# 无标度网络中边权重对传播的影响*

谢 斐, 张 昊, 陈 超
(国防科学技术大学 信息系统工程重点实验室, 长沙 410073)

**摘 要**: 为独立研究权重涨落的影响,在权重涨落变化时,需要保证边的平均权重保持不变,为此提出了满足平均权重不变条件的边权重定义,给出了一种新的通用易感—感染—康复(SIR)模型在加权网络中的表述方法。仿真实验结果表明,在加权无标度网络中,权重涨落增大时,SIR 模型中传染病的发展得到抑制,传播速度和最终规模均低于权重为 1 的等权网络。

**关键词**: 加权复杂网络; 易感—感染—康复模型; 边权重; 传播
**中图分类号**: TP393 **文献标志码**: A **文章编号**: 1001-3695(2013)01-0238-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.01.061

# Role of weight in spreading process over scale-free networks

XIE Fei, ZHANG Hao, CHEN Chao
(*Science & Technology on Information Systems Engineering Laboratory*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

**Abstract**: To investigate the effect of weight fluctuations, it must ensure that the average weight of edge keeps invariance when weight fluctuations increase. This paper proposed a new weight definition, which satisfied the invariance condition of average weight, and gave a new description of general SIR model in weighted complex networks. Experiments show that epidemics spread slowly in weighted scale-free networks, when weight fluctuations increase.

**Key words**: weighted complex network; susceptible-infected-recovered (SIR); edge weight; spread

复杂网络理论从组成部分间连接的角度考察复杂系统的性质,深入研究了复杂系统的结构、模型和动力学规律。研究表明,网络结构对传播、同步和级联失效等动力学有重要的影响[1~5]。传染病与计算机病毒、新闻、谣言等的传播规律与动力原理具有很大的相似性,复杂网络的传播动力学通常基于传染病模型研究[1]。大量真实世界复杂网络节点度分布具有无标度特性[6],传染病在无权无标度网络中传染阈值趋近于0[2~5]。然而,传播相关的复杂网络往往是加权网络,研究边的权重对传播过程的影响具有重要的意义。

无权网络将两节点间的关系描述为二元状态,0 代表两节点间不存在边,1 代表两节点间存在一条边。加权网络考虑边具有不同权重的可能,用实数表示边的权重,权重的含义一般源于实际网络的性质,如移动通信网络的边权重代表两用户间的通话次数或时长[7,8];社会网络的边权重代表两个体间的亲近程度,交通网络的边权重代表两城市间的客流量[9,10];论文共著网络的边权重代表两研究者合作的程度[11~14]等。加权网络的结构特性[7~9,11,12]、模型[10,15~17]和动力学研究[18~23]具有重要的理论和实践价值。Barrat 等人[9]发现在加权网络中边权重与其两端节点的度存在相关性,并近似表示为 $w_{ij} \sim (k_i k_j)^{\theta}$,其中 $\theta$ 是关于特定加权网络的常量指数,如国际航空网络中 $\theta = 0.5 \pm 0.1$。Yan 等人[21]研究了易感—感染(susceptible-infected,SI)传染病模型在加权网络上的规律,指出权重分布的发散,导致加权无标度网络中 SI 传染病传播速度下降,低于对应的无权网络(即把加权网络的边权重都看做 1,其余不变)。Karsai 等人[22]基于平均场方法解析了加权网络中的易感—感染—易感(susceptible-infected-susceptible,SIS)传染病模型。Yan 等人[20]研究了加权无标度网络中非对称传染力条件下的 SIS 传染病模型,得到了大于 0 的传染阈值,且传染速度大为降低。Chu 等人[18]研究了加权网络中社区结构对 SI 传染病模型的影响,指出社区之间的边对传染病传播更为重要。Chu 等人[19]研究了加权无标度网络中非线性传染力情况下的易感—感染—康复(SIR)传染病模型,通过调节传染力指数 $\alpha$ 和权重指数 $\beta$,得到了大于 0 的传染阈值。

已有研究从不同的角度定义了边的权重,考察了权重涨落对传播动力学的影响,但存在边平均权重随参数变化的问题。Yan 等人[21]基于 BBV 模型[15]研究权重分布的影响,在 BBV 模型中,边平均权重随控制参数 $w_0$ 和 $\delta$ 变化。Giuraniuc 等人[24]和 Karsai 等人[22]假设边权重依赖于其两端节点的度,即 $w_{ij} \sim (k_i k_j)^{\theta}$,并定义 $w_{ij} = (k_i k_j)^{\theta} / \langle k^{\theta} \rangle^2$,通过推导可以得到边平均权重随参数 $\theta$ 变化。Chu 等人[19]对权重的定义与文献[22,24]类似。在以上情况下,权重涨落与平均权重两个因素共同影响加权网络的动力学行为,不利于独立分析权重涨落变化对传播现象的影响。

