原子簇快速匹配追踪算法*

崔现军，赵歆波，林增刚，张艳宁
（西北工业大学 计算机学院 陕西省语音与图像信息处理重点实验室，西安 710129）

摘　要：针对稀疏表示中匹配追踪算法计算复杂度过大的问题，提出了基于冗余字典原子相关性的匹配追踪算法。该算法利用相邻迭代过程中匹配原子的相关性对冗余字典进行簇化，得到 M 个多原子集合（原子簇）；每次迭代过程中利用 LVQ 神经网络的快速学习能力从原子簇中选取目标簇；最后在目标簇中选取匹配信号结构的若干原子进行信号的稀疏逼近。实验采用一维稀疏信号进行仿真，结果表明与匹配追踪算法相比，其逼近性能相近，同时稀疏分解速度大大提高。

关键词：稀疏表示；匹配追踪；原子簇；LVQ 神经网络
中图分类号：TP391　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2013)02-0396-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.02.021

Quickly matching pursuit algorithm based atom clusters

CUI Xian-jun, ZHAO Xin-bo, LIN Zeng-gang, ZHANG Yan-ning
(*Shaanxi Provincial Key Laboratory of Speech & Image Information Processing, School of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710129, *China*)

Abstract: This paper proposed a new quickly matching pursuit algorithm based on atomic correlation for sparse representation. Firstly, it clustered the atoms of redundant dictionary into M multi-atoms sets after making full use of the atomic correlation in the iterative process. Then at each iteration, it selected one multi-atoms set as the target atom cluster. Finally, it got some atoms that met the matching conditions from the target atom cluster and the signal approximation. Experimental results for 1D sparse signal show that the calculation speed of the algorithm increases significantly compared with MP's. Meanwhile, the approximation performances of the proposed method are comparable with those of the traditional matching pursuit methods.

Key words: sparse representation; matching pursuit(MP); atom cluster; LVQ neural network

基于超完备字典的信号稀疏表示是一种新的信号表示理论，利用超完备字典的冗余性可以有效地捕捉图像的各种结构特征，从而实现图像信号的有效表示。它的基本思想是对于各种不同特性的图像部分采用不同的正交基来展开。这种超完备表示的非唯一性一方面使得人们能够自适应地选择基底，以达到对信号稀疏表示的目的；但同时也使信号的最优线性展开成为一个典型的 NP 难问题[1]。

为了解决这一难题，人们提出了信号的次优稀疏分解方法，如匹配追踪（MP 算法）、基追踪[2]等。匹配追踪和基追踪方法通过放宽信号稀疏分解优化问题的约束条件，以得到接近最优的解。尽管对于某些特定类型的字典，以上两种方法都能够得到次优解，但由于算法运算复杂度高，因而不利于实际应用的开展。近年来，人们通过对冗余字典进行近似或对最优原子搜索算法进行修正，从而降低了信号稀疏分解的计算复杂度[3]。文献[4]通过简单的基矢量的线性组合来近似字典函数，有效降低了运算复杂度。而文献[5]通过构造多尺度字典和子带字典的方式来减少最优原子搜索的复杂度。以上方法虽说在一定程度上降低了匹配追踪算法的运算复杂度，但信号稀疏分解的速度仍然非常缓慢。

在讨论超完备稀疏表示理论的基础上，本文对完备稀疏表示的快速算法进行了研究，提出了原子簇快速匹配算法。它区别于传统的匹配追踪算法，通过对所有的原子进行区域划分，用较小的原子集合（称为原子簇）来表示冗余字典。这样每次迭代过程充分利用相邻迭代过程中匹配原子的相关特性和神经网络快速学习能力，通过较少的匹配从原子簇中预选出若干个匹配原子，以提高稀疏分解的运算速度。

1　稀疏词典原子簇化

为了获得信号的稀疏分解，原子的选取至关重要，通常要求每次迭代选定的原子间的相关性足够小。考虑到相邻迭代原子间的这种关系，本文提出的原子簇匹配追踪算法通过每次迭代时选取一个原子簇。为了保证信号分解后系数的稀疏性，同样要求选定原子簇内原子之间的相关性足够小。

