

复杂网络中选举免疫策略研究*

张昊¹, 蔡山¹, 谢斐¹, 张慧²

(1. 国防科学技术大学 信息系统工程重点实验室, 长沙 410073; 2. 南京电讯技术研究所, 南京 210007)

摘要: 受现代社会选举制度启发,提出了一种新的节点免疫策略,提出的选举免疫策略按节点得票数量多少选择节点并免疫。基于消息传递方法,给出了大规模配置模型网络上 SIR 传染病模型的选举免疫策略的数学解析,并比较了选举免疫、随机免疫、目标免疫和熟人免疫策略的效果。数学解析结果和仿真结果表明,选举免疫能够有效控制疾病在无标度网络上的传播。

关键词: 选举免疫; 复杂网络; 传染病模型; 免疫

中图分类号: O231.5; N945.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)05-1303-03

doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2013.05.005

Voting immunization strategy on complex networks

ZHANG Hao¹, CAI Shan¹, XIE Fei¹, ZHANG Hui²

(1. Science & Technology on Information Systems Engineering Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. Nanjing Telecommunication Technology Institute, Nanjing 210007, China)

Abstract: Inspired by modern voting systems, this paper proposed an effective immunization strategy, which called for the immunization of nodes in decreasing order of their votes. This paper studied the voting immunization strategy with respect to the susceptible-infected-removed epidemic model, and got an exact mathematical analysis on configuration model networks in the large size limit. It also compared the voting immunization strategy with random immunization, targeted immunization and acquaintance immunization. Experiment results show that the voting immunization strategy is very efficient in scale-free networks.

Key words: voting immunization; complex networks; epidemic model; immunization

0 引言

传播现象是现实世界中一类重要的动力学过程。传染病、流言、计算机病毒等具有相似的传播规律和动力学原理,引起了医学、计算机学和社会学等研究者的广泛关注。目前,传播现象通常结合复杂网络和传染病模型进行研究。复杂网络模型用来抽象人群的社会接触,传染病模型定义传播现象的动力学方程。传播现象对社会有重要的影响,如何预测和控制其发展过程具有重要的意义。

复杂网络传播动力学取得了大量的研究成果。当网络规模趋近无限时, Pastor-Satorras 及 Boguñá 等人^[1,2]指出无标度网络^[3]的 SIS (susceptible-infected-susceptible) 传染病模型传播阈值趋近于 0; Newman 及 May 等人^[4,5]指出无标度网络的 SIR (susceptible-infected-removed) 传染病模型传播阈值趋近于 0。人们的社会接触网络具有无标度特性,无标度网络的传播阈值为 0,从而传染病、谣言、计算机病毒等在现实世界中难以灭绝。

控制复杂网络中的传播现象具有重要的意义。复杂网络中 SIR 模型与逾渗问题在本质上是相似的, SIR 模型中免疫节点和逾渗问题中节点失效是对等的^[4,6]。研究表明无标度网络对随机故障具有鲁棒性,但对蓄意攻击则非常脆弱^[7-10]。

在传播模型中,随机免疫是指从网络中随机选择部分节点并将之免疫;目标免疫是指选择度最大的部分节点进行免疫,它能够大大降低传染病的感染规模^[11]。目标免疫需要知道网络中各节点度的大小,然而,社会接触网络的全局结构信息通常难以精确获得。因此, Cohen 等人^[12]提出了熟人免疫策略,即从网络中随机选择节点,再从该节点随机选择一条边,并将该边指向的节点免疫;由于度大的节点比度小的节点更可能被选择,从而熟人免疫的效果优于随机免疫;熟人免疫策略只需要知道网络的局部信息,从而相对于目标免疫更容易实施。Stauffer 等人^[13]提出了基于启发式信息的免疫传播策略,即当某一节点被免疫后,依据某种启发式规则(如节点的度)选择其部分邻居免疫,该策略比较适合疫苗易于在局部复制的情况,如计算机网络中反病毒软件的安装。Gallos 等人^[14]研究了改进免疫策略,即从网络中随机选择节点,然后从该节点的邻居中随机选择性个满足以下要求的节点进行免疫:度大于该节点;度大于某一特定值。改进免疫策略的效果接近目标免疫策略,但其需要知道相关节点的度大小。在社会生活中,个体往往由于利益驱动,从而会向免疫策略实施者提供对自己有利的信息,而不是如实提供信息,如夸大自己的度从而获得更高的免疫概率。

