

一种模糊相似关系传递核的获取算法^{*}

邓冠男, 姜妍丽

(东北电力大学 理学院, 吉林 吉林 132012)

摘要: 针对模糊相似关系的传递核进行了研究。首先, 为了判定给定的模糊相似关系是否是模糊等价关系, 对参数系中元素之间的不等关系进行理论分析, 提出了模糊相似关系传递核的判断算法; 之后, 为了构造模糊等价关系, 利用局部区域调整参数的方式构造了初始参数系及分解系调整算法, 使得参数系中的元素能够按参数系满足不等关系。最后, 在所述工作的基础上, 建立了一种模糊相似关系传递核的提取算法。相应的理论及实例分析均表明该算法能够确定得到模糊相似关系的一个传递核。

关键词: 传递核; 模糊相似关系; 模糊等价关系

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)12-4534-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.12.034

Algorithm for obtaining transitive opening of fuzzy similarity relation

DENG Guan-nan, JIANG Yan-li

(School of Sciences, Northeast Dianli University, Jilin Jilin 132012, China)

Abstract: This paper aimed at generating a transitive opening of fuzzy similarity relation. Firstly, it proposed an algorithm for checking a transitive opening through analyzing the non-equalities given by parameter system. Secondly, it put forward another algorithm for adjusting the initial parameter system and its corresponding resolution system by restricting the operations in a local area. Finally, it gave the algorithm for obtaining a transitive opening of fuzzy similarity relation on the basis of the former researches. It gave an example to verify the algorithm. Both the theory analysis and the example all prove the effectiveness of the algorithm.

Key words: transitive opening; fuzzy similarity relation; fuzzy equivalence relation

0 引言

模糊关系尤其是模糊等价关系, 在很多领域都有着重要的应用, 如模糊控制、近似推理、模糊聚类等。然而, 人们并不能够直接得到模糊等价关系, 通常的做法是由一个模糊相似关系出发构造一个与之在某种意义下最近的模糊等价关系。其中, 使用最多的是模糊相似关系的传递闭包。本文为了方便起见, 用 X_n 表示 n 阶模糊等价矩阵全体, 用 γ_n 表示 n 阶模糊相似矩阵的全体。设 $R \in \gamma_n$, 则 R 的传递闭包就是包含 R 的最小模糊等价关系。从对称的角度出发, 人们自然提出了 R 所包含的极大模糊等价关系, 即传递核的概念。

定义 1 传递核^[1]。设 $R \in \gamma_n$, 如果 $\exists R_* \in \gamma_n$ 满足

a) $R_* \subseteq R$;

b) $\forall R' \in \gamma_n$, 若 $R_* \subseteq R' \subseteq R$, 则有 $R' = R_*$, 则称 R_* 为 R 的传递核。

目前, 对于传递核的研究主要集中在 T -传递 (即满足 $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$, 其中 T 为三角模), 主要研究获取对任意的三角模 T 都成立的有可能成为模糊相似关系传递核的 T -模糊等价关系^[2-5]。为方便起见, 将可能为模糊相似关系 T -传递核的 T -模糊等价关系称为模糊相似关系的 T -传递下矩阵。文献[2]中, De Meyer 等人提出一种启发算法来获取模糊

相似关系的 T -传递下矩阵。之后, De Bates 等人^[3,4] 通过研究主边序列又提出另外两种获取模糊相似关系 T -传递下矩阵的算法。对于严格递增的三角模 T , Garmendia 等人^[5] 提出了一种快速算法来获取模糊相似关系 T -传递下矩阵。

对于通常意义下的传递核的研究, 除了笔者在文献[1,6]所做的工作之外, 很少进行单独考虑。然而, 模糊等价关系在许多领域都起着重要作用, 因此仅把传递核看做 T -传递核的特殊情形进行研究是远远不够的。在文献[1,6]中, 笔者给出并证明了模糊相似关系传递核的存在且通常不唯一性, 研究了模糊相似关系传递核的一些基本属性, 同时构造了获取模糊相似关系所有传递核的算法。然而, 这样的算法往往需要很高的代价, 如何直接获取模糊相似关系的一个传递核的算法目前还尚未提出。

