

基于辅助双正交的实值离散多 Gabor 变换*

胡学友¹, 李锐², 陶亮²

(1. 合肥学院 电子信息与电气工程系, 合肥 230039; 2. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

摘要: 为了改善传统离散 Gabor 变换的时频分辨率, 降低离散 Gabor 变换计算的复杂性, 提出了一种基于多高斯窗的实值离散 Gabor 变换分析窗的快速求解算法。对多高斯窗下离散 Gabor 变换双正交关系式进行了简化, 给出了分析窗组的代数方程表达式。该算法相对于多高斯 Gabor 展开的计算复杂度明显降低, 仿真实验的结果也证明了该算法的有效性。

关键词: 实值离散 Gabor 变换; 离散多 Gabor 展开; 时频分辨率; 双正交

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2013)01-0111-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.01.026

Multi-Gabor real discrete Gabor transforms based on auxiliary bi-orthogonal

HU Xue-you¹, LI Rui², TAO Liang²

(1. Dept. of Electronics & Electrical Engineering, Hefei University, Hefei 230039, China; 2. Key Laboratory of Intelligence Computing & Signal Processing for Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: In order to improve the joint time-frequency resolution of the traditional discrete Gabor transform, and decrease computational complexity limits its practical application, this paper proposed a fast algorithm to computing the analysis window of real discrete Gabor transforms based on multi-Gaussian window, which could simplify the calculation process of the discrete Gabor transforms. It gave the discrete multi-Gabor expansion based on original bi-orthogonal function. The computational load of the proposed algorithm is far less than the discrete multi-Gabor algorithm. Experimental results also show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: real-valued discrete Gabor transform; discrete multi-Gabor expansion (DMGE); time-frequency signal analysis resolution; original bi-orthogonal

Gabor 变换是重要的时频分析方法之一, 其重要特点在于 Gabor 变换系数揭示了信号在时域与频域的局部化特性^[1]。Gabor 变换的这个优点已被用于非平稳信号的时频分析、信号检测、图像压缩与识别以及线性时变系统建模等方面^[2]。传统复值离散 Gabor 变换是单窗的, 受限于固定的时频分辨率这一缺点。为了改善传统离散 Gabor 变换时频分辨率, 国外学者提出了基于框架理论的多 Gabor 展开 (DMGE)^[3,4], 但其计算复杂度高; 基于离散余弦变换和离散 Hartley 变换的实值离散 Gabor 变换的快速算法^[5,6], 其变换系数与复值离散 Gabor 变换系数的实部和虚部有着非常简单的加减关系, 可大大减少复值离散 Gabor 变换系数计算量; 在重构信号实现的限制条件下采用固定分析窗和综合窗的 Gabor 变换同样计算量复杂^[7]; 利用 Gabor 的局部特征尺度进行特征提取^[8]和目标识别^[9]同样存在计算复杂度的问题。本文在文献[3]提出的离散多 Gabor 展开和文献[5]提出的快速算法基础上, 提出辅助双正交多高斯窗的实值离散 Gabor 变换及其快速求解算法。

1 离散 Gabor 变换

设 $x(k)$ 为一个有限长或经过周期扩展的时间序列, 其周

期为 L 。传统的单窗离散 Gabor 展开式定义为^[1]

$$x(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c(m, n) h(k - m\bar{N}) \exp(j2\pi nk/N) \quad (1)$$

$$c(m, n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \gamma(k - m\bar{N}) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (2)$$

其中: $j = \sqrt{-1}$; $L = M\bar{N} = \bar{M}N$; M 和 N 分别为 Gabor 时间和频率的抽样点数; $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 分别为 Gabor 频率和时间的抽样间隔。式 (1) 和 (2) 分别为离散 Gabor 逆变换 (即展开式) 和离散 Gabor 变换, 重建信号的条件是 $\bar{N} \bar{M} \leq L$ (或 $MN \geq L$)。临界抽样条件是 $L = M\bar{N} = \bar{M}N$, 过抽样出现在 $MN > L$ 条件下, 欠抽样条件是 $MN < L$ 下会丢失信息使原信号无法还原。综合窗 $h(k)$ 、双正交分析窗 $\gamma(k)$ 也是周期为 L 的实序列。其中 $h(k)$ 和 $\gamma(k)$ 满足双正交约束条件即完备性约束条件:

$$\sum_{k=0}^{L-1} h(k + mN) \times \exp(j2\pi nk/\bar{N}) \times \gamma(k) = \frac{L}{MN} \delta_m \delta_n$$
$$0 \leq m \leq \bar{M} - 1, 0 \leq n \leq \bar{N} - 1 \quad (3)$$