## 1 权重定义

不同的加权网络,边权重具有不同的定义。研究表明,连接节点 $i$ 和 $j$ 的边的权重可近似认为仅依赖于边两端节点的度 $k_i$ 和 $k_j$,即 $w_{ij} = g(k_i, k_j) a_{ij}$,其中 $a_{ij}$ 为网络的邻接矩阵,$g(k_i, k_j)$ 为值域大于 0 的对称函数[9, 22, 24]。根据文献[9,22,24]的研究工作,本文重点研究加权网络中的 $g(k_i, k_j) \sim (k_i k_j)^{\theta}$ 的

**收稿日期**: 2012-05-11; **修回日期**: 2012-06-18 **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(60904065,61105124)

**作者简介**:谢斐(1983-),男,天津人,博士研究生,主要研究方向为社会网络分析(xiefei2046@yahoo.com.cn);张昊(1983-),男,博士研究生,主要研究方向为复杂社会网络传播动力学;陈超(1977-),男,讲师,博士,主要研究方向为社会设计工程、信息系统工程.

情况。

对于不存在度关联的随机网络[25](配置模型网络),文献[22,24]提出的权重定义 $w_{ij}=(k_ik_j)^{\theta}/\langle k^{\theta}\rangle^2$,并不能保证 $\theta$ 变化时边平均权重不变。需要注意的是,两节点间的边权重只有在两节点间存在边时,才具有以上定义产生的数值;两节点间不存在边时,可以认为不存在权重或为 0。

对于文献[22,24]的权重定义 $w_{ij}=(k_ik_j)^{\theta}/\langle k^{\theta}\rangle^2$,配置模型网络的平均权重为

$$\langle w\rangle=\sum_{k_1k_2}\left(\frac{k_1p(k_1)}{\sum_{k'}k'p(k')}\frac{k_2p(k_2)}{\sum_{k'}k'p(k')}\frac{(k_1k_2)^{\theta}}{\langle k^{\theta}\rangle^2}\right)=\sum_{k_1k_2}\left(\frac{k^{1+\theta}p(k_1)}{\langle k\rangle}\times\frac{k_2^{1+\theta}p(k_2)}{\langle k\rangle}\frac{1}{\langle k^{\theta}\rangle^2}\right)=\frac{1}{\langle k\rangle^2\langle k^{\theta}\rangle^2}\sum_{k_1k_2}(k_1^{1+\theta}p(k_1)k_2^{1+\theta}p(k_2))=\frac{1}{\langle k\rangle^2\langle k^{\theta}\rangle^2}(\sum_{k_1}k_1^{1+\theta}p(k_1))(\sum_{k_2}k_2^{1+\theta}p(k_2))=\left(\frac{\langle k^{1+\theta}\rangle}{\langle k\rangle\langle k^{\theta}\rangle}\right)^2 \tag{1}$$

即平均权重随参数 $\theta$ 变化而变化,从而该权重定义不能保证参数 $\theta$ 变化时,加权网络的边平均权重不变,因此不利于独立分析权重涨落变化对传播现象的影响。本文对以上定义方式作如下改进,定义两节点 $i$ 和 $j$ 间边的权重为

$$w_{ij}^{*}=\frac{\langle k\rangle^2(k_ik_j)^{\theta}}{\langle k^{1+\theta}\rangle^2}=w_0(k_ik_j)^{\theta},\ w_0=\frac{\langle k\rangle^2}{\langle k^{1+\theta}\rangle^2} \tag{2}$$

提出的定义满足 Barrat 等人[9]提出的 $w_{ij}\sim(k_ik_j)^{\theta}$,当 $\theta=0$ 时,$w_{ij}^{*}=1$,即提出的权重定义能够产生边权重都为 1 的等权网络(等价于无权网络),从而便于与无权网络进行比较。在提出的权重定义条件下,配置模型网络[25]的边平均权重为

$$\langle w^{*}\rangle=\sum_{k_1k_2}\left(\frac{k_1p(k_1)}{\sum_{k'}k'p(k')}\frac{k_2p(k_2)}{\sum_{k'}k'p(k')}\frac{(k_1k_2)^{\theta}\langle k\rangle^2}{\langle k^{1+\theta}\rangle^2}\right)=\frac{\langle k\rangle^2}{\langle k^{1+\theta}\rangle^2}\times\sum_{k_1k_2}\left(\frac{k_1^{1+\theta}p(k_1)}{\langle k\rangle}\frac{k_2^{1+\theta}p(k_2)}{\langle k\rangle}\right)=\frac{1}{\langle k^{1+\theta}\rangle^2}(\sum_{k_1}k_1^{1+\theta}p(k_1))(\sum_{k_2}k_2^{1+\theta}p(k_2))=1 \tag{3}$$

