第 30 卷第 5 期
2013 年 5 月

计 算 机 应 用 研 究
Application Research of Computers

Vol. 30 No. 5
May 2013

基于 T-S 模型的双时变时滞不确定系统的鲁棒 H_∞ 容错控制*

邵克勇[1]，张晓花[1]，李　鑫[2]，陈峤郴[1]
(1. 东北石油大学 电气信息工程学院，黑龙江 大庆 163318；2. 大庆钻探工程公司 信息中心，黑龙江 大庆 163458)

摘　要：为了解决系统在含有执行器局部或者完全失效故障情况下的鲁棒 H_∞ 容错控制问题，针对一类状态和控制输入同时存在时变时滞的不确定非线性系统，采用 T-S 模糊模型来描述，利用并行分布补偿(PDC)算法设计了模糊状态反馈控制器，结合 Lyapunov 稳定性理论给出了保证该模糊容错控制系统渐近稳定的充分条件，不但保证了系统输出的鲁棒稳定性，而且能够满足给定的鲁棒 H_∞ 性能指标。最后通过 MATLAB 仿真对比系统中有外部干扰和无外部干扰情况下的系统输出曲线，验证了所提出方法的可行性。

关键词：鲁棒；容错；T-S 模型；模糊控制器；双时变时滞；非线性系统
中图分类号：TP273　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2013)05-1393-04
doi:10.3969/j. issn. 1001-3695. 2013. 05. 028

Robust H_∞ fault-tolerant control based on T-S model of double time-varying delay uncertain system

SHAO Ke-yong[1], ZHANG Xiao-hua[1], LI Xin[2], CHEN Qiao-chen[1]
(1. *School of Electrical & Information Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing Heilongjiang* 163318, *China*; 2. *Information Center, Daqing Oilfield Drilling Engineering Company, Daqing Heilongjiang* 163458, *China*)

Abstract: In order to solve robust fault-tolerant control problem of the system containing actuator partial or complete failure of the fault cases, according to a class of state and control input both existence of time-varying delay uncertain nonlinear system, this paper adopted T-S fuzzy model to describe, designed fuzzy state feedback controller using the parallel distributed compensation (PDC) algorithm, researched robust H_∞ fault-tolerant control problems, when the system contained actuator partial or completed failure cases. And it combined the Lyapunov stability theory was given the sufficient condition to ensure that the fuzzy fault-tolerant control system was asymptotically stable, not only to ensure that the system robust stability of the system output, but also to meet the given robust H_∞ performance index. At last, by MATLAB simulation to compare with the system have external disturbance and there is no external interference system outputs curves, the result shows that the method is feasible.
Key words: robust; fault-tolerant; T-S model; fuzzy controller; double time-varying delay; nonlinear system

0　引言

随着生产过程的日益大型化和复杂化，对控制质量的要求也在不断地提高，可靠性成为控制理论领域急需解决的重要问题。所以，容错控制方法作为提高系统可靠性的重要手段，受到了国内外学者的广泛重视，成为控制领域研究的热门课题[1,2]。实际控制系统大多数存在非线性，对非线性系统容错控制的研究越来越受到人们的关注，由于非线性系统很难用精确的数学模型来描述，因此经典的容错控制方法已不能完全适用于非线性系统容错控制的研究。由 Takagi-Sugeno 提出的一种描述复杂非线性系统的 T-S 模糊模型[3]，其主要特点是：非线性系统由一些 IF-THEN 模糊推理规则来描述，每个推理规则表示不同局部区域线性模型的动态，然后把局部线性模型用模糊隶属函数连接起来，得到整体的非线性模糊动态模型，为非线性系统的容错控制分析提供了一个新的方法[4,5]。文献[4]采用 T-S 模糊模型描述了不确定时滞非线性系统，针对系统中含有传感器故障的情形，设计输出反馈控制器，保证控制系统的鲁棒稳定性，但没有研究系统中含有执行器故障的情形。文献[5]研究了一类具有不确定和时滞的非线性系统的 H_∞ 鲁棒容错控制问题，只考虑系统中含有状态时滞的情形，没有把控制输入存在时滞的情形考虑在内，并且状态时滞是非时变的。本文针对状态和控制输入同时含有时变时滞的非线性系统，应用 T-S 模糊模型，针对系统执行器发生故障时，基于 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 技术，设计模糊状态反馈控制器，给出了系统在执行器局部或者完全失效的情况下鲁棒渐近稳定的充分条件，并且满足给定的性能指标，使系统具有容错性。仿真实例说明了该方法的有效性。

