

一种核化图嵌入算法的快速求解模型^{*}

林玉娥¹, 李敬兆¹, 梁兴柱¹, 林玉荣²

(1. 安徽理工大学 计算机科学与工程学院, 安徽 淮南 232001; 2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 针对核化图嵌入算法对于人脸识别等高维小样本问题存在着计算量大且所需存储空间多的缺点, 提出了一种核化图嵌入算法的快速求解模型。该模型的思想是首先对原始样本进行降维处理, 对此给出了定理1和2。两个定理证明了样本先进行降维处理的可行性, 同时也表明这一过程是不损失任何有效鉴别信息的。然后再对新的低维样本按核化图嵌入算法进行计算。人脸库上的实验结果表明, 所提模型不但减少了算法的计算时间, 同时也保证了算法的分类识别率。

关键词: 核化图嵌入算法; 小样本问题; 模型; 鉴别信息; 分类

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)12-4758-03

doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2012.12.093

Fast model for kernel extension of graph embedding

LIN Yu-e¹, LI Jing-zhao¹, LIANG Xing-zhu¹, LIN Yu-rong²

(1. School of Computer Science & Engineering, Anhui University of Science & Technology, Huainan Anhui 232001, China; 2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Kernel extension of graph embedding for the small sample size problem such as face recognition needs not only a lot of computation time but also very large memory cost, then this paper presented a fast model for kernel extension of graph embedding. Firstly, it reduced the original samples into a lower space, which was feasible according to theorem 1 and theorem 2. Two theorems also show that this dimension reduction process is not losing any discriminant information. Then it computed the new low dimensional samples by kernel extension of graph embedding. The numerical experiments on facial database show that the proposed model not only reduce the computational time but also ensure rate of recognition in classification.

Key words: kernel extension of graph embedding; small sample size problem; model; discriminant information; classification

0 引言

近来基于图嵌入的特征提取算法受到广大学者的关注, 较为典型的有局部保持投影 (locality preserving projection, LPP)^[1]、无监督鉴别投影 (unsupervised discriminant projection, UDP)^[2]、邻域保持嵌入 (neighborhood preserving embedding, NPE)^[3]、边界 Fisher 鉴别分析 (marginal fisher analysis, MFA)^[4,5]。

目前基于图嵌入算法的改进主要有三个方面:

a) 如何有效解决小样本的研究, 如文献[6,7]提出的采用差分目标函数的策略, 这种方案虽然解决了小样本问题, 但实际上差分形式的目标函数求得的投影矩阵在识别效果上没有商形式的理想^[8]。

b) 对所求取的投影矩阵的约束, 如文献[9~11]给出的正交及不相关的改进算法, 这些改进方案均提高了原算法的识别性能。但上述两个方面改进算法都属于线性特征提取算法, 最终只能提取出图像的线性特征, 非线性算法可以有效提取出图像的非线性特征, 因此能够显著提高算法的性能。

c) 对线性的图嵌入算法的非线性拓展, 如文献[12~15]

提出基于核映射的图嵌入算法。

虽然基于核映射的非线性图嵌入算法能够有效地提取出样本的非线性特征, 从而提高算法的识别性能, 但也存在着下面两个问题: a) 基于核的图嵌入方法计算核矩阵 K 的计算量大, K 实际上是由所有的训练样本矢量的内积生成, 假设 N 为训练样本的总数, n 为样本的维数, 则核矩阵 K 所需的计算量为 $O(nN^2)$; b) 在识别阶段, 由于识别样本要与所有训练样本进行内积运算, 故要保存所有的训练样本, 因此也将耗费大量的存储空间。

本文针对上述两个问题进行了研究, 提出一种核化图嵌入算法的快速求解模型 (fast model for kernel extension of graph embedding)。本文通过定理1和2证明了高维样本可先进行降维处理, 即将高维样本投影到总体散度矩阵 S_t 秩空间, 而在这个低维子空间相对于图嵌入特征提取算法的目标函数并不损失任何有效的鉴别信息, 从而在理论上证明了这种方案的可行性, 然后再将降维后的训练样本按核化图嵌入算法进行处理。最后本文给出了该模型的具体框架。该模型不但增强了算法的识别性能, 同时节省了计算量与存储开销, 增强了算法的实用性。