从而提出的权重定义保证了加权网络边平均权重的不变性,权重的涨落由参数 $\theta$ 控制。当参数 $\theta$ 变化时,引起权重涨落变化,以便于独立分析权重涨落对网络动力学行为的影响。

## 2　通用 SIR 模型

在 SIR 模型中,节点状态分为易感染态、感染态和康复态(又称移除态)三种。易感染态节点不具有传染性,接触病原体时以某概率被感染,从而进入感染态;感染态节点具有传染性,感染态节点以某概率康复或死亡,不再具有传染性,即进入康复态。

传统的传染病模型一般假设常数的状态转移比率,即传播与康复概率函数只能为指数形式。但现实世界中,传播与康复概率函数并不一定为指数形式。若康复概率函数为指数形式,则表明被感染节点在感染后$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内进入移除态的概率随时间 $t$ 递减。而在现实生活中,有些传染病的不同患者有相近的康复周期或死亡周期,这与指数形式的康复概率函数是矛盾的。Karrer 等人[26]提出了通用传染病模型,突破了以上限制,可以自定义接触行为相应的传播与康复概率函数,从而更具通用性。因此,本文采用通用传染病模型进行研究。

Karrer 等人提出的通用传染病模型是针对无权网络的,其传播与康复概率函数定义如下:记传播概率函数为 $s(t)$;$s(t)\mathrm{d}t$ 表示易感染态节点开始与病原载体持续接触后,在$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内被疾病感染的概率;记康复函数为 $r(t)$;$r(t)\mathrm{d}t$ 表示感染态节点在被感染后的$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内康复的概率。$s(t)$ 和 $r(t)$ 可以是非指数形式概率密度函数。在感染后的$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内,感染态节点向处于易感染态的邻居传播疾病的概率记为 $f(t)\mathrm{d}t$:

$$f(t)\mathrm{d}t=s(t)(1-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}t=s(t)\int_t^{+\infty}r(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{4}$$

对于加权网络,边的权重表示该边的某种能力。例如,加权社会网络的边权重代表节点间的亲近性,边权重越大,两节点的关系越紧密;加权移动通信网络的边权重代表节点间的通话次数和时长,边权重越大,两节点的联系越频繁;对于社会接触网络,权重通常代表节点间接触的频率,权重越大,在单位时间内两节点的接触次数越多,更容易传播疾病。从而在加权网络中,传播函数应考虑到边的权重,对于权重为 $w$ 的边,传播函数 $s^{*}(w,t)$ 应满足式(5):

$$\int_0^t s^{*}(w,\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{wt}s(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

式(5)表示权重为 $w$ 的边在$[0,t]$时间内的传播效果,应该等价于权重为 1 的边在$[0,wt]$时间内的传播效果。式(5)对时间 $t$ 求导得

$$s^{*}(w,t)=w\cdot s(wt) \tag{6}$$

节点的康复过程通常不受边的权重影响,因此,在加权网络中,康复函数的定义应与无权网络相同。至此,已完成加权网络中的传播与康复概率函数的定义。

## 3　仿真实验

实验的主要目的是考察权重涨落变化对 SIR 传染病模型的影响。实验通过本文的边权重定义中的参数 $\theta$ 控制网络的边权重涨落变化,同时保证平均权重不变,比较不同 $\theta$ 取值时 SIR 传染病模型的特点。

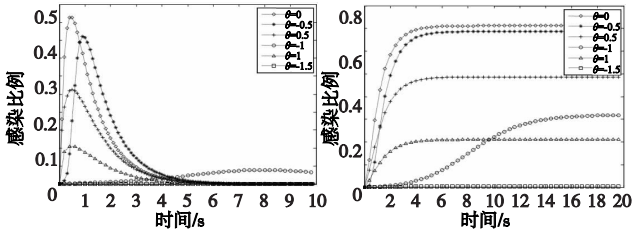
现实世界的复杂网络大多具有无标度特性[6],实验以服从幂律分布的配置模型网络[25]为平台,度分布 $p(k)\sim k^{-\alpha}$ 且 $\alpha=2$,网络规模为9 000 个节点;通用 SIR 模型的传播与康复函数分别为 $s(t)=\beta\mathrm{e}^{-\beta t}$ 和 $r(t)=\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}$,则 $f(t)=\beta\mathrm{e}^{-(\beta+\gamma)t}$,其传播过程取决于 $\beta/\gamma$,当 $\beta/\gamma$ 取值固定时,$\gamma$ 的取值只改变了传染病发展的时间尺度,并不改变趋势和结果,不失一般性,取 $\gamma=1$。