其中, $\delta_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ 。给定的综合窗 $h(k)$ 就可以由此式求出双正交分析窗 $\gamma(k)$ 。

收稿日期: 2012-05-10; **修回日期:** 2012-06-15 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (61071169); 安徽省教育厅重点基金资助项目 (KJ2010A011); 合肥学院人才资金资助项目 (12RC09)

作者简介: 胡学友 (1974-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为信号与信息处理 (xueyouhu@hfu.edu.cn); 李锐 (1986-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为信号处理; 陶亮 (1963-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为信号处理、模式识别等。

2 基于辅助双正交分析的实值离散多 Gabor 变换

设 $x(k)$ 是离散时间周期信号, 周期为 L , 离散实值离散多 Gabor 展开式和变换系数定义^[2,3]为式(4)和(5):

$$x(k) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a^{(i)}(m, n) h_{m,n}^{(i)}(k) \quad (4)$$

$$a^{(i)}(m, n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \gamma_{m,n}^{(i)}(k) \quad (5)$$

其中:

$$h_{m,n}^{(i)}(k) = h^{(i)}(k - m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (6)$$

$$\gamma_{m,n}^{(i)}(k) = \gamma^{(i)}(k - m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (7)$$

$$h^{(i)}(k) = \alpha^{(-i/2)} h(\alpha^{-i} k) \quad \alpha \geq 1 \quad (8)$$

$$\text{cas}(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad (9)$$

$h(k)$ 为高斯窗函数, 这里称为基窗或父窗, $h^{(i)}(k)$ 称为调制窗或子窗。传统的离散 Gabor 变换是单窗下进行的, 因此 Gabor 栅格大小是固定的, 根据信号的时域和频域不确定原理, 在单窗条件下很难使时间和频率分辨率同时做到较好; 对于给定的一组多综合窗, 要寻找其对应的多分析窗也是非常困难的^[2]。本文在文献[2]的基础上, 提出辅助多窗 $r_{m,n}^{(i)}(k)$ 和 $h_{m,n}^{(i)}(k)$, 其双正交关系为

$$\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} h^{(i)}(k + m\bar{N}) \gamma^{(i)}(k) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = \frac{L}{MN} \delta(m) \delta(n) \quad (10)$$

$$0 \leq m \leq \bar{M}-1, 0 \leq n \leq \bar{N}-1$$

式(10)的矩阵形式可表示为

$$H \cdot \gamma = v \quad (11)$$

其中:

$$v = \left[\frac{L}{MN}, 0, 0, \dots, 0 \right]^T \quad (12)$$

$$\gamma = [\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(I-1)}]^T \quad (13)$$

$$\gamma^{(i)} = [\gamma^{(i)}(0), \gamma^{(i)}(1), \dots, \gamma^{(i)}(L-1)]^T \quad (14)$$

$$0 \leq i \leq I-1$$

$$H = [h^{(0)}, h^{(1)}, \dots, h^{(I-1)}] \quad (15)$$

$$h^{(i)} = \begin{bmatrix} h_{0,0}^{(i)}(0) & h_{0,0}^{(i)}(1) & \dots & h_{0,0}^{(i)}(L-1) \\ h_{0,1}^{(i)}(0) & h_{0,1}^{(i)}(1) & \dots & h_{0,1}^{(i)}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\bar{M}-1, \bar{N}-1}^{(i)}(0) & h_{\bar{M}-1, \bar{N}-1}^{(i)}(1) & \dots & h_{\bar{M}-1, \bar{N}-1}^{(i)}(L-1) \end{bmatrix}_{(\bar{M}\bar{N}) \times (L)} \quad (16)$$

$$h_{m,n}^{(i)}(k) = h^{(i)}(k + m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$0 \leq i \leq I-1, 0 \leq m \leq \bar{M}-1, 0 \leq n \leq \bar{N}-1 \quad (17)$$

