

# 基于分数阶偏微分方程的彩色图像去噪新方法\*

张富平<sup>1</sup>, 周尚波<sup>1</sup>, 赵 灿<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 计算机学院, 重庆 400044; 2. 昆山华恒焊接股份有限公司, 江苏 昆山 215300)

**摘要:** 为了克服现有彩色图像去噪方法不能有效抑制边缘噪声和保持纹理信息的缺点, 提出了一种结合了离散四元数傅里叶变换(DQFT)和分数阶微分理论的彩色图像去噪改进方法。算法采用四元数矩阵表示一幅彩色图像, 首先对该四元数矩阵进行离散傅里叶变换; 然后将其代入基于分数阶微分的能量泛函极小值求解过程中, 利用变分原理求解并推导出去噪模型, 并与两种传统彩色图像去噪模型进行实验比较。实验结果表明, 提出的模型在去噪效果和纹理保护方面都有更好的表现。

**关键词:** 彩色图像去噪; 四元数; 离散四元数傅里叶变换; 分数阶微分

**中图分类号:** TP391      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2013)03-0946-04

**doi:**10.3969/j.issn.1001-3695.2013.03.079

## Novel color image denoising method based on fractional-order partial differential equation

ZHANG Fu-ping<sup>1</sup>, ZHOU Shang-bo<sup>1</sup>, ZHAO Can<sup>2</sup>

(1. School of Computer, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Kunshan Huaheng Weld Company Ltd., Kunshan Jiangsu 215300, China)

**Abstract:** The traditional methods for color image denoising usually can't smooth the edge noise effectively and can't protect the texture information well. To overcome these shortcomings, this paper proposed a novel method for color image denoising which combined DQFT with the theory of fractional order differentiation. The method used a quaternion matrix to represent a color image, and it was carried out by following procedures. Firstly, transformed the quaternion matrix to the DQFT domain. Secondly, applied it to the process of a fractional-order-differentiation-based energy function to seek its minimum, used the variational principle to solve this minimization problem and then inferred the proposed method. Finally, compared the method with two traditional methods for color image denoising to evaluate its superiority. The experimental results show that the proposed method has better performance in denoising and protection of the details.

**Key words:** color image denoising; quaternion; discrete quaternion Fourier transforms (DQFT); fractional order differentiation

## 0 引言

近年来,偏微分方程(PDE)方法越来越受到研究人员的重视,它逐渐被应用于数字图像处理的各个方面,如图像恢复、图像增强和图像去噪等,并取得了大量的研究成果<sup>[1-4]</sup>。传统的偏微分方程用于图像去噪的模型主要有二阶(PM模型)<sup>[5]</sup>和四阶偏微分方程(fourth-order PDE)<sup>[6-8]</sup>。这些整数阶偏微分方程模型在图像去噪领域最重要的贡献就是引入了各向异性扩散的思想,它们比一般的各向同性扩散的去噪方法在图像纹理信息保护方面有很大提高。然而这些传统的偏微分方程方法在不同程度上同样存在着各自的缺点,PM模型进行图像去噪,得到的去噪图像会产生阶梯效应<sup>[9]</sup>。为了消除PM模型的这一缺点,You等人<sup>[6]</sup>提出了四阶偏微分方程模型,它能消除阶梯效应,但会在去噪后的图像中留下一些黑和白的孤立点。

一般的图像去噪模型都是对灰度级数字图像进行处理,然而,在现实生活中,人眼所接收到的图像主要是彩色图像,因此,对彩色图像进行去噪处理具有非常重要的意义。传统彩色

图像处理方法都是采用RGB空间,分别对彩色图像的红、绿、蓝三分量进行处理,最后再将处理后的三个分量合成彩色图像。虽然这种方法具有实现过程简单、处理速度快等特点,但由于彩色图像RGB的三个分量原本是一个有机的整体,相互之间具有很高的相关性,将RGB三个通道分开处理往往会最终得到的彩色图像失真,降低去噪后彩色图像的质量。

针对传统彩色图像去噪方法出现的阶梯效应以及采用RGB三通道分开处理时所产生的图像失真等缺点,本文提出了一种基于分数阶偏微分方程的彩色图像去噪新方法。分数阶微分算子运用于图像去噪能克服传统整数阶算子在图像去噪后产生阶梯效应或孤立点的缺点,当选择适当的阶次时,分数阶微分算子在图像去噪的过程中能够大幅提升边缘和纹理细节<sup>[10-13]</sup>。同时本文提出的算法采用四元数矩阵表示彩色图像<sup>[14]</sup>,在进行图像去噪处理时视彩色图像为一个统一的整体,这样能克服传统算法采用RGB三通道分开处理彩色图像时所产生的图像失真的缺点。文献[10]提出了一种基于分数阶微分算子的图像去噪方法,本文结合四元数将此方法运用于彩色图像去噪得到了一种新的彩色图像去噪方法。