1.1　MP 算法介绍及分析

基于冗余字典的信号稀疏分解的数学描述：设集合 $D=\{d_i, i=1,2,\cdots,N\}$，且 Hilbert 空间 $R^M=\mathrm{span}(D)$，$N>>M$。由于 $N>>M$，称 D 为冗余字典，其元素都已作了归一化处理，称为原子。对信号 f，在 D 中选取 $K(K<<M)$ 个原子对信号作 K 项逼近：

收稿日期：2012-06-21；**修回日期**：2012-08-02　**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(60903126,60872145)；西北工业大学基础研究基金资助项目(JC201122)

作者简介：崔现军（1985-），男，河北邢台人，硕士，主要研究方向为语音图像处理与计算机视觉（nwpucui@gmail.com）；林增刚（1977-），男，副教授，博士，主要研究方向为模式识别与计算机视觉；张艳宁（1967-），女，教授，博导，主要研究方向为图像处理.

$$f_K = \sum_{i \in I_K, |I_K| = K} \langle f, d_i \rangle d_i \tag{1}$$

其中:I_K 是 d_i 的下标。稀疏逼近就是在满足逼近误差的前提下从各种可能的组合中挑选分解稀疏最为稀疏的一组原子。要找到最稀疏的信号表示,等同于解决 0-范数问题[6]:

$$\min \| c \|_0, \text{ s. t. } \quad f = \sum c_i d_i \tag{2}$$

其中:$\| c \|_0$ 是 $c_i(i = 1, 2, \cdots, K)$ 中非零项个数。对于冗余字典 D 来说,这是一个 NP 难问题。

因此,MP 贪婪算法求解 $\| c \|_0$ 的局部最优以降低计算复杂度。其在每一次迭代过程中,用原始信号或残余信号与冗余字典中所有原子作内积,从字典里选择最能匹配信号结构的一个原子而构建的一种逼近过程。但是,由于每次迭代字典中的所有剩余原子都需与信号作内积,以找到最能匹配信号结构的一个原子,所以 MP 算法计算量仍十分巨大。

下面对 MP 算法进行分析:

设给定的冗余字典为 $D(M \times N)$,原子(冗余字典的列)为 $d_i(i = 1, 2, \cdots, N)$ 且 $\| d_i \|_2^2 = 1$。利用匹配追踪对 s 进行分解。设定初值 $R^0 s = s$,迭代变量为 k,信号首先被分解为 $R^0 s = \langle d_{i_0}, R^o s \rangle d_{i_0} + R^1 s$,且 $R^1 s$ 与 d_{i_0} 正交,依此类推 $R^k s = \langle d_{i_k}, R^k s \rangle d_{i_k} + R^{k+1} s$。因为 $R^{k+1} s$ 与 d_{i_k} 正交,所以

$$\langle R^{k+1} s, d_{i_k} \rangle = \langle \langle d_{i_{k+1}}, R^{k+1} s \rangle d_{i_{k+1}} + R^{k+2} s, d_{i_k} \rangle = \langle d_{i_{k+1}}, R^{k+1} s \rangle \langle d_{i_{k+1}}, d_{i_k} \rangle + \langle R^{k+2} s, d_{i_k} \rangle = 0$$

$$\langle d_{i_{k+1}}, d_{i_k} \rangle = \frac{-\langle R^{k+2} s, d_{i_k} \rangle}{\langle d_{i_{k+1}}, R^{k+1} s \rangle} \tag{3}$$

$d_{i_{k+1}}$ 为字典中使残差能量最小的原子,即展开信号与原子 $d_{i_{k+1}}$ 的内积最大,即 $d_{i_{k+1}} \quad \text{s. t. } | \langle d_{i_{k+1}}, R^{k+1} s \rangle | = \max_{i \in [1, N]} | \langle d_i, R^{k+1} s \rangle |$,故 $d_{i_{k+1}}$ 与 d_{i_k} 相关性很小。

