimal signal recovery from random projections; universal encoding strategies[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [3] AKCAKAYA M, NAM S, HU P, et al. Compressed sensing with wavelet domain dependencies for coronary MRI: a retrospective study[J]. IEEE Trans on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1090-1099.
- [4] HALDAR J P, HEMANDO D, LIANG Zhi-pei. Compressed sensing MRI with random encoding[J]. IEEE Trans on Medical Imaging, 2011, 30(4): 893-903.
- [5] OTAZO R, KIM D, AXEL L, et al. Combination of compressed sensing and parallel imaging for highly accelerated first-pass cardiac perfusion MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(3): 767-776.
- [6] ZHAO Bo, HALDAR J P, BRINEGAR C, et al. Low rank matrix recovery for real-time cardiac MRI[C]//Proc of the 7th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging, 2010: 996-999.
- [7] 胥斌, 唐远炎, 房斌. 基于剪切波变换的纹理图像分类[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(29): 15-18.
- [8] GUO Kang-hui, LABATE D. Optimally sparse multidimensional representation using shearlets[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007, 39(1): 298-318.
- [9] EASLEY G, LIM W, LABATE D. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 25-46.
- [10] 胡海智, 孙辉, 邓承志, 等. 基于 Shearlet 变换的图像去噪算法[J]. 计算机应用, 2010, 30(6): 1562-1564.
- [11] 余青山, 徐平, 罗志增, 等. 一种新的分块压缩传感图像重建算法[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2011, 41(Z1): 27-31.
- [12] CANDES E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [13] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [14] 郭强. 基于剪切波变换的图像统计模型及其应用研究[D]. 上海: 上海大学, 2010.

(上接第 1891 页)

- [6] DUARTE M F, ELDAR Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(9): 4053-4085.
- [7] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651-1662.
- [8] CANDES E J, DONOHO D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities[C]//Communications on Pure and Applied Mathematics. [S. l.]: Wiley Periodicals Inc, 2004: 219-266.
- [9] DO M N, VETTERLI M. Contourlets: a directional multi-resolution

image representation[C]//Proc of IEEE International Conference on Image Processing. Rochester: IEEE, 2002: 357-360.

- [10] 岑翼刚, 陈晓方, 岑丽辉, 等. 基于单层小波变换的压缩感知图像处理[J]. 通信学报, 2010, 31(8A): 52-55.
- [11] 练秋生, 王艳. 基于双树小波通用隐马尔可夫树模型的图像压缩感知[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(10): 2301-2306.
- [12] 练秋生, 陈书贞. 基于解析轮廓波变换的图像稀疏表示及其在压缩传感中的应用[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1293-1298.
- [13] 吴巧玲, 倪林, 何德龙. 基于非下采样 Contourlet 变换的压缩感知图像重建[J]. 中国科学技术大学学报, 2012, 42(2): 87-91.