选举制度是现代民主社会的重要基石,目前提出了多种投

收稿日期: 2012-08-29; **修回日期:** 2012-11-07 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(60904065, 61105124)

作者简介: 张昊(1983-),男,江苏连云港人,博士研究生,主要研究方向为复杂网络传播动力学(zhanghaocs@hotmail.com);蔡山(1982-),男,博士研究生,主要研究方向为社会设计工程、信息系统工程;谢斐(1983-),男,博士研究生,主要研究方向为社会网络分析;张慧(1982-),男,硕士研究生,主要研究方向为复杂网络、信息系统。

票选举方法。通过投票选举,可以公平地从多个候选方案选择出支持率高的方案。受选举制度的启发,本文研究了复杂网络上 SIR 模型中的选举免疫策略,初始时节点分配一定数量的选票,然后依据某种规则投票给邻居节点,最后根据各节点得票数量决定其是否被免疫。

1 选举免疫策略

人们的社会接触网络一般抽象为无向网络,节点表示个体,边表示个体之间的接触。因为个体之间的接触行为是相互的,一般用无向边表示接触行为。社会接触网络可以表示为网络 $G(N, E)$, 其中, N 代表节点集合, E 代表边集合。

在 SIR 传染病模型中,个体状态分为易感染态 (susceptible)、感染态 (infected) 和移除态 (removed) 三种。易感染态个体不具有传染性,接触病原体时以某概率被感染,从而进入感染态;感染态个体具有传染性,感染态个体以某概率康复或死亡,不再具有传染性,即进入移除态。

选举免疫策略步骤如下:a)从网络中选择部分节点,记为集合 A ,为集合 A 中每个节点分配一定数量的选票;b)各节点依据某规则将选票投给自己的邻居节点;c)统计各节点的得票数量,按得票数量多少选择节点免疫。选举免疫策略的优势一方面在于不需要完全知道网络结构的精确信息,另一方面,在一定程度上避免了改进免疫策略^[14]中存在的问题,即各节点往往夸大自己的度来获得免疫机会。

如果选举免疫策略在步骤 a) 中选择的节点集合等于 N ,各节点分配到的票数等于自己的度,步骤 b) 中各节点向自己的每一个邻居投一张选票,则步骤 c) 中各节点的得票数量等于各自的度,从而使得该情况下的选举免疫策略等价于目标免疫策略。如果步骤 a) 中随机选择部分节点并分配选票,步骤 b) 中各节点向邻居节点随机投票,步骤 c) 中得票数量不为 0 的节点被免疫,则该情况下选举免疫策略类似于熟人免疫。

下文详细考察一类较为简单的选举免疫策略实现:a)从网络中随机选择部分节点,记为集合 A ,各节点分配一张选票;b)节点将选票随机投给某邻居;c)统计各节点的得票数量,按得票数量多少选择节点免疫。记上述策略为简单选举免疫策略。

2 数学解析

本章着重分析由配置模型网络^[6]生成的社会接触网络中的简单选举免疫策略。配置模型网络是一种重要的复杂网络生成模型,其生成步骤如下:a)根据给定的网络规模 N 和度分布 $p(k)$,赋予每个节点 i 相应的度 k_i ;b)根据每个节点 i 的度 k_i 为每个节点分配 k_i 根辐条(从节点 i 出发但未连接其他节点的边);c)随机连接所有辐条,形成网络。配置网络模型能够生成满足任意度分布的复杂网络,其节点间是否连接是随机的,概率由节点的度决定。

2.1 节点选票分布

在配置模型网络中,记节点度分布为 $p(k)$,记简单选举免疫策略中参与投票的节点比例为 $\theta = |A|/|N|$,则度为 k 的节点得到 v 张选票的条件概率分布为

$$P(v|k) = C_k^\theta \theta^v (1-\theta)^{k-v} \tag{1}$$

随机选择一节点,其度为 k 且得到 v 张选票的联合概率分布为

$$P(v, k) = p(k)P(v|k) \tag{2}$$

随机选择一节点,其得到 v 张选票的概率分布为

$$P(v) = \sum_k P(v, k) \tag{3}$$

假定得票大于 v^* 的节点被免疫,则度为 k 的节点被免疫的概率为

$$U(k) = \sum_{v>v^*} P(v|k) \tag{4}$$

下一节将在节点免疫概率比例已知条件下对 SIR 传染病模型进行分析求解。

2.2 感染过程解析

在 SIR 传染病模型中,记易感染态个体接触病原载体时发生疾病传播的概率密度函数为 $s(t)$, $s(t)dt$ 表示易感染态个体开始持续接触病原载体后,在时间 $[t, t + dt]$ 内被疾病感染的概率;记康复函数为 $r(t)$, $r(t)dt$ 表示感染态个体在被感染后的时间 $[t, t + dt]$ 内康复的概率。 $s(t)$ 和 $r(t)$ 可以是任意形式的概率密度函数。