1.2　原子簇化算法

由 1.1 节 MP 算法分析可见,对于传统的匹配追踪算法,相邻迭代原子的相关性较小。这样,为了得到信号的稀疏表示,每个簇中原子间相关性应很小。根据这一特性,应使非相关的原子聚成簇。迭代时每次选择一个原子,则包含此原子的原子簇的若干原子参与到原始信号的重构,这样将大大减少迭代次数。设给定的冗余字典为 $D(M \times N)$,将原子(列)$d_i(i = 1, 2, \cdots, N)$ 看做训练矢量,将其分解成 t 个簇 $D_k(k = 1, 2, \cdots, t)$,$D = \cup_{k=1}^{t} D_k$ 且当 $i \neq j$ 时,$D_i \cap D_j = \varnothing$。

定义 1　D_i 与 D_j 之间的簇距

$$d_{ij} = \min_{k \in [1, S(D_i)]} \min_{m \in [1, S(D_j)]} \{ \langle d_k^i, d_m^j \rangle \} \tag{4}$$

定义 2　原子 d_i 与 D_j 距离

$$D_{i,j} = \min_{m \in [1, S(D_j)]} \{ \langle d_i, d_m^j \rangle \} \tag{5}$$

其中:d_{ij} 表示原子簇 D_i 与 D_j 之间的簇距,$S(D_i)$ 表示原子簇 D_i 中包含的原子数,d_k^i 表示原子簇 D_i 中第 k 个原子。这里,距离采用内积表示。算法步骤如下:

a)初始化原子簇。设置簇间阈值 δ,令迭代次数 $r = 0$。假设 d_1 为簇 M_1,在 $D(M \times N)$ 中搜索 $M_1, M_2, \cdots, M_k$,满足

$$d_{ij} > \delta \quad i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, k$$

初始化后,得到了 k 个满足要求的簇 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_k$,每个簇内只含有一个原子。

b)求与原子距离最小的原子簇。对于未被选入簇内的原子,其与各个簇的距离选取距离最小的簇。令迭代次数为 r,$N(d) = \{ d_i \} (d_i \notin M, i = 1, 2, \cdots, N)$ 表示未被选入簇内的原子集合。对于 $d_i(d_i \in N(d))$,求与各个原子簇 M_i 之间的距离 $D_{ij}(j = 1, 2, \cdots, k)$,令

$$j = t \quad \text{s. t. } \arg\min_{j \in [1, k]} \{ D_{ij} \} \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{6}$$

则 M_t^{r-1} 为选取的簇。

c)对原子进行簇化处理。设置簇内阈值 delta,紧接着对待处理原子 d_i 作如下处理:当原子与簇的距离小于簇内阈值时,将原子 d_i 加入到簇 M_t^{r-1} 中,得到 M_t^r;否则令 d_i 为新的原子簇,即

$$\begin{cases} M_t^r = M_t^{r-1} \cup d_i & (D_{ij} \leqslant \text{delta}) \\ d_i = M_{k+1} & (D_{ij} > \text{delta}) \end{cases} \tag{7}$$

更新 $N(d) = N(d) - \{ d_i \}$。判断循环条件,如果 $N(d) \neq \varnothing$,$r = r + 1$,转到步骤 b)继续迭代;否则终止迭代,转入步骤 d)。

d)原子簇的合并。根据各簇的簇距作如下处理:当簇距小于簇间阈值 δ 时,对原子簇进行合并;否则不作处理,即

$$\begin{cases} M_{ij}^r = M_i^r \cup M_j^r, k = k - 1 & d_{ij} \leqslant \delta \\ M_i^r = M_i^r, M_j^k = M_j^r & d_{ij} > \delta \end{cases} \tag{8}$$

其中:r 为迭代次数,M_{ij}^r 为第 r 次迭代由 M_i 与 M_j 合并组成的原子簇。

e)判定终止条件。如果对于 $\forall i, j$,都有 $d_{ij} > \delta$,则算法终止;否则转入步骤 d)。

2　原子簇快速匹配算法

经过 1.2 节簇化处理,将稀疏词典的各个原子划分为含有不同原子数目的原子簇。每个原子簇中的原子间的相关性足够小(< delta),这样在匹配追踪的每次迭代过程中,每个原子簇量化为一个原子,只要该原子被选中,则相应地整个原子簇的若干原子被选中,从而大大减少了迭代次数,提高了匹配效率。