收稿日期: 2012-05-16; **修回日期:** 2012-06-29 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (60975009, 61170060); 安徽省自然科学基金资助项目 (1208085QF123, 11040606M135); 安徽省高等学校自然科学基金资助项目 (KJ2012Z084, KJ2011A083)

作者简介: 林玉娥 (1979-), 女, 黑龙江宁安人, 讲师, 博士, 主要研究方向为模式识别、图像处理等 (linyue_e@126.com); 李敬兆 (1963-), 男, 教授, 硕士, 主要研究方向为模式识别、嵌入式系统等; 梁兴柱 (1979-), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为模式识别、网络安全等; 林玉荣 (1972-), 女, 副教授, 硕士, 博士, 主要研究方向为高光谱图像处理、导航制导等。

1 相关理论介绍

假设 $X = [x_1 \cdots x_i \cdots x_N]$ 表示全体训练样本集, N 表示样本数目, n 表示样本的维数, 图嵌入特征提取算法的思想是使样本降维后在低维空间里尽可能地保持原来的邻近关系。 $G = \{X, W\}$ 为无向有权图, 每个样本点 x_i 为图中的一个顶点, W 为相似度矩阵, W_{ij} 表示样本 i 和 j 的相似度, 可按式(11)计算:

$$W_{ij} = \begin{cases} \exp(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{t}) & \|x_i - x_j\|^2 \leq \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其目标函数为

$$\min_A J(A) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|A^T x_i - A^T x_j\|^2 W_{ij} = |A^T X L X^T A| = \text{tr}(A^T X L X^T A) \quad (2)$$

其中: $L = D - W$ 为拉普拉斯矩阵; D 为对角阵, 其对角元素 $D_{ii} = \sum_j W_{ij}$ 。

为了防止求出没有意义的解, 加上约束条件 $A^T X D X^T A = I$, 则式(2)可转换为

$$\max_A J(A) = \frac{\text{tr}(A^T X D X^T A)}{\text{tr}(A^T X L X^T A)} \quad (3)$$

式(3)提供了一个统一的线性图嵌入框架。可以通过选择不同的 L 和 D , 得到不同的线性降维算法, 如 LPP、UDP、MFA 等。

核化图嵌入特征提取算法的基本思想是: 将原始训练样本通过一个非线性映射 Φ 变换到某一高维(可能是无限维)特征空间 H 中, 则 X 在高维特征空间 H 中的表示为

$$\Phi(X) = [\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_N)] \quad (4)$$

因此在高维空间中式(3)为

$$\max_A J^\Phi(A) = \frac{\text{tr}(A^T \Phi(X) D \Phi(X)^T A)}{\text{tr}(A^T \Phi(X) L \Phi(X)^T A)} \quad (5)$$

为了解决小样本问题并证明算法的完备性, 文献[15]给出了式(5)的等价形式

$$\max_A J^\Phi(A) = \frac{\text{tr}(A^T \Phi(\bar{X}) D \Phi(\bar{X})^T A)}{\text{tr}(A^T \Phi(\bar{X}) L \Phi(\bar{X})^T A)} \quad (6)$$

式中, $\Phi(\bar{X}) = [\Phi(x_1) - m^\Phi, \cdots, \Phi(x_N) - m^\Phi]$, $m^\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i)$

为高维空间中测试样本的均值向量。对此文献[15]给出应先降维至高维特征空间 H 中 S_i^Φ 非零特征值所对应的特征向量构成的空间, 而在这一空间中相对于式(6)并不损失任何有效的鉴别信息。