式(14)中的 γ 为多解, 通常取其广义逆解, 即

$$\gamma_g = H^T (HH^T)^{-1} v \quad (18)$$

例如, 已知一个高斯窗函数为 $h(k) = (32)^{-0.25} \exp\left\{-\pi \frac{(k - (L-1)/2)^2}{L}\right\}$ 。如图 1(a) 所示, 其中 $L=128, I=4, \alpha=2$; 根据提出算法的式(13)等可求得子综合窗族 $h^{(i)}(k)$, 如图 1(b) 所示; 求出与其相对应的四种分析窗族 $\gamma^{(i)}(k)$ 分别如图 1(c) ~ (f) 所示。其中: $M=16, N=8$, 临界抽样时, 如图 1(c) 所示; 当 $M=8, N=16$, 临界抽样时, 如图 1(d) 所示; 当 $M=32, N=16$, 过抽样率 $\frac{MN}{L}=4$ 时, 如图 1(e) 所示; 当 $M=32, N=32$, 抽样率 $\frac{MN}{L}=8$ 时, 如图 1(f) 所示。

根据双正交关系式求出分析窗族以后, 就可以利用快速 DHT 计算式(5)中 $a^{(i)}(m, n)$, 其中 $0 \leq i \leq I-1$, 即

$$a^{(i)}(m, n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \gamma^{(i)}(k - m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) =$$

$$\sum_{p=0}^{\bar{M}-1} \sum_{q=0}^{\bar{N}-1} x(pN + q) \gamma^{(i)}(pN + q - m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nq}{N}\right) =$$

$$\sum_{q=0}^{N-1} \left\{ \sum_{p=0}^{\bar{M}-1} x(pN + q) \gamma^{(i)}(pN + q - m\bar{N}) \right\} \text{cas}\left(\frac{2\pi nq}{N}\right) \quad (19)$$

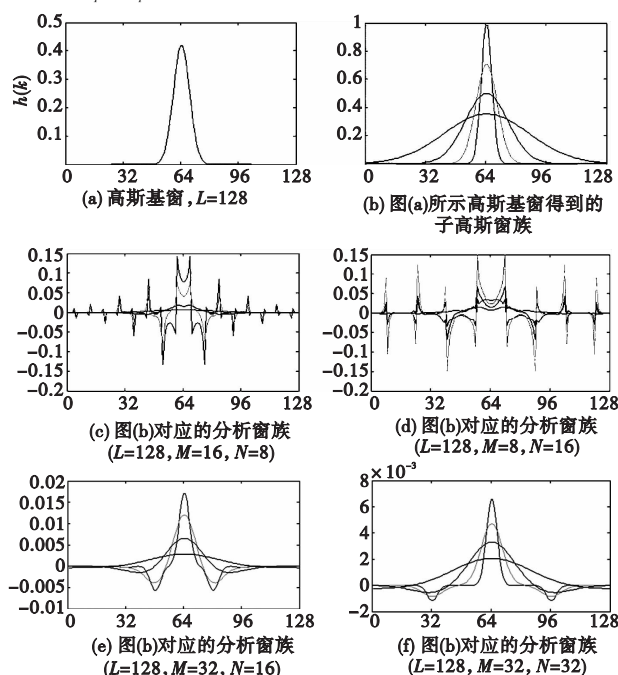


图1 高斯窗函数变换分析

信号的重建也可以利用快速 DHT 算法, 式(4)可重写为

$$x(k) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a^{(i)}(m, n) h_{m,n}^{(i)}(k) =$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a^{(i)}(m, n) h^{(i)}(k - m\bar{N}) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} h^{(i)}(k - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} a^{(i)}(m, n) \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right\}$$

$$x(pN + q) =$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} h^{(i)}(pN + q - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} a^{(i)}(m, n) \text{cas}\left(\frac{2\pi n(pN + q)}{N}\right) \right\} \quad (20)$$

其中: $k = pN + q; p = 0, 1, \dots, \bar{M}-1; q = 0, 1, \dots, N-1$ 。从式(20)中可以看出, 大括号里的第二个求和项是 N 点的 DHT 变换。表 1 是本文算法和文献[2]算法复杂性的对比, 从表中可以看出本文提出的算法的计算复杂度比文献[2]小, 因此具有较快的速度。

表1 本文提出的算法和文献[2]算法复杂度对比

算法	正变换	逆变换
本文算法	$I \times \{M \times (N \text{ 点 1-D DHT}) + M \times L \text{ 次实数相乘} + (\bar{M}-1) \times M \times N \text{ 次实数相加}\}$	$I \times \{M \times (N \text{ 点 1-D DHT}) + M \times L \text{ 次实数相乘} + (M-1) \times L \text{ 次实数相加}\}$
文献[2]算法	$I \times \{M \times M \times (N \text{ 点 1-D DFT}) + M \times L \text{ 次实数相乘} + (\bar{M}-1) \times M \times N \text{ 次复数相加}\}$	$I \times \{M \times M \times (N \text{ 点 1-D DFT}) + M \times L \text{ 次实数相乘} + (M-1) \times L \text{ 次复数相加}\}$