针对冗余字典匹配计算复杂度较高的问题,同时考虑到簇化后的特点,这里选用 LVQ 神经网络图 1 进行原子簇的智能匹配。

2.1　LVQ 网络快速匹配

1)输入层和输出层数目的确定　输入层节点数为稀疏词典的原子的维数。输出层的节点数为 2.2 节中原子簇化后的簇数 k,用输出 $\{1, 2, \cdots\}$ 标志它们。

2)隐层节点数目的确定　将隐层节点的数目设定为输入层节点数的 2 倍,这样网络的识别效率较高,网络的训练时间也较少。

3)学习速率的确定　学习速率关系到学习过程的稳定,大的学习速率可能导致系统的不稳定;小的学习速率导致较长的训练时间。一般情况下,倾向于选取较小的学习速率以保证系统的稳定性。通过实验,学习速率取 0.01。

2.2　原子簇快速匹配追踪

假设待重构信号为 s,冗余字典为 $D(M \times N)$,匹配步骤为:

a)初始化。令迭代次数 $m = 0$,残差 $R_0 s = s$,迭代终止误差为 $\varepsilon_{\text{stop}}$,簇内匹配阈值为 γ。

b)字典中目标原子选取。

定义 3　残差 $R_m s$ 与原子 d 的匹配度 φ_m 定义为

$$\varphi_m^i = \frac{\langle d_i, R_m s \rangle}{\| d_i \| \| R_m s \|} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中:$R_m s$ 表示第 m 次迭代后的残差,d_i 表示冗余字典中的第 i 个原子。选取的 φ_m^i 越大,则表明原子 d_i 越能有效地对残差进

行重构。

计算字典 D 中与 $R_m s$ 匹配度最大(即内积最大)的原子 d_{i_m}(i s.t. $|\langle d_{i_m}, R_m s\rangle| = \max_{i\in[1,N]} |\langle d_i, R_m s\rangle|$)为字典中目标原子,更新残差 $R_m s$:

$$R_m s = \langle d_{i_m}, R_m s\rangle d_{i_m} + R_{m+1} s$$

c)原子簇的选取。选取字典中目标原子并更新残差后,要进行原子簇的选取。若残差 $\| R_{m+1} s \| < \varepsilon_{\text{stop}}$,则转入 f),算法终止;否则,利用 LVQ 神经网络进行原子簇的智能选取:输入 d_{i_m},确定目标原子簇 M_{opt_m}。接下来就可以进行簇内原子的选取以及对残差的更新。

d)簇内原子选取。得到目标簇 M_{opt_m} 后,不再在整个冗余字典中计算最匹配原子,而是首要考虑在 M_{opt_m} 中搜索与当前残差最匹配的原子 $d^i_{i_m}$,其方法类似步骤 b)。

e)簇内原子匹配处理。若当前残差大于迭代终止误差且簇内选取的原子 $d^i_{i_m}$、残差的匹配度大于簇内匹配阈值,说明重构过程未达到要求,同时所求原子能够有效地对残差进行重构,所以更新残差并继续在簇内选取原子;若当前残差大于迭代终止误差但簇内选取的原子 $d^i_{i_m}$ 与残差的匹配度小于簇内匹配阈值,说明目标簇内的原子已经无法有效进行重构,所以继续在整个字典中选取最匹配的原子进行残差的更新;若当前残差小于迭代终止误差,说明重构结果已经满足要求,则算法结束。

定义 4　残差 $R^i_m s$ 与原子 $d^i_{i_m}$ 的匹配度 φ^i_m 定义为

$$\varphi^i_m = \frac{\langle d^i_{i_m}, R^i_m s\rangle}{\| d^i_{i_m} \| \ \| R^i_m s \|}$$

其中:$R^i_m s$、$d^i_{i_m}$ 分别表示第 m 次迭代、第 i 次簇内循环时的重构残差以及从目标簇 M_{opt_m} 中选取的原子。φ^i_m 越大,则表明原子 $d^i_{i_m}$ 越能有效地对残差进行重构。

具体过程如下:

设簇内循环次数为 i。若 $\| R^i_{m+1} s \| > \varepsilon_{\text{stop}} \& \varphi^i_m > \gamma$, 则 $i = i+1$,更新残差 $R^i_{m+1} s$:

$$R^i_{m+1} s = \langle d^i_{i_m}, R^i_{m+1} s\rangle d_{i_m} + R^{i+1}_{m+1} s$$

并转入 d);若 $\| R^i_{m+1} s \| > \varepsilon_{\text{stop}} \& \varphi^i_m \leqslant \gamma$,则 $i = 1$, $m = m+1$,并转入 b)执行;若 $\| R^i_{m+1} s \| < \varepsilon_{\text{stop}}$,则转入 f),重构结束。

f)算法结束。

3　实验结果与分析

实验采用长度为 N 的稀疏信号,其中非 0 值随机分布于信号 N 个位置。观测向量长度为 $M = 80$,采样率为 $80/N$。冗余字典用函数 $\text{Phi} = \sqrt{\frac{1}{M}} \times \text{randn}(M, N)$ 生成。

3.1　簇化实验

在选取不同簇内阈值 delta 和簇间阈值 δ 的情况下,本文对 750 和 1 000 两种长度下的冗余字典进行簇化,簇化结果随阈值和字典长度的变化结果如表 1 所示。

表 1　不同阈值下的簇化结果

簇内阈值	簇间阈值	字典长度	簇化后簇数	簇内阈值	簇间阈值	字典长度	簇化后簇数
0.01	0.1	750	50	0.01	0.1	1000	70
0.005	0.1	750	89	0.005	0.1	1000	128
0.01	0.2	750	32	0.01	0.2	1000	58

接着选取簇内阈值 delta = 0.01,簇间阈值 $\delta = 0.2$,对不同长度的冗余字典进行簇化,结果如图 2 所示。

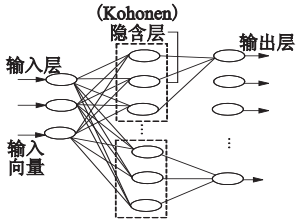


图1　LVQ神经网络模型

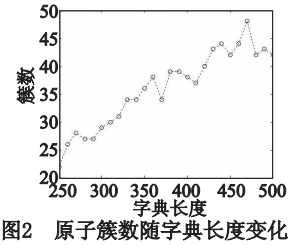


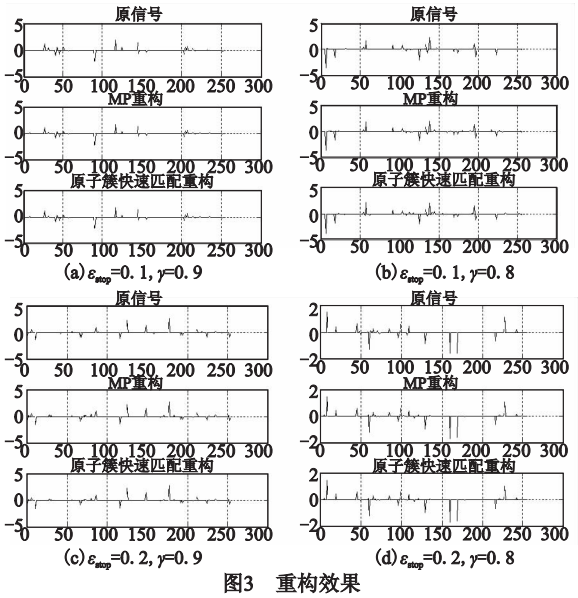
图2　原子簇数随字典长度变化

从表 1 和图 2 中可以看出,随着字典长度和簇间阈值的增大,簇化后的簇数呈递增趋势,随簇内阈值增大呈递减趋势。结果表明,本文的簇化算法能够有效地对冗余字典中的原子集合进行簇化。

3.2　信号逼近性能及误差

3.2.1　信号重构

信号的重构如图 3 所示,簇化算法采用 delta = 0.01,$\delta = 0.2$。图 3(a)~(d)分别显示了不同 $\varepsilon_{\text{stop}}$ 和 γ 下的重构效果。可以看出本算法可以有效重构信号。