**收稿日期:** 2012-07-16; **修回日期:** 2012-08-17      **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61004112)

**作者简介:** 张富平(1986-),男,江西吉安人,硕士研究生,主要研究方向为图像处理(Fupingz86@sina.com);周尚波(1963-),男,广西宁明人,教授,博士,主要研究方向为混沌及其控制理论、图像处理、信息安全、物理工程计算及计算机仿真技术等;赵灿(1984-),女,河北石家庄人。

### 1 偏微分方程图像去噪模型

分数阶微分是整数阶微分的推广,从不同的角度去考察分数阶微分可以得到不同的定义,常用的定义方法有时域空间的R-L、G-L等定义和频域空间的 Fourier 变换域、小波变换域等定义。本文采用 Fourier 变换域定义的分数阶微分方程。

根据分数阶微分的 Fourier 变换域定义,可得

$$D_\alpha f(t) \leftrightarrow (j\omega)^\alpha \hat{f}(\omega)$$

对于任意给定的二维信号  $s(x, y) \in L^2(R^2)$ , 其分数阶偏微分导数形式为

$$\begin{cases} D_{\alpha_x} s = F^{-1}((j\omega_1)^\alpha \hat{s}(\omega_1, \omega_2)) \\ D_{\alpha_y} s = F^{-1}((j\omega_2)^\alpha \hat{s}(\omega_1, \omega_2)) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $F^{-1}$  表示傅里叶逆变换算子。

基于偏微分方程的图像去噪模型的去噪过程可解释为一个能量泛函寻找其极小值的能量耗散的过程,整数阶微分去噪模型的能量泛函

$$E(I) = \int_{\Omega} f(|\nabla I|) d\Omega \quad (2)$$

其中  $\Omega$  为数字图像  $I$  的作用域。

将整数阶推广到分数阶,可得分数阶微分去噪模型的能量泛函:

$$E(I) = \int_{\Omega} f(|D_x^\alpha I, D_y^\alpha I|) d\Omega \quad (3)$$

其中  $D_\alpha$  表示分数阶导数算子,定义为  $D_\alpha I = (D_x^\alpha I, D_y^\alpha I)$ ,  $|D_\alpha I| = \sqrt{(D_x^\alpha I)^2 + (D_y^\alpha I)^2}$ ,  $\alpha \in [1, 2]$ 。

利用变分原理求解式(3)的极小值,得到该能量泛函的一个最速下降法的极小值求解方法:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} = & -(D_x^\alpha)^* (c(|D_{x,y}^\alpha I|^2) D_x^\alpha I) - \\ & (D_y^\alpha)^* (c(|D_{x,y}^\alpha I|^2) D_y^\alpha I) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $D_{\alpha_x}^*$  为  $D_{\alpha_x}$  的共轭;  $D_{\alpha_y}^*$  为  $D_{\alpha_y}$  的共轭;  $c(\cdot)$  表示扩散系数函数;  $\alpha \in [1, 2]$ ,  $\alpha$  可为整数也可为分数。

对式(4)两边进行 Fourier 变换得到分数阶偏微分方程去噪模型:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n+1} = & \hat{I}_n - \Delta t (K_x^* \cdot F(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha I_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha I_n) + \\ & K_y^* \cdot F(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha I_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha I_n)) \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $F(\cdot)$  表示傅里叶变换算子;  $\Delta t$  为迭代步长,其选取与分数阶阶次  $\alpha$  有关。以待处理图像为初始图像  $I_0$ , 对其进行傅里叶变换,然后代入式(5),在合适的时刻停止迭代,便可以得到理想的去噪图像。

### 2 彩色图像四元数模型的 DQFT

四元数由 Hamilton 于 1843 年提出,它是复数的推广,由一个实部和三个虚部构成:

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k \quad (6)$$

其中  $q_r, q_i, q_j, q_k$  为四个实数。  $i, j, k$  为三个相互正交的虚基元,它们之间具有如下运算规则:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = ij = -1 \\ ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \end{cases} \quad (7)$$