1　系统描述

假定一类非线性时滞不确定系统由 T-S 模糊模型来描述，

收稿日期：2012-08-21；**修回日期**：2012-09-24　**基金项目**：黑龙江省教育厅基金资助项目(12521057)
作者简介：邵克勇(1970-)，男，河南淮阳人，副院长，教授，博士，主要研究方向为鲁棒控制、模糊控制及最优控制(shaokeyong@ tom. com)；张晓花(1987-)，女，吉林永吉人，硕士研究生，主要研究方向为鲁棒控制与非线性控制；李鑫(1979-)，男，黑龙江大庆人，主要研究方向为计算应用；陈峤郴(1986-)，男，河南郏县人，硕士研究生，主要研究方向为鲁棒控制与非线性控制.

系统模糊规则如下：

规则 i　如果 $v_1(t)$是 M_{i1}且…且 $v_p(t)$是 M_{ip}，那么

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t))x(t)+(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)) \\ x(t-d(t))+(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))u(t)+ \\ (B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))u(t-d(t))+D_i w(t) \\ y_i(t)=C_i x(t)\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{1}$$

式中：$i=1,2,\cdots,n$，n 是模糊规则数；$v_p(t)$是可测的系统变量，即模糊规则的前件变量；时变时滞 $d(t)\geqslant 0$，且 $\dot{d}(t)\leqslant h<1$；$\boldsymbol{x}(t)\in R^m$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^n$ 是系统的控制输入向量，$\boldsymbol{y}(t)\in R^p$ 是系统的输出，$\boldsymbol{w}(t)\in R^q$ 是属于 $L_2[0,\infty)$空间的干扰输入向量；$\boldsymbol{A}_{1i}$、$\boldsymbol{A}_{2i}$、$\boldsymbol{B}_{1i}$、$\boldsymbol{B}_{2i}$、$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{C}_i$ 分别为适当维数的实矩阵，$\Delta\boldsymbol{A}_{1i}$、$\Delta\boldsymbol{A}_{2i}$、$\Delta\boldsymbol{B}_{1i}$、$\Delta\boldsymbol{B}_{2i}$为系统参数不确定性，并且满足：

$$[\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t)\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t)\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t)\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t)]=\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}_i(t)[E_{1i}E_{2i}E_{3i}E_{4i}]$$

其中：$\boldsymbol{F}_i(t)$是未知函数矩阵，并且每个元素是 Lebesgue 可测的，满足 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_i(t)\leqslant\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$是适当维数的单位矩阵。

采用单点模糊化、乘积推理及平均加权反模糊化[6]，可得模糊 T-S 模型系统的整体状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(v(t))\,[(\boldsymbol{A}_{1i}+\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t))\boldsymbol{x}(t)+ \\ (\boldsymbol{A}_{2i}+\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t))\boldsymbol{x}(t-d(t))+ \\ (\boldsymbol{B}_{1i}+\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t))\boldsymbol{u}(t)+(\boldsymbol{B}_{2i}+\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t)) \\ \boldsymbol{u}(t-d(t))+D_i\boldsymbol{w}(t)] \\ y_i(t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(v(t))C_i x(t)\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{2}$$

式中：$v(t)=[v_1(t)v_2(t)\cdots v_p(t)]$，$h_i(v(t))=\mu_i(v(t))/\sum_{i=1}^{n}\mu_i(v(t))\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}h_i(v(t))=1$，$\sum_{i=1}^{n}\mu_i(v(t))>0$，$\mu_i(v(t))\geqslant 0$，$\mu_i(v(t))=\prod_{j=1}^{p}M_{ij}(v_j(t))$，$M_{ij}(z_j(t))$表示前件变量 $z_j(t)$对应于模糊集合 M_{ij}的录属度。

按照 PDC 算法[7]，分别对系统的局部设计状态反馈控制器，其反馈控制器的前提条件与整个系统模型的前提条件相同，即

规则 i　如果 $v_1(t)$是 M_{i1}且…且 $v_p(t)$是 M_{ip}，那么

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{K}_i$ 为状态反馈增益矩阵。整个模糊控制器为

$$\boldsymbol{u}(t)=-\sum_{i=1}^{n}h_i(v(t))\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