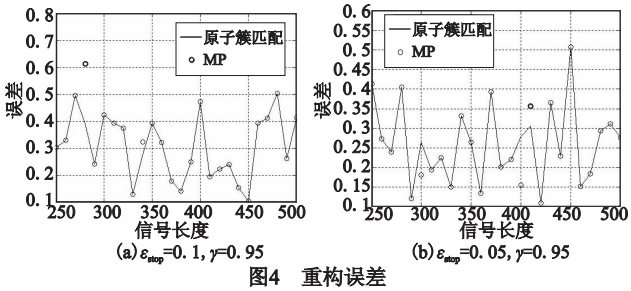
(a) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.1, γ=0.9　(b) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.1, γ=0.8

(c) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.2, γ=0.9　(d) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.2, γ=0.8

图3　重构效果

3.2.2　信号重构误差

重构误差随信号长度的变化如图 4(a)(b)所示,其中纵坐标为误差的 2 范数。从图中可以看出,原子簇快速匹配算法对信号逼近性能在大部分区域误差相同,随 γ 的增大与 $\varepsilon_{\text{stop}}$ 的减小收敛于 MP 算法。



(a) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.1, γ=0.95　(b) $\varepsilon_{\text{stop}}$=0.05, γ=0.95

图4　重构误差

3.2.3　重构时间性能

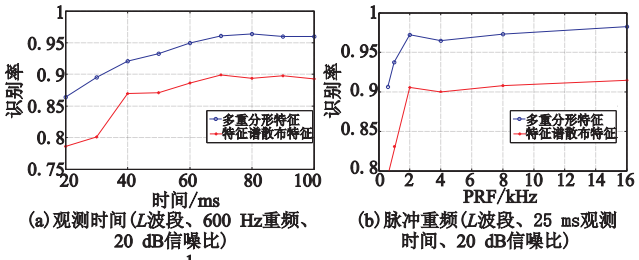
MP 与原子簇算法逼近时间随信号长度变化如图 5 所示。信号的误差阈值 $\varepsilon_{\text{stop}} = 0.1$,簇内原子选取阈值 $\gamma = 0.8$。

可见在相同的信号长度下,本算法的重构时间相对于 MP 算法,在时间性能上提高了大约 5 倍,同时本算法信号重构时间对信号长度具有更强的鲁棒性。

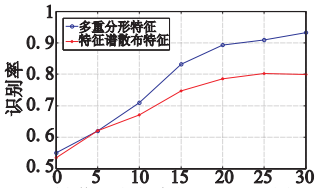
(下转第 409 页)

调制回波出发,提取基于多重分形特征的 JEM 特征,在此基础上,提出了基于多重分形特征的低分辨雷达目标分类方法。实验研究表明,在低重频、短照射的常规低分辨雷达体制下,多重分形特征参数对于喷气式飞机、螺旋桨飞机和直升机三类飞机目标具有良好的区分能力,基于多重分形特征的模式分类器能够有效地对三类飞机目标进行分类,并具有优越的分类性能。

当然,需要指出的是,常规低分辨防空雷达由于发射的是窄带信号,其分辨率较低,仅适用于对目标进行粗分类。若能对其进行宽带改造,增加宽带信号发射和处理设备,进一步获取包含目标精细几何结构的高分辨一维距离像,则有可能进一步对非合作目标的型号进行识别。



(a) 观测时间(L波段、600 Hz重频、20 dB信噪比)　(b) 脉冲重频(L波段、25 ms观测时间、20 dB信噪比)



(c) 信噪比(L波段、25 ms观测时间、600 Hz重频)

图4　识别率随观测时间、脉冲重频和信噪比的变化曲线

参考文献:

[1] 丁建江. 防空雷达目标识别技术[M]. 北京:国防工业出版社,2008: 40, 44-66.

[2] SHIRMAN Y D. Computer simulation of aerial target radar scattering, recognition, detection, and tracking [M]. Boston: Artech House, 2002: 111-124.

[3] CHEN Feng, LIU Hong-wei, DU Lan, *et al*. Target classification with low-resolution radar based on dispersion situations of eigenvalue spectra[J]. Science China: Information Sciences, 2010, 53(7): 1446-1460.