本文提出的彩色图像去噪模型中,彩色图像采用四元数矩阵表示。令四元数的实部为 0,其三个虚部分量分别代表  $R, G, B$  三个基色分量值。设彩色图像矩阵为  $f(x, y), f_r(x, y),$

$f_g(x, y), f_b(x, y)$  分别表示彩色图像中  $(x, y)$  处像素点的  $R, G, B$  分量值,那么彩色图像的四元数模型可表示为

$$f(x, y) = f_r(x, y)i + f_g(x, y)j + f_b(x, y)k \quad (8)$$

离散四元数傅里叶变换 (DQFT) 具有三种定义形式<sup>[15-17]</sup>, 分别是双边 QFT、左型 QFT 以及右型 QFT。本文采用 DQFT 的右型 QFT 定义,则该四元数矩阵  $f(x, y)$  表示的大小为  $M \times N$  的彩色图像的四元数 DQFT 和离散四元数傅里叶逆变换 (DIQFT) 可表示为

$$F^R(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\mu^2 \pi (\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N})} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^R(u, v) e^{-\mu^2 \pi (\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N})} \quad (10)$$

其中  $\mu$  可以为任意的单位纯四元数,即  $\mu$  的实部为 0, 模为 1, 且  $\mu^2 = -1$ 。

### 3 基于 PDE 和 DQFT 的彩色图像去噪模型

本文算法用四元数矩阵表示一幅彩色图像,对该矩阵进行离散四元数傅里叶变换;然后,结合分数阶微分去噪理论对变换后的四元数矩阵进行处理;最后得到一种新的彩色图像去噪模型。

将彩色图像的  $R, G, B$  三个分量值分别表示一个纯四元数的  $i, j, k$  三个虚部分量的系数,构造一个彩色图像的四元数模型:

$$f(x, y) = f_r(x, y)i + f_g(x, y)j + f_b(x, y)k$$

针对 DQFT 三种定义类型的不同特点,采用右型 QFT 定义类型对上述四元数模型进行离散傅里叶变换:

$$F^R(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\mu^2 \pi (\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N})}$$

其中  $\mu$  可以为任意的单位纯四元数,本文将  $\mu$  取为特殊的  $\mu = 0 \times i + 1 \times j + 0 \times k = j$ 。因为,当  $\mu = j$  时,右型 QFT 与 Fourier 变换的离散定义形式相同,那么此时的 DQFT 具有 Fourier 变换所具有的性质,从而,可结合分数阶微分的 Fourier 变换域定义,推导出四元数模型  $f(x, y)$  的分数阶偏微分导数形式:

$$\begin{cases} D_{\alpha_x} f = \text{DQFT}((j\omega_1)^\alpha \text{DQFT}(f(\omega_1, \omega_2))) \\ D_{\alpha_y} f = \text{DQFT}((j\omega_2)^\alpha \text{DQFT}(f(\omega_1, \omega_2))) \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $\text{DQFT}(\cdot)$  表示离散四元数傅里叶变换算子,  $\text{DIQFT}(\cdot)$  表示离散四元数傅里叶逆变换算子。

将式(11)代入基于分数阶微分的能量泛函:

$$E(f) = \int_{\Omega} g(|D_{x,y}^\alpha f|) d\Omega \quad (12)$$

利用变分原理求解式(12)的极小值,推导出本文提出的结合了四元数和分数阶偏微分方程的彩色图像去噪新模型:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n+1} = & \hat{f}_n - \Delta t (K_x^* \cdot \text{DQFT}(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha f_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha f_n) + \\ & K_y^* \cdot \text{DQFT}(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha f_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha f_n)) \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} \hat{g} = & K_x^* \times \text{DQFT}(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha f_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha f_n) + \\ & K_y^* \times \text{DQFT}(c(|\hat{D}_{x,y}^\alpha f_n|^2) \hat{D}_{x,y}^\alpha f_n) \end{aligned}$$

则模型可简化为

$$\hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n - \Delta t \cdot \hat{g} \quad (14)$$

其中  $\hat{f}_n$  表示第  $n$  次算法迭代后得到的四元数矩阵的 DQFT;  $c(\cdot)$  为扩散系数函数,用于判别图像处于平滑区域还是边缘区域,根据扩散系数的判断,图像去噪模型可进行边缘增强或