将式(4)代入式(2)，可得到整个闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i(v(t))h_j(v(t))[(\boldsymbol{A}_{1i}+\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t)) \\ &\boldsymbol{x}(t)-(\boldsymbol{B}_{1i}+\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t))\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_{2i}+\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t)) \\ &\boldsymbol{x}(t-d(t))-(\boldsymbol{B}_{2i}+\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t))\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}(t-d(t))+D_i\boldsymbol{w}(t)]\end{aligned} \tag{5}$$

实际系统在运行过程中难免某些部件会失效，考虑执行器可能失效的故障情形，引入开关阵 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)$。

$$l_i=\begin{cases}0 & \text{第 } i \text{ 个执行器失效} \\ 0<l_i<1 & \text{第 } i \text{ 个执行器局部失效}\quad i=1,2,\cdots,n \\ 1 & \text{第 } i \text{ 个执行器正常}\end{cases}$$

把该故障放在输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$之间。因此，具有执行器故障的闭环模糊系统式(5)可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i(v(t))h_j(v(t))\,[(\boldsymbol{A}_{1i}+\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t)) \\ &\boldsymbol{x}(t)-(\boldsymbol{B}_{1i}+\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t))\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_{2i}+ \\ &\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t)\boldsymbol{x}(t-d(t))-(\boldsymbol{B}_{2i}+\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t))\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j \\ &\boldsymbol{x}(t-d(t))+D_i\boldsymbol{w}(t)]\end{aligned} \tag{6}$$

对双时变时滞不确定非线性系统的鲁棒 H_∞ 容错控制，就是设计一个 H_∞ 状态反馈控制器式(4)，使得当执行器失效时，闭环系统式(6)满足以下条件：

a）当扰动信号 $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时，闭环系统渐近稳定。

b）在零初始条件下，对任意非零的外部扰动 $\boldsymbol{w}(t)\in\boldsymbol{L}_2[0,\infty)$和给定的 H_∞ 性能指标 $\gamma>0$，满足$\int_0^\infty\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2\mathrm{d}t\leqslant\gamma^2\int_0^\infty\|\boldsymbol{w}(t)\|_2^2\mathrm{d}t$，$\|\cdot\|_2-\boldsymbol{L}_2[0,\infty)$范数。

满足条件 a）b）的系统(6)称做鲁棒 H_∞ 是稳定的，并且模糊控制器式(4)称为系统式(6)的鲁棒 H_∞ 控制器。

2　系统设计

本章将给出当执行器发生故障情况下，保证系统渐近稳定和满足 H_∞ 性能指标的充分条件，并基于 Lyapunov 稳定性理论和应用线性矩阵不等式(LMI)技术给出状态反馈控制器的算法。首先给出证明过程中用到的引理。

引理1[8]　给定具有适当维数的常数矩阵 $\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{D}$和 $\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{Y}$是对称的，则

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{E}+[\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{E}]^{\mathrm{T}}<0 \tag{7}$$

对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\sigma)\boldsymbol{F}(\sigma)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}(\sigma)$成立，当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得下面的不等式成立：

$$\boldsymbol{Y}+\varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0 \tag{8}$$

定理1　考虑由执行器故障构成的闭环系统式(6)，假设 $\boldsymbol{w}(t)=0$，如果存在对称矩阵 $\boldsymbol{X}>0$，矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}>0$ 和常数 $\varepsilon_i>0$，满足下列不等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{A}_{2i}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}_j & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{3i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M} \\ * & -(1-h)\bar{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{4i}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}_j-\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{R}}$。

则当执行器失效时，存在反馈控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}_j=\boldsymbol{Y}_j\boldsymbol{X}^{-1}$，使得该模糊故障闭环系统是鲁棒渐近稳定的。

证明　取 Lyapunov 泛函如下：

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-\mathrm{d}(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