在感染后的时间 $[t, t + dt]$ 内,感染者向其处于易感染态的邻居传播疾病的概率记为 $f(t)dt$:

$$f(t)dt = s(t)(1 - \int_0^t r(\tau)d\tau)dt = s(t) \int_t^{+\infty} r(\tau)d\tau dt \tag{5}$$

初始时,网络中有少量节点感染疾病,假定感染节点比例为 $1-z$;由于实施简单选举免疫策略,度为 k 的其余节点以 $U(k)$ 的概率被直接免疫。

在简单选举免疫策略中,节点免疫比例为 g 和免疫临界值为 v^* ,当节点获得选票数 $v > v^*$ 时,节点被选择直接免疫,从而得到式(6),其中 $P(v)$ 为节点得票数量分布。

$$g = z \sum_{v>v^*} P(v) \tag{6}$$

再根据式(4)可以计算出度为 k 的节点被免疫的概率 $U(k)$ 。

在配置模型网络^[6]中,随机选择一条边,该边指向度为 k 节点的概率为

$$Q(k) = kp(k) / \sum k'p(k') = kp(k) / \langle k \rangle \tag{7}$$

记 $H_{k-}(t)$ 表示从度为 k 节点出发的一条边在 t 时刻内没有传播疾病的概率,基于消息传递方法^[15]和空穴理论^[16],如图 1(a) 所示,可以得到

$$H_{k-}(t) = 1 - (1-z) \int_0^t f(\tau)d\tau - z(1-U(k)) \int_0^t f(\tau)(1 - (\sum_m Q(m)H_{m-}(t-\tau))^{k-1})d\tau \tag{8}$$

其中:项 $(1-z) \int_0^t f(\tau)d\tau$ 表示度为 k 节点在初始时处于被感染态条件下,在时间 $[0, t]$ 内向某一邻居传播疾病的概率;项 $z(1-U(k)) \int_0^t f(\tau)(1 - (\sum_m Q(m)H_{m-}(t-\tau))^{k-1})d\tau$ 表示度为 k 的节点在初始时处于易感染态条件下,在时间 $[0, t]$ 内向某一邻居传播疾病的概率;项 $z(1-U(k))$ 表示度为 k 节点初始时处于易感染态且没有被直接免疫的概率;项 $(1 - (\sum_m Q(m) \times H_{m-}(t-\tau))^{k-1})$ 表示度为 k 节点的邻居在时间 $[0, t-\tau]$ 内向该节点传播疾病的概率(不包括该节点将要传播的某邻居节点 m_i)。在时间 $[0, t]$ 上对 τ 进行积分,则得到该节点在时间 $[0, t]$ 内向某一邻居传播疾病的概率。

令 $H(t) = \sum_m Q(m)H_{m-}(t)$, 得到

$$H(t) = \sum_m Q(m)H_{m-}(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)(1-z)d\tau - z \sum_m \{Q(m)(1 - U(m)) \int_0^t f(\tau)(1 - (H(t-\tau))^{m-1})d\tau\} \tag{9}$$

在初始时刻 $t=0$,没有发生疾病传播,从而 $H(0) = 1$,基于式(9)可以对 $H(t)$ 进行数值求解。

令 $P(S_k(t) = 1)$ 表示度为 k 的节点在 t 时刻处于易感染态的概率, 记为 $P(S_k)$ 。如图 1(b) 所示, 节点处于易感染态的概率由初始状态 $z(1 - U(k))$ 和其邻居节点没有对其的传播的概率 $(H(t))^k$ 共同决定。

$$P(S_k) = z(1 - U(k))(H(t))^k \quad (10)$$

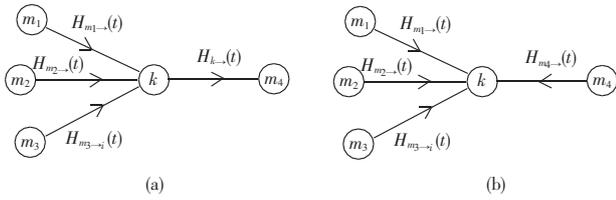


图 1 消息传递方法示意图

令 $P(I_k(t) = 1)$ 表示度为 k 的节点在 t 时刻处于感染态的概率, 简记为 $P(I_k)$ 。根据 SIR 传染病动力学可得

$$\frac{dP(I_k)}{dt} = -\frac{dP(S_k)}{dt} - (1 - z)r(t) + \int_0^t r(t - \tau) \frac{dP(S_k)}{d\tau} d\tau \quad (11)$$