打磨平滑区域的处理,本文选取  $c(\cdot) = \frac{1}{1+s}$ ,  $c(\cdot)$  的选取参考文献[5]。

$$\begin{cases} \tilde{D}_x^\alpha = \text{DIQFT}(1 - \exp(-j2\pi\omega_1/m)^\alpha \times \exp(j\pi\alpha\omega_1/m) \text{DQFT}(f)) \\ \tilde{D}_y^\alpha = \text{DIQFT}(1 - \exp(-j2\pi\omega_2/m)^\alpha \times \exp(j\pi\alpha\omega_2/m) \text{DQFT}(f)) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} K_x^* = \text{diag}\left(\text{conj}\left(\left(1 - \exp\left(\frac{-j2\pi\omega_1}{m}\right)\right)^\alpha \times \exp\left(\frac{j\pi\alpha\omega_1}{m}\right)\right)\right) \\ K_y^* = \text{diag}\left(\text{conj}\left(\left(1 - \exp\left(\frac{-j2\pi\omega_2}{m}\right)\right)^\alpha \times \exp\left(\frac{j\pi\alpha\omega_2}{m}\right)\right)\right) \end{cases} \quad (16)$$

本文算法实现的具体迭代过程主要包括以下六个步骤:

a) 把待处理的彩色图像表示成一个四元数矩阵,记为  $f_0(x,y)$ ,作为初始的输入图像。

b) 选取参数  $\mu=j$ ,对  $f_0(x,y)$  进行 DQFT,记为  $\hat{f}_0(x,y)$ 。令迭代次数为  $k, n=0, \hat{f}_n = \hat{f}_0$ , 选取步长  $\Delta t=4$ 。

c) 利用式(15)计算  $x$  方向和  $y$  方向的  $\alpha$  阶的偏微分  $\tilde{D}_x^\alpha f_n$  和  $\tilde{D}_y^\alpha f_n$ 。

d) 在时域空间,选取扩散系数函数为  $c(s) = \frac{1}{1+s}$ , 计算  $c(|\tilde{D}_x^\alpha f_n|) \tilde{D}_x^\alpha f_n$  和  $c(|\tilde{D}_y^\alpha f_n|) \tilde{D}_y^\alpha f_n$ 。

e) 计算:

$$\hat{g} = K_x^* \times \text{DQFT}(c(|\hat{D}_x^\alpha f_n|) \tilde{D}_x^\alpha f_n) + K_y^* \cdot \text{DQFT}(c(|\hat{D}_y^\alpha f_n|) \tilde{D}_y^\alpha f_n)$$

f) 计算  $\hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n - \Delta t \cdot \hat{g}$ , 并设置  $n = n + 1$ ; 如果  $n = k$ , 算法迭代停止,计算  $\hat{f}_{n+1}$  的 DIQFT, 得到最终的去噪图像; 否则, 算法跳到 c) 继续执行。

实验结果表明,本文提出的彩色图像去噪算法能获得较高的信噪比和更好的视觉效果。

### 4 实验结果与分析

本文使用 Lena 彩色图像在 MATLAB 7.1 的平台下进行了两种比较实验,每一种分别进行了 2 500 次、3 000 次和 5 000 次的三组迭代实验。实验结果主要通过计算去噪后图像的信噪比(SNR)进行评价,本文所有实验的初始加噪图像的 SNR 均为 4.891 4。

两种比较实验,一种是将本文算法与基于 DQFT 的整数阶偏微分方程图像去噪算法<sup>[5,6]</sup> 进行比较,实验结果如表 1 所示。表 1 中  $\alpha=1$  与  $\alpha=2$  时表示整数阶,其余的表示分数阶。由表 1 中数据可以看出,2 500 次、3 000 次和 5 000 次的三组迭代实验都是在  $\alpha=1.2$  时 SNR 取得最大值,分别为 12.411 6、12.150 1 和 11.741 5; 而整数阶  $\alpha=1$  与  $\alpha=2$  时取得的 SNR 值分别为 9.561 9、11.443 7、11.152 6 和 11.062 9、9.911 0、9.535 9, 比较上述实验数据可以得出本文提出的分数阶模型比整数阶模型能获得更高的信噪比,去噪效果更好。实验结果如图 1 所示。图 1(c)(e) 为迭代次数为 2 500,  $\alpha=1$  的整数阶模型的去噪效果;(d)(f) 为迭代次数为 2 500,  $\alpha=1.2$  的本文算法得出的效果图。两组图像中整数阶模型的去噪效果图具有较为明显的阶梯效应,而本文提出的模型在有效去除噪声的同时可以