其中：$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 为正定矩阵。沿着式(6)对 Lyapunov 函数求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)- \\ &(1-\dot{d}(t))x^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-d(t))\leqslant \\ &\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)- \\ &(1-h)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))R\boldsymbol{x}(t-d(t))= \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i(\boldsymbol{v}(t))h_j(\boldsymbol{v}(t))\,[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}_{1i}+ \\ &\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t)-(\boldsymbol{B}_{1i}+\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t))\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+ \\ &\boldsymbol{x}^{T}(t-d(t))(\boldsymbol{A}_{2i}+\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t)-(\boldsymbol{B}_{2i}+ \\ &\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t))\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_{1i}+ \\ &\Delta\boldsymbol{A}_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta\boldsymbol{B}_{1i}(t))\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j)x(t)+ \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_{2i}+\Delta\boldsymbol{A}_{2i}(t)-(\boldsymbol{B}_{2i}+\Delta\boldsymbol{B}_{2i}(t)) \\ &\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_j)\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)-(1-h) \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-d(t))]= \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i(v(t))h_j(v(t))\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-d(t))\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &\begin{bmatrix}\Gamma_1\Gamma_2 \\ \Gamma_3\Gamma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-d(t))\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

其中：

$$\Gamma_1=(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)^{\mathrm T}P+P(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)+R$$
$$\Gamma_2=P(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))LK_j)$$
$$\Gamma_3=(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))LK_j)^{\mathrm T}P$$
$$\Gamma_4=-(1-h)R$$

如果能使式(11)的中间表达式矩阵是负定的，即 $\dot V(x(t))<0$，则模糊故障闭环系统式(6)是渐近稳定的。由引理 1 把式(11)的中间矩阵进一步写为

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\Gamma_1&\Gamma_2\\ \Gamma_3&\Gamma_4\end{bmatrix}=\Phi+\begin{bmatrix}\Omega_1&\Omega_2\\ \Omega_3&0\end{bmatrix}=\\&\Phi+\begin{bmatrix}PM\\0\end{bmatrix}F(t)[E_{1i}-E_{3i}LK_j\quad E_{2i}-E_{4i}LK_j]+\\&[E_{1i}-E_{3i}LK_j\quad E_{2i}-E_{4i}LK_j]^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix}PM\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}\leqslant\\&\Phi+\varepsilon_i\begin{bmatrix}PM\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}+\varepsilon_i^{-1}[E_{1i}-E_{3i}LK_j\ E_{2i}-E_{4i}LK_j]^{\mathrm T}\\&[E_{1i}-E_{3i}LK_j\ E_{2i}-E_{4i}LK_j]<0\end{aligned}\tag{12}$$

式中：

$$\Omega_1=P\Delta A_{1i}(t)+\Delta A_{1i}^{\mathrm T}(t)P-P\Delta B_{1i}(t)LK_j-(\Delta B_{1i}(t)LK_j)^{\mathrm T}P$$
$$\Omega_2=P\Delta A_{2i}(t)-P\Delta B_{2i}(t)LK_j$$
$$\Omega_3=\Delta A_{2i}^{\mathrm T}(t)P-(\Delta B_{2i}(t)LK_j)^{\mathrm T}P$$

其中：

$$\Phi=\begin{bmatrix}PA_{1i}+A_{1i}^{\mathrm T}P-PB_{1i}LK_j-(B_{1i}LK_j)^{\mathrm T}P+R & PA_{2i}-PB_{2i}LK_j\\ A_{2i}^{\mathrm T}P-(B_{2i}LK_j)^{\mathrm T}P & -(1-h)R\end{bmatrix}$$

对式(12)应用 Schur 补可得

$$\begin{bmatrix}W&PA_{2i}-PB_{2i}LK_j&(E_{1i}-E_{3i}LK_j)^{\mathrm T}&PM\\ *&-(1-h)R&(E_{2i}-E_{4i}LK_j)^{\mathrm T}&0\\ *&*&-\varepsilon_iI&0\\ *&*&*&-\varepsilon_i^{-1}I\end{bmatrix}<0\tag{13}$$

式中：$W=PA_{1i}+A_{1i}^{\mathrm T}P-PB_{1i}LK_j-(B_{1i}LK_j)^{\mathrm T}P+R$，$*$ 表示由矩阵的对称性而得到的块矩阵。

分别对式(13)左、右同乘对角阵 $\mathrm{diag}(P^{-1},P^{-1},P^{-1},I)$，并设 $X=P^{-1}$，$XRX=\bar R$，$K_jX=Y_j$，可得式(9)，定理得证。