图 1 表示 $\beta=4$ 条件下,$\theta$ 分别取值 1、0.5、0、−0.5、−1、−1.5 时,传染病随时间的发展情况;其说明当 $\theta$ 远离 0 时,即网络的权重涨落增大时,传染病的发展受到了抑制,传播速度和最终规模均低于权重为 1 的等权网络;康复节点比例(图 1(a))对时间的微分和感染节点比例(图 1(b))成正线性关系,与指数形式的康复函数 $r(t)=\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 的数学含义相吻合;在图 1 中,$\theta=-1$ 对应曲线的最大值出现时间远落后于其他曲线,其原因是节点 $i$ 的所有边权重和为

$$\mathrm{strength}(i)=\sum_{j\in n(i)}w_0(k_ik_j)^{\theta}=w_0k_i^{\theta}\sum_{j\in n(i)}k_j^{\theta}\approx w_0k_i^{\theta}k_i\sum_{k'}\frac{k'p(k')k'^{\theta}}{\langle k\rangle}=w_0k_i^{1+\theta}\frac{\langle k^{1+\theta}\rangle}{\langle k\rangle} \tag{7}$$

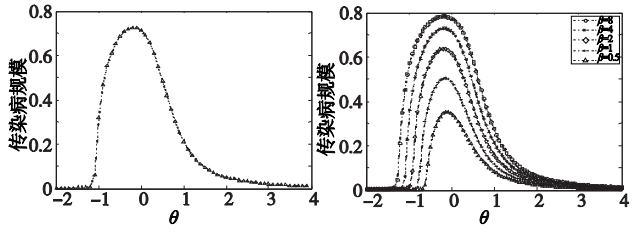
其中:$n(i)$ 表示节点 $i$ 的邻居节点集合。当 $\theta=-1$ 时,$\mathrm{strength}(i)\approx\frac{w_0}{\langle k\rangle}$,与节点度的取值无关,即各节点的重要性近似相等,网络中缺乏具有高传播能力的超级节点,从而使传染病到达最大传播规模的时间落后于 $\theta$ 的其他取值。在 $\theta=-1$ 情况下,度大的节点连接的边权重较小,边的疾病传播能力较弱;而度小的节点连接的边权重很大,但其邻居数量又相对较少,即 $\theta=-1$ 导致了各节点对疾病传播的作用大小相近,不利于产

生具有高传播力的超级节点,使得疾病的发展速度较慢。




(a)感染节点比例随时间的变化 (b)康复节点比例随时间的变化

图1 疾病随时间发展情况




(a) $\beta$=4, 最终传染病规模与参数$\theta$的关系 (b) $\beta$分别取值8、4、2、1、0.5条件下, 最终传染病规模与参数$\theta$关系

图2 $\beta$不同取值时,最终传染规模与参数$\theta$关系

图2(a)表示 $\theta$ 与最终传染规模的关系(SIR 模型中 $t=+\infty$ 时康复节点的比例等于曾经被感染节点总数),表明 $\theta$ 在取值0附近时,疾病的传染规模最大,即权重涨落接近0时,疾病最容易传染;当 $\theta$ 远离0时,权重涨落增大,传染规模减小。图2(b)表示传染病的传播比率 $\beta$ 在不同取值条件下,$\theta$ 与最终传染规模的关系,表明 $\theta$ 与最终传染规模的相对关系独立于 $\beta$ 的变化,从而得到实验结论,权重涨落增大时传染规模减小,具有普遍意义。实验结果与 Yan 等人[21] BBV 网络中的结果相似,从侧面说明了实验结论的合理性。本文提出的权重定义的优点在于更合理地定义了边的权重,保证参数变化时边的平均权重不变,从而克服了已有研究[21,22,24]存在的上述不足。

## 4 结束语

本文提出了加权网络的边权重定义方法,克服了现有研究存在的不足。在已有的权重定义中,当相关参数的取值变化时,边平均权重和权重涨落都发生了变化,在这种情况下,网络上的动力学规律不能简单归结为由权重涨落引起。文中提出的权重定义克服了以上不足,且满足研究领域公认的 $w(k_i,k_j)\sim(k_ik_j)^{\theta}$ 基本性质。文中对加权边的传染函数作了更为直观的定义:$s^*(w,t)=w\cdot s(wt)$,权重 $w$ 代表了两节点的接触频率,接触频率越高,更容易发生传播。对于加权无标度网络的 SIR 传染病模型,当网络的权重涨落增大时,传染病的发展受到了抑制,传播速度和最终规模均低于权重为1的等权网络。

**参考文献:**


[1] 周涛,傅忠谦,牛永伟,等. 复杂网络上传播动力学研究综述[J]. 自然科学进展,2005,15(5):513-518.