非线性保留图像平滑区域信息,没有明显的阶梯效应,具有更好的视觉效果。

另一种比较实验是将本文算法与传统的基于 RGB 三通道的分数阶偏微分方程图像去噪算法进行比较。为了便于后面描述,将传统的基于 RGB 三通道的分数阶偏微分方程图像去噪算法简称为传统 RGB 去噪算法,实验结果如表 2 所示。由表 2 可以看出,在三组迭代实验中,  $k=2500$  时 SNR 在  $\alpha=1.2$  处取得最大值 11.249 2;  $k=3000$  时 SNR 在  $\alpha=1.4$  处取得最大值 11.327 8,  $k=5000$  时 SNR 在  $\alpha=1.6$  处取得最大值 11.551 9。表 1 中  $k=2500, 3000$  和 5000 时 SNR 均在  $\alpha=1.2$  处取得最大值,分别为 12.411 6、12.150 1 和 11.741 5, 这三个值均比表 2 中相同迭代次数的 SNR 的最大值大。并且本文算法在  $k=2500, \alpha=1.2$  时 SNR 达到最大值 12.411 6, 而传统 RGB 去噪算法在  $k=5000, \alpha=1.6$  时 SNR 达到最大值 11.551 9。由此可见,本文算法在图像去噪处理时间以及处理效果上都优于传统 RGB 去噪算法。实验结果如图 2 所示。图 2(b)(e) 和 (c)(f) 为迭代次数为 5 000, 阶次分别为  $\alpha=1.6$  和  $\alpha=1.8$  时的传统 RGB 去噪算法得出的效果图。图 2(a)(d) 为迭代次数为 2 500,  $\alpha=1.2$  时本文算法得出的效果图。由图 2(d) ~ (f) 可以看出, (e) 中图像边缘模糊; (f) 中存在一些孤立的噪声点; 本文算法得出的 (d) 既能有效地去除噪声, 又可较好地保留图像边缘。由此可得出本文算法比传统 RGB 去噪算法去噪效果更好。

通过上述两种比较实验所得数据和效果图的综合比较可以得出,本文算法不论在去噪后图像的 SNR 值, 还是视觉效果方面, 较之传统算法都有很大的提升。

表 1 本文算法与整数阶去噪模型的 SNR 比较

$\alpha$	$k$		
	2 500	3 000	5 000
1	9.561 9	11.443 7	11.152 6
1.2	12.411 6	12.150 1	11.741 5
1.4	12.139 0	11.131 8	10.963 0
1.6	11.598 3	10.461 3	10.052 4
1.8	11.263 9	10.103 7	9.827 0
2	11.062 9	9.911 0	9.535 8

表 2 传统 RGB 去噪算法的 SNR

$\alpha$	$k$		
	2 500	3 000	5 000
1	11.246 8	10.252 0	8.559 0
1.2	11.249 2	11.217 2	9.602 9
1.4	9.915 6	11.327 8	10.769 8
1.6	8.606 2	10.027 2	11.551 9
1.8	7.644 9	8.701 3	10.879 8
2	6.937 2	7.691 0	9.319 7



图 1  $\alpha=1$  和  $\alpha=1.2$  的去噪结果图及局部放大图

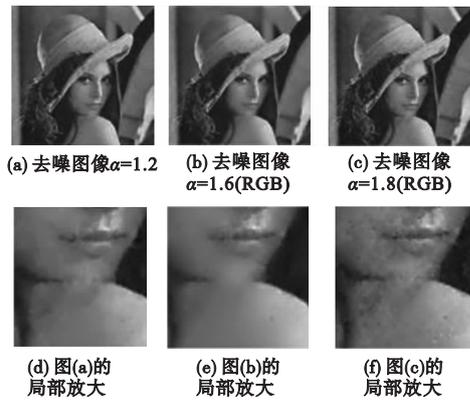


图2 本文算法与传统RGB算法去噪结果图及局部放大图

## 5 结束语

本文详细分析了基于 Fourier 域的分数阶偏微分方程去噪模型以及彩色图像四元数模型的离散四元数傅里叶变换,将彩色图像四元数模型应用于分数阶微分去噪理论,提出了一种新的基于分数阶偏微分方程的彩色图像去噪模型。实验结果表明,本文提出的新模型既能有效地加强图像的纹理信息,又能非线性地保留图像的平滑区域的信息,并能获得更好的视觉效果。