定理 2　考虑由执行器故障构成的闭环系统式(6)，当 $w(t)\neq0$，给定常数 γ，如果存在对称矩阵 $X>0$，矩阵 $\bar R>0$ 和常数 $\varepsilon_i>0$，满足下列不等式：

$$\begin{bmatrix}W_2&A_{2i}X-B_{2i}LY_j&XE_{1i}^{\mathrm T}-Y_j^{\mathrm T}L^{\mathrm T}E_{3i}^{\mathrm T}&XC_i^{\mathrm T}&D_iX&M\\ *&-(1-h)\bar R&XE_{2i}^{\mathrm T}-Y_j^{\mathrm T}L^{\mathrm T}E_{4i}^{\mathrm T}&0&0&0\\ *&*&-\varepsilon_iI&0&0&0\\ *&*&*&-I&0&0\\ *&*&*&*&-\gamma^2I&0\\ *&*&*&*&*&-\varepsilon_i^{-1}I\end{bmatrix}<0\tag{14}$$

式中：$W_2=A_{1i}X+XA_{1i}^{\mathrm T}-B_{1i}LY_j-Y_j^{\mathrm T}L^TB_{1i}^{\mathrm T}+\bar R$。

则存在状态反馈增益 $K_j=Y_jX^{-1}$，使得该模糊故障闭环系统是鲁棒渐近稳定的，并具有 H_∞ 性能 γ。

证明　在零初始条件下，考虑

$$J=\int_0^t[y^{\mathrm T}(t)y(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t)]\mathrm dt\tag{15}$$

则对于任意非零的外部扰动 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，利用 Lyapunov 泛函式(10)和零初始条件，可以推导出

$$\begin{aligned}J&=\int_0^t[y^{\mathrm T}(t)y(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t)+\dot V(x(t))]\mathrm dt-V(x(t))\leqslant\\&\int_0^t[y^{\mathrm T}(t)y(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t)+\dot V(x(t))]\mathrm dt\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&y^{\mathrm T}(t)y(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t)+\dot V(x(t))=\\&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nh_i(v(t))h_j(v(t))\{x^{\mathrm T}(t)\\&[(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)^{\mathrm T}P+\\&P(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)+C_i^{\mathrm T}C_i+\\&R]x(t)+x^{\mathrm T}(t-d(t))(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-(B_{2i}+\\&\Delta B_{2i}(t))LK_j)^{\mathrm T}Px(t)+x^{\mathrm T}(t)P(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-\\&(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))LK_j)x(t-d(t))-(1-h)\\&x^{\mathrm T}(t-d(t))Rx(t-d(t))+\\&x^{\mathrm T}(t)PD_iw(t)+w^{\mathrm T}(t)D_i^{\mathrm T}Px(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t)\}=\\&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nh_i(v(t))h_j(v(t))\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d(t))\\w(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\\&\begin{bmatrix}\psi_1&\psi_2&PD_i\\ \psi_3&-(1-h)R&0\\ D_i^{\mathrm T}P&0&-\gamma^2I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d(t))\\w(t)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{17}$$

其中：

$$\psi_1=(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)^{\mathrm T}P+P(A_{1i}+\Delta A_{1i}(t)-(B_{1i}+\Delta B_{1i}(t))LK_j)+C_i^{\mathrm T}C_i+R$$
$$\psi_2=P(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))LK_j)$$
$$\psi_3=(A_{2i}+\Delta A_{2i}(t)-(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))LK_j)^{\mathrm T}P$$

如果式(17)中间矩阵表达式小于 0，即满足性能指标 $J<0$。使用与定理 1 相类似的证明方法，同时应用 Schur 补性质，再分别对矩阵左、右同乘：$\mathrm{diag}(P^{-1},P^{-1},P^{-1},P^{-1},I,I)$，可以得到矩阵不等式(14)，则

$$\int_0^ty^{\mathrm T}(t)y(t)\mathrm dt<\gamma^2\int_0^tw^{\mathrm T}(t)w(t)\mathrm dt\leqslant\gamma^2\int_0^\infty w^{\mathrm T}(t)w(t)\mathrm dt$$