令 $P(R_k(t) = 1)$ 表示度为 k 的节点在 t 时刻处于移除态的概率, 简记为 $P(R_k)$ 。由于节点处于易感染态、感染态、移除态和直接免疫态的概率之和为 1, 从而

$$P(R_k) = 1 - P(S_k) - P(I_k) - U(k) \quad (12)$$

令 $P(S(t) = 1)$ 、 $P(I(t) = 1)$ 和 $P(R(t) = 1)$ 分别表示 t 时刻网络中节点处于易感染态、感染态、移除态的平均概率, 简记为 $P(S)$ 、 $P(I)$ 和 $P(R)$, 则

$$\begin{cases} P(S) = \sum_k p(k)P(S_k) \\ P(I) = \sum_k p(k)P(I_k) \\ P(R) = \sum_k p(k)P(R_k) \end{cases} \quad (13)$$

综合以上分析, 当确定网络的度分布和简单选举免疫策略相关参数后, 可以计算出节点得票数相关的概率分布 $P(v, t)$ 、 $P(v)$ 和 $P(v|k)$ 。对于给定的总体免疫比例 g , 可以计算出临界值 v^* 和度为 k 的节点直接免疫概率 $U(k)$, 再根据式(8) ~ (13), 数学解析出网络中节点在 t 时刻处于易感染态、感染态、移除态的平均概率。

3 仿真实验

实验目的: a) 比较相同总体免疫比例条件下, 随机免疫、目标免疫、熟人免疫和简单选举免疫策略对传染病发展过程的影响, 并详细考察简单选举免疫策略中不同参与选举比例对传染病的影响; b) 验证本文提出的基于消息传递方法的数学解析的准确性。

实验以服从幂律分布的配置模型网络为平台, 网络规模 $|N| = 90\ 000$, 度分布 $p(k) = ck^{-\alpha}$ 的参数 $\alpha = 2$, 度范围为 $[1, 300]$ 。传染病相关概率函数为 $s(t) = \beta e^{-\beta t}$ 和 $r(t) = \gamma e^{-\gamma t}$, 参数 $\beta = 1, r = 0.25$, 初始感染比例 $1 - z = 0.001$ 。

实验 1 考察随机免疫、目标免疫、熟人免疫和简单选举免疫策略对传染病发展过程的影响。节点总体免疫比例相同, 为 0.1。各免疫策略具体如下: a) 随机免疫策略, 从网络中随机选择节点并免疫, 免疫比例为 0.1; b) 目标免疫策略, 从度最大的节点开始免疫, 直到总体免疫比例达到 0.1; c) 熟人免疫策略, 随机选择节点, 然后免疫该节点的某邻居, 直到总体免疫比例达到 0.1; d) 简单选举免疫策略, 网络中有占比例为 0.2 的节点参与选举, 选民各有一张选票, 并随机投票给邻居节点, 最后按得票数量从大到小免疫节点, 直到总体免疫比例达到 0.1。

实验 1 的结果如图 2 所示, 其中实线代表解析结果, 各种形状代表仿真结果。数学解析结果和仿真结果基本吻合, 说明了提出的数学解析方法的准确性。图 2 中, (a) 考察了不同免疫策略下的节点感染比例, 从小到大分别为目标免疫 < 简单选举免疫 < 熟人免疫 < 随机免疫; (b) 考察了不同免疫策略下的节点移除比例, 从小到大分别为目标免疫 < 简单选举免疫 < 熟人免疫 < 均匀免疫。SIR 模型中最终时刻的移除者比例代表曾经被传染病感染过的节点总数。实验 1 表明, 当参选人数达到足够比例时, 简单选举免疫对传染病的抑制效果优于熟人免疫和随机免疫。