2 核化图嵌入算法的快速求解模型

由于核化图嵌入算法计算核矩阵 K 所需的计算量较大, 并且在识别阶段, 识别样本要与所有训练样本进行内积运算, 故如果要直接保存这些高维的训练样本, 将需要大量的存储空间。根据核矩阵 K 所需的计算量为 $O(nN^2)$, 显然对于人脸识别这样高维小样本问题, 如果减少 n , 则可有效地减少算法的运算量, 并且也可以有效地减少在识别阶段所占用的存储空间。因此考虑对高维样本先进行降维处理, 然后再进行相应的核嵌入算法运算, 那么如何进行有效的降维。受文献[15]的启发, 本文的思想是先将样本降维到总体散度矩阵非零特征值所对应的特征向量构成的空间, 由于 S_i 的秩为 $N-1$, 故这种方法能够使得高维样本的维数降至 $N-1$ 。根据文献[15], 式(3)可以等价于式(17):

$$\max_A J(A) = \frac{\text{tr}(A^T \bar{X} D \bar{X}^T A)}{\text{tr}(A^T \bar{X} L \bar{X}^T A)} \quad (7)$$

式中: $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N]$, $\bar{x}_i = x_i - m$ ($i = 1, \cdots, N$), $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ 为训练样本的均值向量。

总体散度矩阵 S_i 由式(8)计算:

$$S_i = \sum_{i=1}^N (x_i - m)(x_i - m)^T = \bar{X} \bar{X}^T \quad (8)$$

下面给出本方案的可行性证明。

定义 1 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$ 表示 S_i 非零特征值所对应的正交特征向量集, 令 $Z = \{x | S_i x = 0, x \in R^n\}$, $Z_\perp$ 代表 Z 的正交补空间, 则有 $Z_\perp = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ ($m = \text{rank}(S_i)$), $Z = \text{span}\{\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \cdots, \beta_N\}$ 。

有如下两个定理。

定理 1 $\forall \beta \in Z$, 则有 $\beta^T \bar{x}_i = 0, i = 1, \cdots, N$ 。

证明 由于 $\beta \in Z$, 因此有 $\beta^T S_i \beta = 0$, 又由于 $S_i = \bar{X} \bar{X}^T$, 因此有 $\beta^T \bar{X} \bar{X}^T \beta = \sum_{i=1}^N (\beta^T \bar{x}_i)^2$, $\beta^T \bar{x}_i = 0, i = 1, \cdots, N$ 。

证毕。

定理 2 设满足式(7)的任意判别向量为 φ_r , 都有 $\varphi_r \in Z_\perp$, 其中 $r = 1, \cdots, l$ 。

证明 令 $\varphi_r = w_r + \eta_r$, 其中 $w_r \in Z_\perp, \eta_r \in Z$, 则有

$$\begin{aligned} \varphi_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \varphi_r &= (w_r + \eta_r)^T \bar{X} D \bar{X}^T (w_r + \eta_r) = \\ &= w_r^T \bar{X} D \bar{X}^T w_r + w_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \eta_r + \\ &= \eta_r^T \bar{X} D \bar{X}^T w_r + \eta_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \eta_r \end{aligned}$$

由定理 1 和 $\eta_r \in Z$ 可得

$$\eta_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \eta_r = 0, w_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \eta_r = 0, \eta_r^T \bar{X} D \bar{X}^T w_r = 0$$

因此有

$$\varphi_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \varphi_r = w_r^T \bar{X} D \bar{X}^T w_r$$

同理亦有

$$\varphi_r^T \bar{X} L \bar{X}^T \varphi_r = w_r^T \bar{X} L \bar{X}^T w_r$$

故可得任意一个向量 φ_r , 都有

$$J(\varphi_r) = \frac{\varphi_r^T \bar{X} D \bar{X}^T \varphi_r}{\varphi_r^T \bar{X} L \bar{X}^T \varphi_r} = \frac{w_r^T \bar{X} D \bar{X}^T w_r}{w_r^T \bar{X} L \bar{X}^T w_r} = J(w_r)$$