定理得证。

3　数值仿真

考虑文献[9]的非线性系统：

$$\begin{aligned}\dot x_1(t)=&-0.1x_1^3(t)-0.0125x_1(t-h(t))-0.02x_2(t)-\\&0.067x_2^3(t)-0.1x_2^3(t-h(t))-0.005x_2(t)\\&(t-h(t))+0.5u_1(t)+0.5w(t)\\ \dot x_2(t)=&x_1(t)+u_2(t)+w(t)\\ y(t)=&0.1x_1(t)\end{aligned}\tag{18}$$

对系统进行建模，$x_1(t)$ 取极大 N_1 和极小 N_2 两个模糊集合，其隶属度函数为

$$M_{11}(x_1(t))=\frac{x_1(t)-N_2}{N_1-N_2},M_{12}(x_1(t))=\frac{N_1-x_1(t)}{N_1-N_2}$$

含有双时变时滞不确定连续状态非线性系统采用下面的 T-S模糊规则：

规则 1　如果 $x_1(t)$ 是 M_{11}，则

$$\begin{cases}\dot x(t)=(A_{11}+\Delta A_{11}(t))x(t)+(A_{21}+\Delta A_{21}(t))\\ x(t-d(t))+(B_{11}+\Delta B_{11}(t))u(t)+\\ (B_{21}+\Delta B_{21}(t))u(t-d(t))+D_1w(t)\\ y(t)=C_1x(t)\end{cases}$$

规则 2　如果 $x_1(t)$ 是 M_{12}，则

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A_{12}+\Delta A_{12}(t))\boldsymbol{x}(t)+(A_{22}+\Delta A_{22}(t)) \\ \boldsymbol{x}(t-d(t))+(B_{12}+\Delta B_{12}(t))u(t)+ \\ (B_{22}+\Delta B_{22}(t))u(t-d(t))+D_2\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t)=C_2\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t)]^{\mathrm{T}}$，有

$A_{11}=\begin{bmatrix}-0.3 & -0.5\\ 0.6 & -0.8\end{bmatrix}$，$A_{12}=\begin{bmatrix}-0.3 & -0.4\\ 0.6 & -0.8\end{bmatrix}$，$A_{21}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$，$A_{22}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$，$B_{11}=B_{12}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix}$，$B_{21}=B_{22}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，$D_1=D_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$，$C_1=C_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$，$E_{1i}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$，$E_{2i}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}$，$E_{3i}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$，$E_{4i}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$，$F(t)=\sin(t)$，$N_1=5$，$N_2=-5$。

给定的性能指标 $\gamma=1.6815$，针对不同的执行器故障模式情况，矩阵 $L_1=\mathrm{diag}(1,1)$、$L_2=\mathrm{diag}(0.4,0.6)$、$L_3=\mathrm{diag}(0,1)$、$L_4=\mathrm{diag}(1,0)$、$L_5=\mathrm{diag}(0,0)$ 分别表示执行器正常、局部失效、执行器 1 失效、执行器 2 失效和完全失效的故障情形。引入模糊控制器式(4)，通过求解线性矩阵不等式(14)得到：$\varepsilon_i=2.8276$。

状态反馈增益矩阵为

$$K_j=\begin{bmatrix}29.0071 & -9.5587\\ -26.6897 & 11.7714\end{bmatrix}$$

正定矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}0.1864 & 0.1892\\ 0.1892 & 0.7864\end{bmatrix},\bar{R}=\begin{bmatrix}4.5320 & 0.3385\\ 0.4214 & 4.5261\end{bmatrix}$$

设初始状态 $[x_1(t),x_2(t)]=[3,-2]$，当扰动 $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时，可以得到各种故障矩阵所对应的系统输出曲线，如图 1～4 所示。当取扰动 $\boldsymbol{w}(t)=\sin(0.01t)$ 时，故障矩阵所对应的系统输出曲线如图 5～8 所示。