针对上述问题本文进行了研究, 主要内容简述如下: 在介绍相关预备知识的基础上, 首先构造判断一个等价关系为模糊相似关系传递核的算法 (algorithm for checking transitive opening, CTO); 之后建立调整初始参数系及分解系的算法 (algorithm for adjusting the initial parameter system and resolution system, APR); 最后根据 CTO 及 APR 构造获取一个模糊相似关系的传递核的算法 (algorithm for obtaining transitive opening, OTO)。

收稿日期: 2012-05-05; **修回日期:** 2012-06-16 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11201057); 东北电力大学博士(科研启动)基金资助项目(BSJXM-201019); 国家自然科学基金数学天元基金(11226263)

作者简介: 邓冠男(1979-), 男, 吉林农安人, 讲师, 博士, 主要研究方向为模糊信息处理、数据挖掘(ddgn1@mail.bnu.edu.cn); 姜妍丽(1978-), 女, 讲师, 硕士, 主要研究方向为模糊信息处理。

本文将沿用文献[1,6~10]中的概念及符号表示,其中部分内容简介如下,未尽事宜请参见相关文献。

定理1^[7] 设 $X \in \mathcal{Y}_n, t \in [0, 1]$, 若存在 X 的一个分解 $(X(I_m), X(I_m^c), X(I_m, I_m^c), X(I_m^c, I_m))$, 满足条件:

a) $X(I_m) \in \mathcal{X}_m, X(I_m^c) \in \mathcal{X}_{n-m}$;

b) $X(I_m) \geq t, X(I_m^c) \geq t$;

c) $X(I_m, I_m^c) = (t)_{m \times (n-m)}, X(I_m^c, I_m) = (t)_{(n-m) \times m}$, 则 $X \in \mathcal{X}_n$ 。

定理1被称为 X 的分解构造。

定理2^[7] 设 $X \in \mathcal{Y}_n$, 则 $X \in \mathcal{X}_n \Leftrightarrow$ 存在 X 的一个分解 $(X(I_m), X(I_m^c), X(I_m, I_m^c), X(I_m^c, I_m))$ 满足分解构造。

设 $R \in \mathcal{X}_n$, 根据定理2, 存在 R 的一个分解 $(R_1(I_m), R_1(I_m^c), R_1(I_m, I_m^c), R_1(I_m^c, I_m))$ 满足分解构造, 并且有 $R_1(I_m) \in \mathcal{X}_m, R_1(I_m^c) \in \mathcal{X}_{n-m}$ 。如果对 $R_1(I_m)$ 及 $R_1(I_m^c)$ 继续分解直到其降为1阶子阵为止, 并且令 $R_1(I_m, I_m^c) = t_1, R_2(I_m, I_m^c) = t_2, \dots$, 那么就可以用图来表示参数 $t_i (i=1, 2, \dots)$ 之间的关系, 称之为参数系^[7]。同样, 也可以用一个图来描述这一过程的分解之间的关系, 称之为分解系^[10]。

根据文献[10], 给定一个模糊等价关系, 可以构造一个参数系以及相应的分解系。反过来, 如果给定一个参数系以及相应的分解系, 也可以唯一确定一个模糊等价关系。因而, 参数系和分解系提供了一种表示模糊等价关系的新方法, 这为构造模糊等价关系提供了便利。

定理3^[10] 模糊等价关系参数系中任何非终端参数不大于它的“孩子”。

定理4^[11] 设 $R \in \mathcal{Y}_n, R' \in \mathcal{X}_n$ 且有 $R' \subseteq R$, 则存在 R 的一个传递核 R_* 使得 $R' \subseteq R_*$ 。

定理5^[6] 设 $R \in \mathcal{Y}_n$, 如果 R_* 是 R 的传递核, 那么

$$t_i = \min \{ b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i} \} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