3 仿真实验

用多 Gabor 展开的时频分析工具来分析带有一个脉冲的跳频信号, 如图 2(a) 所示。此信号由两个不同频率的正弦信号和一个脉冲信号组成: $(0.1 \times \sin(2\pi \times 10 \times t) + 0.1 \times \sin(2\pi \times 20 \times t) + 0.3 \times \delta(t - 20))$, 信号长度 $L=128, M=128, N=64$; 采样频率为 80 Hz, 其中正弦信号的频率分别为 10 和 20 Hz。本文使用的时域较宽和时域较窄的两个高斯窗函数, 如图 2(b) 所示; 在时域较宽高斯窗下的 Gabor 频谱如图 2(c) 所示; 在时域较窄的高斯窗下的 Gabor 频谱如图 2(d) 所示; 在这两个窗函数下的多 Gabor 展开的频谱如图 2(e) 所示。从图 2(c) 中可以看出, 在宽高斯窗下很难检测到脉冲信号, 但是能

清晰地检测到两个正弦信号;从图 2(d)中可以看出,在窄高斯窗下很清晰地检测到了脉冲信号,但不能清晰地检测到两个正弦信号;由图 2(e)可以明显地看出,使用本文提出的多高斯窗进行检测,在多高斯窗下的 Gabor 能清晰地检测到脉冲信号,同时也能清晰地分辨出两个不同频率的正弦信号。图 2(f)是文献[2]中算法在宽高斯窗下的 Gabor 频谱图,虽然检测到了正弦信号,但时频平面上并不平坦;图 2(g)是文献[2]中算法在窄高斯窗下的 Gabor 频谱图,虽然检测到了脉冲信号,但是频谱两边粘滞不清;图 2(h)是文献[2]中算法在多高斯窗下的 Gabor 频谱图,虽然检测到正弦信号和脉冲信号,但是时频面上有其他频谱出现,而且不清晰。

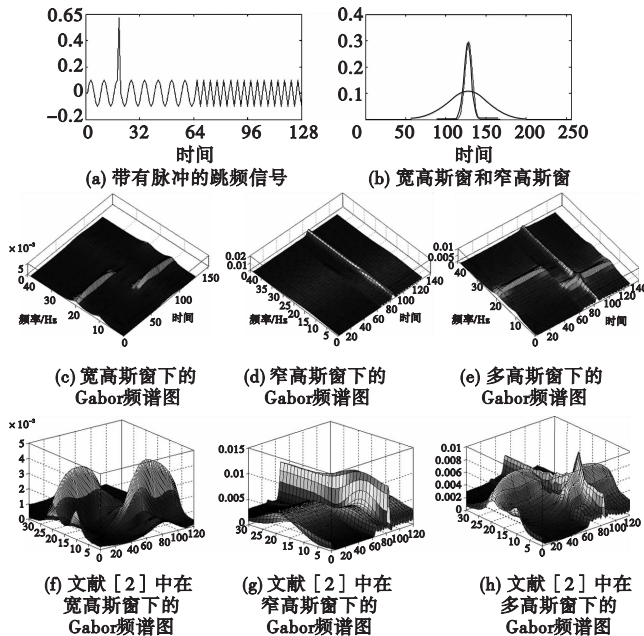


图2 带有脉冲的跳频信号变换分析

(上接第102页)算法提出了确定该重叠区域归属的判别 OASE-DA,并设计了归属判断的目标函数。由于对象—属性子空间边缘重叠区域与各个相邻子空间均有一定的从属关系,本文在确定其归属时,不仅考虑了最小化子空间的内紧凑度,而且还考虑了子空间之间的分离度。最后通过算例验证了该方法的有效性 with 可行性。

参考文献:

- [1] HAN Jia-wei, KAMBER M. 数据挖掘概念与技术[M]. 范明, 孟小峰, 等译. 2版. 北京:机械工业出版社, 2007.
- [2] 武森, 高学东, 巴斯蒂安 M. 数据仓库与数据挖掘[M]. 北京:冶金工业出版社, 2003.
- [3] VERLEYSEN M. Learning high-dimensional data [C]//Proc of NATO Advanced Research Workshop on Limitations and Future Trends in Neural Computation. 2001:141-162.
- [4] YANG Qiang, WU Xin-dong. 10 challenging problems in data mining research[J]. International Journal of Information Technology and Decision Making, 2006, 5(4): 597-604.
- [5] 杨凤召. 高维数据挖掘技术研究[M]. 南京:东南大学出版社, 2007.
- [6] 张燕萍, 姜青山. K-means 型软子空间聚类算法[J]. 计算机科学与探索, 2010, 4(11): 1019-1026.
- [7] 陈黎飞, 郭朝德, 姜青山. 自适应的软子空间聚类算法[J]. 软件学报, 2010, 21(10): 2513-2523.
- [8] 何虎翼, 姚莉秀, 沈红斌, 等. 一种新的子空间聚类算法[J]. 上海交通大学学报, 2007, 41(5): 557.

4 结束语

针对传统的单窗复值离散 Gabor 变换具有固定的时频分辨率, 文献[2]给出了基于框架的多 Gabor 变换算法复杂度较高。本文在多 Gabor 变换的基础上提出了一种基于辅助双正交分析法的实值离散 Gabor 变换及其快速算法, 该算法相比文献[2]算法减小了计算量。仿真实验证明提出的算法能明显改善传统 Gabor 变换的时频分辨率。

参考文献:

- [1] GABOR D. Theory of communication[J]. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1946, 94(73): 429-457.
- [2] 陶亮, 顾涓涓. 实值 Gabor 变换理论及应用[M]. 合肥:安徽科学技术出版社, 2005.
- [3] LI Shi-dong. Discrete multi-Gabor expansions[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1999, 45(6): 1954-1967.
- [4] AKAN A, CHAPARRO L F. Multi-window Gabor expansion for evolutionary spectral analysis[J]. Signal Processing, 1997, 63(3): 249-262.
- [5] TAO Liang, KWAN H K. Fast parallel approach for 2-D DHT-based real-valued discrete Gabor transform [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2009, 18(12): 2790-2796.
- [6] TAO Liang, KWAN H K. Novel DCT-based real-valued discrete Gabor transform and its fast algorithms [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(6): 2151-2164.
- [7] MATUSIAK E, MICHAELI T, ELDAR Y C. Noninvertible Gabor transforms[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(5): 2597-2612.
- [8] 徐婉莹, 黄新生, 刘育浩, 等. 一种基于 Gabor 小波的局部特征尺度提取方法[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(1): 72-78.
- [9] 杨清山, 郭成安, 金明录. 基于 Gabor 多通道加权优化与稀疏表征的人脸识别方法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(7): 1618-1624.
- [10] LAGAE A, LEFEBVRE S, DUTRE P. Improving Gabor noise [J]. IEEE Trans on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(8): 1096-1107.

- [9] 祝琴, 高学东, 武森, 等. 高维稀疏数据对象—属性分割[J]. 数学的认识与实践, 2011, 41(7): 184-189.
- [10] 单世民, 张宁, 江贺, 等. 基于网格和密度的簇边缘精度增强聚类算法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(23): 143-146.
- [11] QIU Bao-zhi, LI Xiang-li, SHEN Jun-yi. Grid-based clustering algorithm based on intersecting partition and density estimation[C]//Proc of Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Berlin: Springer, 2007: 368-377.
- [12] 高亚鲁. 子空间聚类算法的研究及应用[D]. 江苏: 江苏大学, 2009.
- [13] 余灿玲, 王丽珍, 张元武. 基于网格密度方向的聚类簇边缘精度加强算法[J]. 计算机研究与发展, 2010, 7(5): 815-823.
- [14] 皋军, 王士同. 具有特征排序功能的鲁棒性模糊聚类方法[J]. 自动化学报, 2009, 35(2): 145-153.
- [15] GAN G, WU J. A convergence theorem for the fuzzy subspace clustering (FSC) algorithm [J]. Pattern Recognition, 2008, 41(6): 1939-1947.
- [16] MacQUEEN J. Some methods for classification and analysis of multivariate observations[C]//Proc of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1967: 281-297.
- [17] XU Lei, JORDAN M I. On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures[J]. Neural Computation, 1996, 8(1): 129-151.
- [18] HUANG Zhe-xue, NG M K, RONG Hong-qiang, et al. Automated variable weighting in K-means type clustering[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(5): 657-668.