[2] BOGUÑÁ M, PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations [J]. Physical Review Letters,2003,90(2):028701.

[3] MAY R M, LIOYD A L. Infection dynamics on scale-free networks [J]. Physical Review E,2001,64(6):066112.

[4] NEWMAN M E J. Spread of epidemic disease on networks[J]. Physical Review E,2002,66(1):016128.

[5] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Physical Review Letters,2001,86(14):3200.

[6] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science,1999,286(5439):509-512.

[7] ONNELA J P, SARAMÄKI J, HYVÖNEN J, *et al*. Structure and tie strengths in mobile communication networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2007,104(18):7332-7336.

[8] ONNELA J P, SARAMÄKI J, HYVÖNEN J, *et al*. Analysis of a large-scale weighted network of one-to-one human communication[J]. New Journal of Physics,2007,9(6):1~27.

[9] BARRAT A, BARTHÉLEMY M, PASTOR-SATORRAS R, *et al*. The architecture of complex weighted networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2004,101(11):3747-3752.

[10] BARTHÉLEMY M, BARRAT A, PASTOR-SATORRAS R, *et al*. Characterization and modeling of weighted networks[J]. Physica A,2005,346(1-2):34-43.

[11] NEWMAN M E J. Scientific collaboration networks II, shortest paths, weighted networks, and centrality[J]. Physical Review E,2001,64(1):016132.

[12] NEWMAN M E J. Scientific collaboration networks I, network construction and fundamental results[J]. Physical Review E,2001,64(1):016131.

[13] BÖRNER K, DALL'ASTA L, KE Wei-mao, *et al*. Studying the emerging global brain: analyzing and visualizing the impact of co-authorship teams[J]. Complexity,2005,10(4):57-67.

[14] LI Meng-hui, FAN Ying, CHEN Jia-wei, *et al*. Weighted networks of scientific communication: the measurement and topological role of weight[J]. Physica A,2005,350(2-4):643-656.

[15] BARRAT A, BARTHÉLEMY M, VESPIGNANI A. Modeling the evolution of weighted networks[J]. Physical Review E,2004,70(6):066149.

[16] GOH K I, KAHNG B, KIM D. Nonlocal evolution of weighted scale-free networks[J]. Physical Review E,2005,72(1):017103.

[17] OU Qing, JIN Ying-di, ZHOU Tao, *et al*. Power-law strength-degree correlation from resource-allocation dynamics on weighted networks [J]. Physical Review E,2007,75(2):021102.

[18] CHU Xiang-wei, GUAN Ji-hong, ZHANG Zhong-zhi, *et al*. Epidemic spreading in weighted scale-free networks with community structure[J]. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment,2009(7):P07043.

[19] CHU Xiang-wei, ZHANG Zhong-zhi, GUAN Ji-hong, *et al*. Epidemic spreading with nonlinear infectivity in weighted scale-free networks[J]. Physica A,2011,390(3):471-481.

[20] YAN Gang, FU Zhong-qian, CHEN G. Epidemic threshold and phase transition in scale-free networks with asymmetric infection[J]. European Physical Journal B,2008,65(4):591-594.

[21] YAN Gang, ZHOU Tao, WANG Jie, *et al*. Epidemic spread in weighted scale-free networks[J]. Chinese Physics Letters,2005,22(2):510-513.

[22] KARSAI M, JUHÁSZ R, IGLÓI F. Nonequilibrium phase transitions and finite-size scaling in weighted scale-free networks[J]. Physical Review E,2006,73(3):036116.

[23] WANG Wen-xu, CHEN Guan-rong. Universal robustness characteristic of weighted networks against cascading failure[J]. Physical Review E,2008,77(2):026101.

[24] GIURANIUC C V, HATCHETT J P L, INDEKEU J O, *et al*. Trading interactions for topology in scale-free networks[J]. Physical Review Letters,2005,95(9):098701.

[25] NEWMAN M E J, STROGATZ S H, WATTS D J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications[J]. Physical Review E,2001,64(2):026118.

[26] KARRER B, NEWMAN M E J. Message passing approach for general epidemic models[J]. Physical Review E,2010,82(1):016101.