其中: t_i 是 R_* 参数系中的参数; $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i}$ 是 R 中与 t_i 对应的元素。

1 模糊相似关系传递核检验算法

前面的工作已经给出了模糊相似关系传递核的一些性质。根据定理4很容易设计出算法将不是传递核的模糊等价关系从包含所有传递核的集合中去掉, 这对于获取所有传递核是有意义的。但是如果给定一个模糊相似关系 R 及一个模糊等价关系 R' , 则无法据此来判断 R' 是否是 R 的传递核。

为了解决这一问题, 首先观察定理5。定理5给出了如下公式:

$$t_i = \min \{ b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i} \} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

其中: $t_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 是传递核 R_* 参数系中的参数; $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i}$ 为 R 中与 t_i 对应的元素。看起来, 式(1)提供了一种由原始模糊相似关系 R 构造传递核参数系的方法, 但是如果仅给出 R 是无法得到传递核的参数系的, 因为无法确定 t_i 与 R 中哪些元素相对应。事实上, 式(1)提供的是由分解系及模糊相似关系 R 来确定传递核的参数系的方法。由以上分析可知, 获取传递核的关键在于得到传递核的一个分解系。

引理1 设 $R \in \mathcal{Y}_n, R_1, R_2 \in \mathcal{X}_n$ 且 $R_1 \neq R_2$, 如果 R_1 和 R_2 的

任何参数系中的参数都满足式(1)的关系 ($b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i}$ 是 R 中元素), 那么 R_1 和 R_2 不会有相同的分解系。

证明 假设 R_1 和 R_2 有相同的分解系, 那么根据式(1)计算, 就可以得到相同的参数系。由于参数系和对应的分解系都相同, 那么可知 $R_1 = R_2$, 这与题设矛盾。

定理6 设 $R \in \mathcal{Y}_n$ 且 $R_* \in \mathcal{X}_n$, 如果

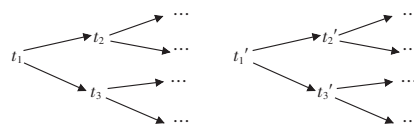
$$t_i = \min \{ b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i} \} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

对于 R_* 的任何参数系都成立, 那么 R_* 是 R 的传递核。其中: $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ 是参数系中的参数, $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i}$ 是 R 中与 t_i 对应的元素。

证明 假设 R_* 不是 R 的传递核。根据定理4可知, 存在 R 的一个传递核 R' 使得 $R_* \neq R'$ 且有 $R_* \subset R'$ 。由于 R' 是 R 的传递核, 那么 R' 参数系中参数均满足式(1), 即

$$t_i' = \min \{ b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im_i} \} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

注意到 R_* 参数系中参数也满足式(1), 由引理1可知, R_* 与 R' 不会有相同的分解系。不妨假设 R_* 及 R' 有如下参数系:



显然有 $t_1 = t_1'$ 。

a) 当 $t_1 < t_2$ 且 $t_1 < t_3$ 时, 令 P 和 Q 表示 t_1 及 t_1' 对应于 R 中的元素, 同时令 $M = Q - P$ 。如果 $M \neq \emptyset$, 此时可知 $R_* \not\subseteq R'$, 这与题设矛盾。如果 $M = \emptyset$, 这说明在 R_* 与 R' 分解系中, 参数 t_1 及 t_1' 对应的分解相同。

b) 当 $t_1 = t_2$ 或 $t_1 = t_3$ 时, 不妨设 $t_1 = t_2, t_1 < t_3$ 且 $t_2 < t_k (k > 2)$, 此时存在 n 元置换 σ , 使得 R_* 经置换有如下分块形式:

$$(R_*)_{\sigma} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & t_2 \end{bmatrix} & t_1 \\ \begin{bmatrix} t_2 & \end{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