因此可知式(7)的任意判别向量 φ_r , 都有 $\varphi_r \in Z_\perp$ 。

证毕。

由定理 2 可知, 对于基于图嵌入算法的准则, 子空间 Z 中不存在任何有效鉴别信息, 有效的鉴别向量只能在 $Z_\perp$ 中取得。既然 Z 中不存在任何有效鉴别信息, 那么在进行高维变换前就可以把这一部分去掉, 然后再进行相应的变换, 因此本文的快速求解模型即是考虑在将训练样本进行高维映射前, 首先对样本进行降维处理, 将样本通过 PCA 降至 $Z_\perp$ 中, 也就是将原始样本降至 S_i 的非零特征值所对应的特征向量构成的空间中, 而 S_i 的秩为 $N-1$, 故可知降维后的样本维数将由原来的 n 变成 $N-1$ 。对于小样本问题而言, N 是远远小于 n 的, 因而经过这样的降维变化后, 不但能够有效地减少计算核矩阵 K 的时间, 同时也能减少识别阶段所需的存储空间。核化图嵌入算法的快速求解模型的具体实现过程可用图 1 来表示。

3 实验与分析

为了验证提出模型的性能, 进行了相关的测试。核化图嵌入算法选择文献[15]的算法, 对该算法简记为 KEGF, 而将该

方法加载入本文的框架后简记为 FMFKEGF。在 ORL 人脸库上进行了实验。ORL 人脸库有 40 个人的 400 幅图像,每人 10 幅,每幅图像尺寸为 112×92 。采用最近邻方法进行分类,核函数选择高斯核函数 $k(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2 / \sigma)$, $\sigma = 5.5e + 7$,分别进行了如下实验。选用前 3 ~ 9 幅图像作为训练样本数,后 7 ~ 10 幅作为测试样本,两种算法识别率的比较结果如图 2 所示。图 3 是选取每人的前 5 幅图像作为训练样本,剩余图像作为测试样本,对两种算法提取 5 ~ 39 个特征所得识别率的比较。

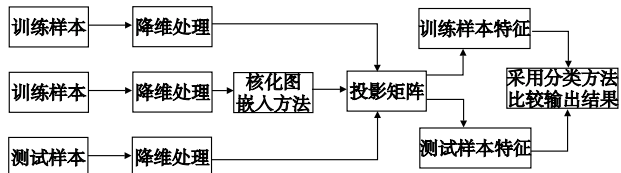


图1 核化图嵌入算法快速求解模型的框图

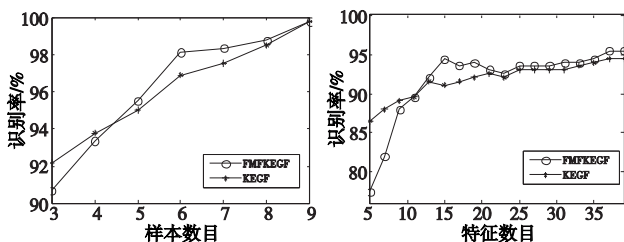


图2 FMFKEGF与KEGF在不同样本数目下的性能对比

图3 FMFKEGF与KEGF在提取不同特征数目时的性能对比

由图 2 的结果可看出,样本个数少时本文的快速求解模型得到的结果会差一些;但随着样本增加将会好于 KEGF 算法,而随着样本数目增多,两种算法结果又趋于一致。由图 3 可以看出,FMFKEGF 在少于 10 个特征时,识别效果不及 KEGF;但是在多于 10 个特征时,所得识别率均高于 KEGF,且随着特征个数的增加,FMFKEGF 的识别结果要好于 KEGF。

由于本文提出的是一种快速框架模型,因此也对 FMFKEGF 及 KEGF 的计算时间进行了比较,结果如表 1 所示。为了进一步验证本文快速模型的性能,每人随机选择 T 幅图像作为训练样本,另外 $(10 - T)$ 作为测试样本, T 的取值为 3 ~ 7,每次实验均独立重复进行 10 次。表 2 为两种方法的 10 次平均识别结果。

表1 FMFKEGF 与 KEGF 不同样本下计算时间的比较 /s

时间	算法/5 样本		算法/7 样本	
	FMFKEGF	KEGF	FMFKEGF	KEGF
投影矩阵计算时间	2.09	6.35	5.46	17.11
识别时间	5.17	7.23	2.91	3.68
总时间	7.26	13.68	8.67	20.79

表2 FMFKEGF 与 KEGF 不同样本下平均识别率对比

算法名称	不同样本数目下的识别率				
	3	4	5	6	7
FMFKEGF	91.29%	94.25%	96.30%	97.94%	98.75%
KEGF	91.54%	94.25%	96.25%	97.69%	98.50%