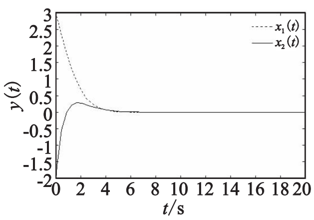

图1　执行器局部失效时系统的输出

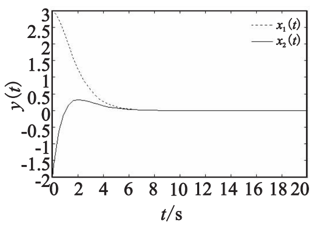

图2　执行器1失效时系统的输出

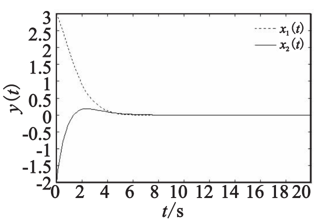

图3　执行器2失效时系统的输出

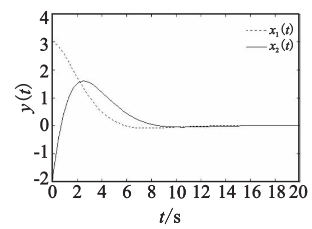

图4　执行器全部失效时系统的输出

通过以上的仿真结果表明，当系统发生执行器失效后，非线性系统在模糊控制器式(4)的作用下能够实现系统的鲁棒容错控制，并且能够满足鲁棒 H_∞ 性能指标。此外，通过以上仿真实例对比系统在无外部扰动和有外部扰动时的输出曲线，结果表明，系统在有外部扰动的情况下闭环故障系统仍然能很快地达到稳定状态，达到了预期的控制目的，证明了本文所提方法的有效性。

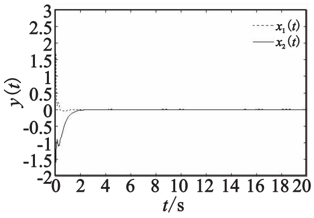

图5　执行器局部失效时系统的输出

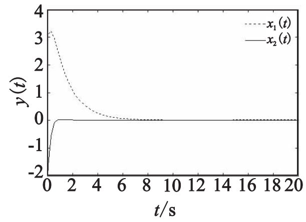

图6　执行器1失效时系统的输出

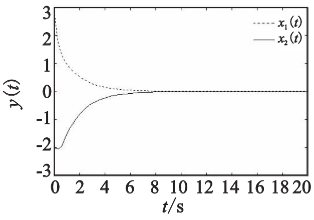

图7　执行器2失效时系统的输出

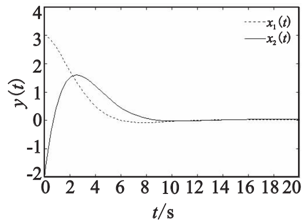

图8　执行器全部失效时系统的输出

4　结束语

本文采用了 T-S 模糊模型对非线性系统进行建模，利用 PDC 方法设计了模糊容错控制器，针对状态和控制输入同时具有时变时滞的连续非线性系统的鲁棒 H_∞ 进行了研究。当系统存在执行器局部或者完全失效故障的情况下，引入了故障矩阵模型，同时应用 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 技术，给出了模糊状态反馈控制器存在的充分条件，进一步给出了当系统存在外部扰动时系统鲁棒渐近稳定的充分条件，并且满足 H_∞ 性能指标。仿真结果表明了本文所提出控制方法的有效性。

参考文献：

[1] YE Si-jun, ZHANG You-min, WANG Xin-min, *et al*. Fault-tolerant control for a class of uncertain systems with actuator faults[J]. Tsinghua Science and Technology, 2010, 15(2): 174-183.

[2] LI Jun-quan, KUMAR K D. Decentralized fuzzy fault tolerant control for multiple satellites attitude synchronization[C]//Proc of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2011: 1836-1843.

[3] ZHANG Hua-guang, LUNG S X, LIU De-rong. Fuzzy H_∞ filter design for a class of nonlinear discrete-time systems with multiple time delays[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(3): 453-469.

[4] TONG Shao-cheng. Robust fault tolerant fuzzy control for nonlinear systems with sensor failures[C]//Proc of International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2007: 604-609.

[5] 尹作友，张化光. 基于模糊 T-S 模型的非线性系统的 H_∞ 鲁棒容错控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(6): 813-818.

[6] SALA A, ARINO C. Relaxed stability and performance LMI conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with polynomial constraints on membership function shapes[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2008, 16(5): 1328-1336.

[7] 佟绍成，王涛，王艳平，等. 模糊控制系统的设计及稳定性分析[M]. 北京：科学出版社, 2004.

[8] 方晨. 不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制及仿真[J]. 计算机仿真, 2011, 28(3): 231-233, 258.

[9] LEE K R, KIM J H, JEUNG E T, *et al*. Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 657-664.