为了满足 $R_* \subset R', R'$ 只能有两种可能的分解方式, 形成的分块矩阵为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & t_2' \end{bmatrix} & t_1' \\ \begin{bmatrix} t_2' & \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} t_1' & \begin{bmatrix} & t_2' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} t_2' & \end{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

由于 $t_1 = t_2$, 因此 R' 的这两种可能的分解方式同时也是 R_* 的分解方式。这样可以选择 R_* 的分解, 使得相应参数系中参数 t_1 及 t_1' 对应的分解相同。

在上述两种条件下, 都能够得到参数 t_1 及 t_1' 对应的分解相同的结论。根据分解构造定理, 此时按照上述的过程对分解后的分块矩阵继续重复分析, 最后结论即可得证。

根据定理6可以构造算法来判断一个模糊等价关系是否是给定模糊相似关系的传递核, 具体如下:

算法 CTO: 判断一个模糊等价关系是否是给定模糊相似关系的传递核

输入: 模糊相似关系 R 以及模糊等价关系 R_* 。

输出: result = 0 或者 1。

function result = CheckTO(R, R_*)

n = size(R); //初始化变量

```

result = 0;
if n = 1
    result = 1;
else
    resolution = Resolution(R*); //构造 R* 满足分解构造的分解
    n1 = size(resolution);
    for i = 1:n1
        [R(Im), R(Imc), R(Im, Imc)] = Resolve(R, resolution{i});
        [R*(Im), R*(Imc), R*(Im, Imc)] = Resolve(R*, resolution{i}); //将 R 和 R* 按照 resolution{i} 分解
        if min(R(Im, Imc)) > min(R*(Im, Imc))
            result = 0; break;
        else
            result = CheckTO(R(Im), R*(Im));
            if result = 0 break; end
            result = CheckTO(R(Imc), R*(Imc));
            if result = 0 break; end
        end
    end
end

```

注:a) resolution{i} 表示集合 resolution 中第 i 个元素;b) size(resolution) 表示集合 resolution 中元素的个数。

2 初始参数系及相应分解系的调整算法

参数系和分解系在构造模糊等价关系时起着非常重要的作用。正如定理3所阐述的,参数系中非终端节点不大于它的孩子,从这一点来说,参数系以图的形式描述了参数之间的不等关系。因此,为了构造模糊等价关系,最重要的就是构造一个这样的图。由于参数系中的参数必须满足不等关系,因此如果存在一个图,其中不是所有的参数都满足不等关系,则不能将其称做参数系,为了方便起见称其为初始参数系。本章将给出初始参数系及相应分解系的调整方法,以使其成为参数系。

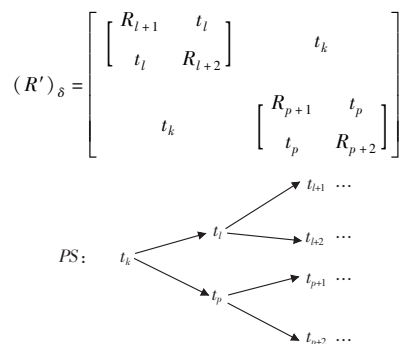
首先规定调整初始参数系及相应分解系时需要遵守的准则:

a) 对于不满足不等关系参数的调整应当限定在一个局部区域中,尽量避免改变其他参数的取值。

b) 本文仅考虑获取传递核的问题,因此参数按照定理5来计算,这样问题的关键在于分解系的调整。

c) 假定分解系的每一个节点都有两个孩子。对于非终端节点这是毫无疑问的;对于终端节点,按照分解系的构造可知,终端节点集合中包含两个元素,因此可将每个元素都看做该节点的孩子。

设 $R \in y_n$, PS 是 R 的一个初始参数系,不妨假设有如下形式:

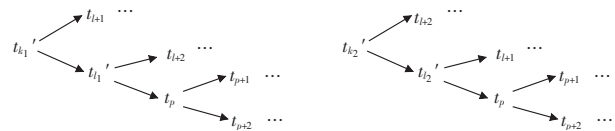


假设 $t_k > t_l$ 且 $t_k \leq t_p$, 因此 t_k 和 t_l 为一对不满足不等关系的参数,需要对其进行调整。为了避免修改其他参数的取值,对 R 的分解只能有如下两种方式:

$$(R_1')_{\delta} = \begin{bmatrix} R_{l+1} & & & t_{k1}' \\ & \begin{bmatrix} R_{l+2} & t_{l1}' \\ t_{l1}' & R_{p+1} \end{bmatrix} & & t_p \\ & & t_p & R_{p+2} \end{bmatrix}$$

$$(R_2')_{\delta} = \begin{bmatrix} R_{l+1} & t_{k2}' & & t_{l2}' \\ t_{k2}' & R_{l+2} & & t_{k2}' \\ & & \begin{bmatrix} R_{p+1} & t_p \\ t_p & R_{p+2} \end{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

相应的初始参数系变为如下两种情形:



按照定理5的结论计算新增参数,易证 $t_{k1}' \leq t_{l1}'$ 并且 $t_{k2}' \leq t_{l2}'$ 。为了确定选择哪一方案作为结果,构造比较函数:

$$M_i = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} (t_{ki}' - b_{ik})^2}{m_i} \quad i=1,2$$

其中: $b_{ik} (k=1,2,\dots,m_i)$ 是参数 t_{ki}' 对应于 R 中的元素。本文选择 M_i 较小的方案,这样保证获得的模糊等价关系与原始模糊相似关系的距离相对较小。如果两种方案所得 M_i 值相等,则任选其一。初始参数系及分解系的调整算法具体如下:

算法 APR: 调整初始参数系及分解系

输入: 初始参数系 PS , 对应的分解系 RS 及模糊相似关系。

输出: 参数系 PS 及对应分解系 RS 。

a) 选择距离初始参数系的根最远的一对不满足不等关系的参数,假设为 t_k 和 t_l , 并设 t_l 是 t_k 的孩子。令 L_k 及 L_l 为分解系 RS 中与 t_k 和 t_l 对应的节点。

b) 按照如下规则构造分解 rs_1 和 rs_2 :

如果 L_l 为终端节点,那么

$$rs_1 = L_l \setminus \{1\}, rs_2 = L_l \setminus \{2\};$$

如果 L_l 有一个孩子 L_m , 那么

$$rs_1 = L_m, rs_2 = L_l - L_m;$$

如果 L_l 有两个孩子 L_m 及 L_p , 那么

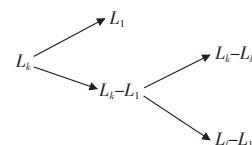
$$rs_1 = L_m, rs_2 = L_p.$$

c) 计算函数:

$$M_i = \frac{\sum_{i \in rs_i} \sum_{j \in L_k - rs_i} (r_{ij} - t_l)^2}{\text{card}(rs_i) \times (\text{card}(L_k) - \text{card}(rs_i))}$$

如果 $M_1 \leq M_2$, 那么 $L_1 = rs_1$; 否则 $L_1 = rs_2$ 。

d) 根据如下连接方式调整分解系 RS , 如果任何一个节点为空集或仅含一个元素,则将其在图中省略。



e) 根据 RS 调整 PS 。

f) 重复步骤 a) ~ e) 直到 PS 中所有参数均满足不等关系

为止。

3 模糊相似关系传递核获取算法

正如引言中所介绍的,目前尚未有算法能够直接得到模糊相似关系的一个传递核,本章将解决这一问题。根据第 1 章及第 2 章的研究,实际上很容易就能得到一个直接获取传递的算法,具体如下:

算法 OTO:获取模糊相似关系的一个传递核

输入:模糊相似关系 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 。

输出: R 的一个传递核。

a) 构造模糊等价关系 R' ,使得 $R' \subset R$ 。

b) 根据算法 CTO 判断 R' 是否是 R 的传递核。如果 R' 是 R 的传递核,返回 R' ;否则,构造初始参数系 PS 及相应的分解系 RS 。

c) 根据算法 APR 调整 PS 及 RS 。

d) 根据 PS 及 RS 构造模糊等价关系 R' 。

e) 转步骤 b)。

事实上,步骤 b) 中如何构造初始参数系 PS 及相应的分解系 RS 并没有给出解决办法。下面对这一问题给予简要说明。

正如在第 1 章讨论的,如果一个模糊等价关系 R' 不是 R 的传递核,那么 R' 参数系中一定存在一些参数并不是由式(1)计算得来。因此,只要将这些参数按照式(1)计算就可得到初始参数系 PS ,而分解系 RS 保持原来的无须改变。

4 实例

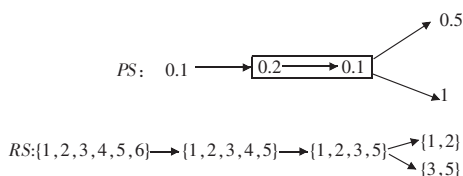
本章中给出一个例子来具体说明本文提出的算法的执行过程。给定如下模糊相似关系 R :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0.1 & 1 & 0.3 & 1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

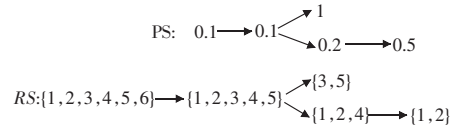
a) 构造模糊等价关系 R' ,使得 $R' \subset R$ 。这里采用与 R 的传递闭包有相同分解系的模糊等价关系。

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 利用算法 CTO 判断 R' 是否是 R 的传递核。显然,结论是否定的,这样需要构造初始参数系 PS 及相应分解系 RS ,具体如下:



c) 显然, PS 中方框里的参数不满足不等关系,按照算法 APR 对 PS 及 RS 进行调整,这样可以得到如下结果:



d) 根据 PS 及 RS 构造模糊等价关系 R' ,可得

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) 转步骤 b),最终可得传递核 R_* 。

$$R_* = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

5 结束语

为了获取模糊相似关系的一个传递核,本文构造了模糊相似关系传递核判断算法、初始参数系及分解系调整算法以及模糊相似关系传递核获取算法。实验证明,本文提出的算法可以直接得到一个传递核。未来将研究如何将模糊相似关系传递核应用到实际问题中去。

参考文献:

- [1] 邓冠男,王志高. 模糊相似关系的传递核[J]. 北京师范大学学报, 2010,46(2):111-114.
- [2] De MEYER H, NAESSENS H, De BATES B. Novel algorithms for the computation of T-transitive closures and opening of proximity relations [C]//Proc of EUROFUSE-SIC. 1999:200-203.
- [3] De BAETS B, De MEYER H. Transitive approximation of fuzzy relations by alternating closures and openings [J]. Soft Computing, 2003,7(4):210-219.
- [4] De BAETS B, De MEYER H. T-transitive closures, openings and approximations of similarity relations [C] //Proc of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2002:1375-1380.
- [5] GARMENDIA L, SALVADOR A, MONTERO J. Computing a T-transitive lower approximation or opening of a proximity relation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009,160(14):2097-2105.
- [6] DENG G N, LI J Q, LI H X. An algorithm for computing transitive openings of fuzzy similarity relation [J]. ICIC Express Letters, 2010,4(2):589-594.
- [7] LI H X. Fuzzy clustering method based on perturbation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989,33(3):291-302.
- [8] HE Q, LI H X, SHI Z Z, et al. Fuzzy clustering method based on perturbation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2003,46(5-6):929-946.
- [9] 何清,李洪兴. 模糊聚类中的模糊等价矩阵[J]. 系统工程理论与实践, 1999(4):8-11.
- [10] DENG G N, JIANG Y L. A novel representation of fuzzy equivalence relation [C] //Proc of the 3rd International Workshop on Intelligent Systems and Applications. 2011:249-252.