### 参考文献:

- [1] BLOMGREN P, MULET P, CHAN T F, *et al.* Total variation image restoration: numerical methods and extensions [C]// Proc of International Conference on Image Processing. Washington DC: IEEE Computer Society, 1997: 384-387.
- [2] PU Yi-fei, ZHOU Ji-liu, YUAN Xiao. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2010, 19(2): 491-511.
- [3] PAN Wei, QIN Kai-huai, CHEN Yao. An adaptable-multilayer fractional Fourier transform approach for image registration [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(3): 400-414.
- [4] 刘光宇, 卞红雨, 沈郑燕, 等. PDE 模型在声纳图像去噪中的应用研究 [J]. *传感器与微系统*, 2012, 31(2): 42-44.
- [5] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
- [6] YOU Y-L, KAVEH M. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [7] LYSAKER M, QSHER S, TAI Xue-cheng. Noise removal using smoothed normals and surface fitting [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2004, 13(10): 1345-1357.
- [8] GUIDOTTI P, LONGO K. Two enhanced fourth order diffusion models for image denoising [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, 40(2): 188-198.
- [9] WHITAKER R T, PIZER S M. A multi-scale approach to nonuniform diffusion [J]. *Image Understanding*, 1993, 51(1): 99-110.
- [10] BAI Jian, FENG Xiang-chu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2007, 16(10): 2492-2502.
- [11] 黄果, 许黎, 蒲亦非. 分数阶微积分在图像处理中的研究综述 [J]. *计算机应用研究*, 2012, 29(2): 414-426.
- [12] JANEV M, PILIPOVIĆ S, ATANACKOVIĆ T, *et al.* Fully fractional anisotropic diffusion for image denoising [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 54(1-2): 729-741.
- [13] PU Yi-fei, WANG Wei-xing, ZHOU Ji-liu, *et al.* Fractional differential approach to detecting textural features of digital image and its fractional differential filter implementation [J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, 51(9): 1319-1339.
- [14] 许姜严, 王卫星. 结合四元数与小波的彩色图像边缘检测算法 [J]. *计算机应用研究*, 2010, 27(5): 1981-1983.
- [15] YANG Cui, ZHANG Jian-qi, YANG Dan, *et al.* Discrete-quaternion-Fourier-transform-based registration method for color images [C]// Proc of International Conference on Audio Language and Image Processing. 2010: 1184-1189.
- [16] 雷印杰, 金艳梅, 周激流, 等. 四元数奇异值分解与彩色图像去噪 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2007, 44(6): 1268-1274.
- [17] 盖琦, 乔兆亮. 基于离散四元数傅里叶变换的彩色图像信息隐藏技术 [J]. *计算机应用研究*, 2011, 28(7): 2746-2749.
- [8] 刘国军, 冯象初, 张选德. 波原子纹理图像阈值算法 [J]. *电子与信息学报*, 2009, 31(8): 1791-1795.
- [9] 陈书贞, 郝鹏鹏, 练秋生. 基于双树复数小波和波原子稀疏图像表示的压缩传感图像重构 [J]. *信号处理*, 2010, 26(11): 1701-1706.
- [10] 杨宁, 贺振华, 黄德济. 基于系数相关性阈值的波原子域叠前地震资料信噪分离方法 [J]. *石油地球物理勘探*, 2011, 46(1): 57-62.
- [11] 孙海英, 李锋, 商会亮. 改进的变分自适应中值滤波算法 [J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(7): 1743-1747.
- [12] TOMASI C, MANDUCHI R. Bilateral filtering for gray and color images [C]// Proc of IEEE ICCV. 1998: 839-846.
- [13] BARASH D. A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing, and the nonlinear diffusion equation [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(6): 844-847.
- [14] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A review of image denoising algorithms with a new one [J]. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, 4(2): 490-530.
- [15] PORTILLA J, STRELA V, WAINWRIGHT M J, *et al.* Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [16] ELAD M. On the bilateral filter and ways to improve it [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2002, 11(10): 1141-1151.
- [17] PARIS S, DURAND F. A fast approximation of the bilateral filter using a signal processing approach [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2009, 81(1): 24-52.
- [18] WONG A. Adaptive bilateral filtering of image signals using local phase characteristics [J]. *Signal Processing*, 2008, 88(6): 1615-1619.
- [19] VIJAYA G, VASUDEVAN V. A novel noise reduction method using double bilateral filtering [J]. *European Journal of Scientific Research*, 2010, 46(3): 331-338.
- [20] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, *et al.* Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2004, 13(4): 600-612.

(上接第945页)