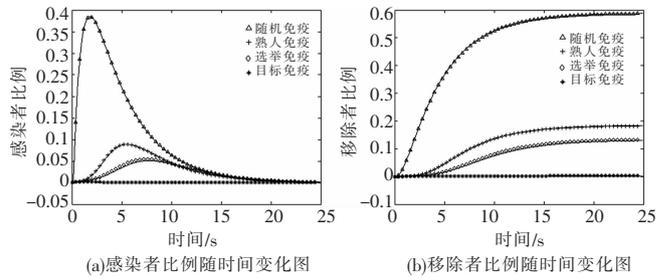


图 2 相同免疫比例条件下不同免疫策略的结果

实验 2 考察简单选举免疫策略情况下不同参选比例对策略结果的影响。节点总体免疫比例仍为 0.1, 参选比例分别为 0.0、0.1、0.2、0.4、0.8, 参选节点各有一张选票, 实验仿真和解析结果如图 3 所示, 在相同的总体免疫比例条件下, 参选比例越高, 简单选举免疫策略对传染病的抑制效果越好, 最终趋近于目标免疫。

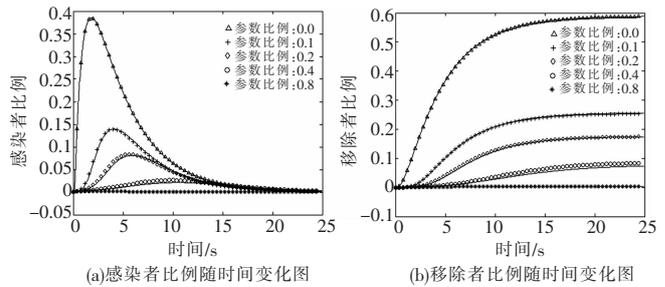


图 3 简单选举免疫策略中相同免疫比例条件下不同参选比例的结果

图 2 和 3 中的仿真和数学解析结果存在较小的误差, 其原因为: 对于度相同的节点, 邻居度较小的节点更容易获得更多的投票, 从而以更高概率被选择免疫, 即选举免疫策略中节点被直接免疫的概率由其邻居节点的个数和度的大小共同决定; 而数学解析方法采用平均场思想, 认为节点的各条边对该节点的得票数量贡献近似相同, 忽略了邻居节点度大小的影响, 从而产生了以上微小误差。

4 结束语

为减小复杂网络中的传染病、谣言、病毒等传播问题的危害, 本文提出了选举免疫策略, 并基于消息传递方法给出了简单选举免疫策略的数学解析。选举免疫策略基于网络中节点的投票, 选择得票最多的节点进行免疫。实验表明, 在无标度网络中, 节点总体免疫比例相同条件下, 参选比例越高, 选举免疫策略对传染病的抑制效果越好, 最终趋近于目标免疫。选举免疫策略不需要知道网络中各节点度的大小和网络结构的精细信息, 是对熟人免疫策略的进一步扩展, 具有较好的实用性。

4.2 对比分析

a) 对于优化问题 $f_1(x)$, 运用文献[9]提出的 BA 算法, 当 $n = 1000$ 时, 获得最优解 $[x_{\min}, x_{\max}] = [-1.21111900218162E-01, 2.119287120258219E-01]$, 全局最小值 $f_1(x) = 9.714917249015812E-02$, 整个求解过程耗时 28.73 h。

b) 对于优化问题 $f_2(x)$, 运用文献[15]提出的改进自组织迁移算法, 当 $n = 500$ 时, 获得最优解为 -0.854185 , 但耗时未公布; 运用本文提出的算法, 使用 TOSHIBA 笔记本电脑 (Intel Core i5-2430, CUP 2.40 GHz, Windows7 32 位操作系统), 耗时 0.47 h, 获得最优解为 -0.855219472519328 , 略优于文献[15]的解。

5 结束语

本文完成的工作如下:

a) 构造出的 MBA 算法在理论上可确保全局收敛性。

b) 发现可归约随机矩阵稳定性定理可用于指导构造具有全局收敛性的随机搜索算法, 即随机搜索从当前状态转移到下一个比当前状态更好的状态概率应大于 0, 并努力提升搜索策略质量以提高该概率值; 务必确保搜索转移到更坏状态上去的概率为 0。

c) 在目标函数和约束条件处理中应避免引入以 $e > 1$ 等为底的指数函数, 以防止计算溢出。

d) 局部最优解逃逸策略应小心构造, 此策略害处多于益处。

e) 提升初始解在搜索空间的分布质量, 对提高算法收敛速度大有好处。采用正交表技术构造初始解在理论上具有很大的优势。

不难看出, 本文提出的 MBA 算法对创建或改进其他随机搜索算法具有参考价值。

参考文献:

- [1] 王宜举, 修乃华. 非线性优化理论[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
 - [2] 黄光球, 王国政, 周静. 用遗传算法求解物流运输中多级中转定位优化问题[J]. 微电子学与计算机, 2006, 23(3): 47-50.
 - [3] 黄光球, 何星. 基于蚁群算法的随机 Petri 网最优路径序列寻找[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(17): 4555-4560.
 - [4] 李晓磊, 邵之江, 钱积新. 一种基于动物自治体的寻优模式: 鱼群算法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(11): 32-38.
 - [5] 崔志华, 曾建潮. 微粒群优化算法[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
 - [6] LEUNG S C H, ZHANG De-fu, ZHOU Chang-le, et al. A hybrid simulated annealing metaheuristic algorithm for the two-dimensional knapsack packing problem[J]. *Computed Operation Research*, 2012, 39(1): 64-73.
 - [7] SIMON D. Biogeography-based optimization[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2008, 12(6): 702-713.
 - [8] 朱燕飞, 胡夏云, 唐雄民. 基于群算法的过程参量聚类研究[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(26): 36-38, 59.
 - [9] YANG Xin-she. A new metaheuristic bat-inspired algorithm[M]// *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 65-74.
 - [10] 中国现场统计研究会三次设计组. 正交法和三次设计[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
 - [11] IISUFESCU M. Finite Markov processes and their applications[M]. Wiley: Chichester, 1980.
 - [12] 任子晖, 王坚, 高岳林. 马尔可夫链的粒子群优化算法全局收敛性分析[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 462-466.
 - [13] 贺毅朝, 王熙熙. 基于改进 DE 算法的难约束优化问题的求解[J]. 计算机工程, 2008, 34(13): 193-194.
 - [14] 王翔, 董晓马, 阎瑞霞, 等. 改进 DE/EDA 算法在求解难约束优化问题中的应用研究[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(11): 4114-4117.
 - [15] 林志毅, 王玲玲. 改进自组织迁移算法及其在 Bump 问题中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(19): 25-26, 35.
-
- (上接第 1305 页)
- 参考文献:
- [1] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(14): 3200.
 - [2] BOGUÑÁ M, PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(2): 028701.
 - [3] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
 - [4] NEWMAN M E J. Spread of epidemic disease on networks[J]. *Physical Review E*, 2002, 66(1): 016128.
 - [5] MAY R M, LLOYD A L. Infection dynamics on scale-free networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 64(6): 066112.
 - [6] NEWMAN M E J, STROGATZ S H, WATTS D J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications[J]. *Physical Review E*, 2001, 64(2): 026118.
 - [7] ALBERT R, JEONG H, BARABÁSI A L. Error and attack tolerance of complex networks[J]. *Nature*, 2000, 406(6794): 378-382.
 - [8] CALLAWAY D S, NEWMAN M E J, STROGATZ S H, et al. Network robustness and fragility: percolation on random graphs[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(25): 5468.
 - [9] COHEN R, EREZ K, BEN-AVRAHAM D, et al. Resilience of the Internet to random breakdowns[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(21): 4626.
 - [10] COHEN R, EREZ K, BEN-AVRAHAM D, et al. Breakdown of the Internet under intentional attack[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(16): 3682.
 - [11] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Immunization of complex networks[J]. *Physical Review E*, 2002, 65(3): 036104.
 - [12] COHEN R, HAVLIN S, BEN-AVRAHAM D. Efficient immunization strategies for computer networks and populations[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(24): 247901.
 - [13] STAUFFER A O, BARBOSA V C. Dissemination strategy for immunizing scale-free networks[J]. *Physical Review E*, 2006, 74(5): 056105.
 - [14] GALLOS L K, LILJEROS F, ARGYRAKIS P, et al. Improving immunization strategies[J]. *Physical Review E*, 2007, 75(4): 045104.
 - [15] KARRER B, NEWMAN M E J. Message passing approach for general epidemic models[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(1): 016101.
 - [16] SHIRAKI Y, KABASHIMA Y. Cavity analysis on the robustness of random networks against targeted attacks; influences of degree-degree correlations[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(3): 036101.