由表 1 的结果可以看出,本文提出的快速模型可以有效地加快算法的计算速度,5 样本时总的时间要比原算法减少将近一半的计算时间,7 样本总的计算时间减少了约 3/5。

表 2 的结果进一步表明了本文所提模型的有效性。多次平均识别结果表明,这种快速求解模型,不但能够降低算法的计算时间,而且也能保证算法的识别性能,但不可否认,在少量样本时(如 3 样本),识别率会有些降低,但随着样本数增加,

本文的快速模型又会提高算法的识别性能。因此在实际应用时,如果从减少的计算时间及后期减少的存储空间角度考虑,这一点损失是值得的。

4 结束语

本文提出了一种核化图嵌入算法的快速求解模型。该模型首先对高维的训练样本进行降维处理,降维处理的过程是基于不丢失鉴别信息的准则。对此本文给出了相应的理论分析与证明,使得算法在理论上是可行的,然后再将低维样本进行非线性的特征提取。本文算法可以有效地减少存储开销且能够保证算法的性能,增强了算法的实用性。如何将这种核算法的快速模型发展成为一种增量算法将是下一步要研究的。

参考文献:

- [1] HE Xiao-fei, YAN Shui-cheng, HU Yu-xiao, *et al.* Face recognition using Laplacianfaces [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(3): 328-340.
- [2] YANG Jian, DAVID Z, YANG Jing-yu, *et al.* Globally maximizing, locally minimizing: unsupervised discriminant projection with applications to face and palm biometrics [J]. *IEEE Tran on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, 29(4): 650-664.
- [3] HE Xiao-fei, CAI Deng, YAN Shui-cheng, *et al.* Neighborhood preserving embedding [C] // Proc of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision. [S. l.]: IEEE Press, 2005: 1208-1213.
- [4] YAN Shui-cheng, XU Dong, ZHANG Ben-yu, *et al.* Graph embedding: a general framework for dimensionality reduction [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, 29(1): 40-51.
- [5] XU Dong, YAN Shui-cheng, TAO Da-cheng, *et al.* Marginal Fisher analysis and its variants for human gait recognition and content-based image retrieval [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2007, 16(11): 2811-2821.
- [6] LU Gui-fu, LIN Zhong, JIN Zhong. Face recognition using discriminant locality preserving projections based on maximum margin criterion [J]. *Pattern Recognition*, 2010, 43(3): 3572-3579.
- [7] 卢桂馥, 林忠, 金忠. 基于最大差值的二维边界 Fisher 的人脸识别 [J]. *计算机科学*, 2010, 35(7): 251-253.
- [8] TAO Yu-ting, YANG Jian. Quotient vs. difference: comparison between the two discriminant criteria [J]. *Neurocomputing*, 2010, 73(10-12): 1808-1817.
- [9] ZHU Lei, ZHU Shan-an. Face recognition based on orthogonal discriminant locality preserving projections [J]. *Neurocomputing*, 2007, 70(9): 1543-1546.
- [10] CAI Deng, HE Xiao-fei, YAN Shui-cheng. Orthogonal Laplacianfaces for face recognition [J]. *IEEE Trans on Image processing*, 2006, 15(11): 3608-3614.
- [11] 于耀亮, 张立明. 正交 MFA 和不相关 MFA [J]. *模式识别与人工智能*, 2008, 21(5): 604-608.
- [12] CHENG Jian, LIU Qing-shan, LU Han-qing, *et al.* Supervised kernel locality preserving projections for face recognition [J]. *Neurocomputing*, 2005, 67(8): 443-449.
- [13] PANG Ying-han, ANDREW T, TOH K. Kernel discriminant embedding in face recognition [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2011, 22(7): 634-642.
- [14] HU Hai-feng, ZHANG Ping, MA Zheng-ming. Direct kernel neighborhood discriminant analysis for face re-cognition [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2009, 30(10): 902-907.
- [15] 卢桂馥, 林忠, 金忠. 基于核化图嵌入的最佳鉴别分析与人脸识别 [J]. *软件学报*, 2011, 22(7): 1561-1571.