[4] MARTIN J, MULGREW B. Analysis of the theoretical return signal from aircraft blades[C]//Proc of IEEE International Conference on Radar. 1990: 569-572

[5] PIAZZA E. Radar signals analysis and modellization in the presence of JEM application to the civilian ATC radars[J]. IEEE AES Systems Magazine, 1999, 14(1): 35-40.

[6] 高隽. 智能信息处理方法导论[M]. 北京:机械工业出版社,2004: 235-247.

[7] 都国雄,宁宣熙. 上海证券市场的多重分形特性分析[J]. 系统工程理论与实践,2006,27(10): 40-47.

[8] 赵健,雷蕾,蒲小勤. 分形理论及其在信号处理中的应用[M]. 北京:清华大学出版社,2008: 57-160.

[9] GRASSBERGER P. Generalized dimensions of strange attractors[J]. Physics Letters A, 1983, 97(6): 227-230.

[10] HENTSCHEL H G E, PROCACCIA I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors[J]. Physica D, 1983, 8(3): 435-444.

[11] HALSEY T C, JENSEN M H, KADANOFF L P, *et al*. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets[J]. Physical Review A, 1986, 33(2): 1141-1151.

[12] 孙霞,吴自勤,黄畇. 分形原理及其应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2003: 53-73.

[13] 黄培康,殷红成,许小剑. 雷达目标特性[M]. 北京:电子工业出版社,2005: 114-115.

(上接第 398 页)

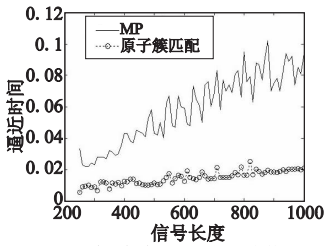


图5　MP与原子簇算法逼近时间随信号长度变化

4　结束语

本文提出一种新的信号稀疏分解方法——原子簇快速匹配追踪算法。与传统的匹配追踪算法不同,每次迭代中,本算法充分利用了相邻迭代过程中原子的非相关性以及神经网络的快速学习能力来构造信号的稀疏逼近,大大降低了运算复杂度。实验结果表明,新的算法获得与匹配追踪算法相当的逼近性能,同时稀疏分解的速度至少提高了 7 倍,有利于下一步实际应用研究的开展。

参考文献:

[1] YANG Jian-chao, YU Kai, GONG Yi-hong, *et al*. Linear spatial pyramid matching using sparse coding for image classification[C]//Proc of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2009: 1794-1801.

[2] CHOU Yao-tang, HWANG Wen-liang, HUANG Chung-lin. Gain-shape optimized dictionary for matching pursuit video coding[J]. Signal Processing, 2003, 83(9): 1937-1943.

[3] NEFF R, ZAKHOR A. Matching pursuit video-part 1: dictioaty approximation[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2002, 12(1): 13-26.

[4] GRIBONVAL R. Fast matching pursuit with a multi-scale dictionary of Gaussian chirps[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(5): 994-1001.

[5] KRUTZ-DELGADO K, MURRAY J F, RAO B D, *et al*. Dictionary learning algorithms for sparse representation[J]. Neural Computation, 2003, 15(2): 349-396.

[6] MALLAT S, ZHANG Zhi-feng. Matching pursuit with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(12): 3396-3415.

[7] 范虹,郭鹏,王芳梅. 非平稳信号稀疏表示的研究发展[J]. 计算机应用,2012,32(1): 272-278.

[8] 侯书东,孙权森. 稀疏保持典型相关分析及在特征融合中的应用[J]. 自动化学报,2012,38(4): 659-665.

[9] 程文波,王华军. 信号稀疏表示的研究及应用[J]. 西南石油大学学报,2008,30(5): 148-151.

[10] DAVIS G, MALLAT S, AVELLANEDA M. Adaptive greedy approximations[J]. Journal of Constructive Approximation, 1997, 13(1): 57-98.

[11] FRIEDMAN J H, STUETZLE W. Projection pursuit regression[J]. Journal of the American Statistical Association, 1981, 76(376): 817-823.