

基于小波树模型的 CoSaMP 压缩感知算法*

苏维均^{1†}, 王红红¹, 于重重^{1,2}, 杨 扬²

(1. 北京工商大学 计算机与信息工程学院, 北京 100048; 2. 北京科技大学 计算机与通信工程学院, 北京 100083)

摘要: 无线传感网络存在网络带宽限制和传感器节点的能耗问题, 实际应用中通常希望可以通过重构算法从采集的少量数据中还原出原始信息, 压缩感知理论为上述问题提供了一个解决思路。利用压缩感知理论, 对无线传感器网络中温度传感器的监测信号进行了压缩感知的应用研究。针对传统压缩采样匹配追踪(CoSaMP)算法中测量次数多、重构精度低等问题, 利用信号的小波系数所形成的连通树的结构特性, 提出了基于小波树模型的压缩采样匹配追踪算法。将该算法应用到无线传感器网络监测信号的压缩感知仿真实验中, 与传统压缩采样匹配追踪算法的重构性能进行比较, 结果表明该算法较传统压缩采样匹配追踪算法在一定范围内对无线传感器网络中的温度信号具有更好的压缩感知性能。

关键词: 小波树模型; 压缩采样匹配追踪; 压缩感知; 无线传感器网络

中图分类号: TN911.71

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)12-4530-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.12.033

CoSaMP algorithm of compressed sensing based on wavelet tree model

SU Wei-jun^{1†}, WANG Hong-hong¹, YU Chong-chong^{1,2}, YANG Yang²

(1. College of Computer & Information Engineering, Beijing Technology & Business University, Beijing 100048, China; 2. College of Computer & Communication Engineering, University of Science & Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Due to network bandwidth limitation and energy consumption of sensor nodes in wireless sensor networks (WSN), people usually want to reconstruct the original signal from little data in practical application. Compressed sensing (CS) theory has provided a solution for the problem above. Using CS theory, this paper launched the application research on sensed data in WSN. Aiming at the problem of more measurements and lower reconstruction accuracy in traditional CoSaMP algorithm, exploiting the structure characteristic of connected wavelet tree formed by the wavelet coefficients of signal, this paper proposed CoSaMP algorithm based on wavelet tree model. Applied the proposed algorithm to simulation experiments of CS on sensed data in WSN, and compared with the CS performance of traditional CoSaMP algorithm. Comparison results show that the proposed algorithm has a better performance of CS on sensed data in WSN within a certain range.

Key words: wavelet tree model; compressive sampling matching pursuit; compressed sensing; wireless sensor networks

0 引言

在以奈奎斯特(Nyquist)采样定理为基础的信号处理理论下,若要由采样得到的离散信号中无失真地恢复出原始信号,要求采样速率至少是信号带宽的两倍。该理论下信息的采集处理及存储传输等已成为目前信息领域进一步发展的瓶颈。首先,在数据的采集和处理方面,许多实际应用中信号的Nyquist采样硬件成本高,采集效率低,甚至在某些情况下难以实现;其次,存储或传输按照Nyquist采样方式获取的数据时造成了很大的资源浪费。

Candes^[1]、Donoho^[2]提出的压缩感知(compressed sensing, CS)理论为上述问题提供了一个新的解决方法。根据CS理论,对稀疏信号或可压缩信号可以通过远低于Nyquist采样定理的方式进行采样,再通过一定的重构算法恢复原始信号。

CS理论的核心是将采样和压缩同时进行,从尽量少的数据中重建尽量多的原始信息。CS理论在目前一些工程领域如低成本数码相机、音频采集设备、节电型图像采集设备、分布式传感器网络、超宽带信号处理等都具有重要的实践意义^[3-5]。

本文针对无线传感器网络(wireless sensor networks, WSN)采集数据量大、网络带宽及节点能量有限等问题,从小波域的角度出发,对WSN的监测数据进行了压缩感知研究。首先,在小波域对WSN的监测数据进行稀疏性验证,说明WSN的监测数据具备应用CS理论的性质。根据WSN监测数据经小波分解后的小波系数特点,建立了监测数据的小波树模型;针对传统压缩采样匹配追踪(CoSaMP)算法中测量次数多、重构精度低的问题,对其进行改进,提出了基于小波树模型的CoSaMP算法。最后用该算法对WSN的监测数据进行了压缩感知性能的仿真研究,仿真结果证明了该算法的有效性。

收稿日期: 2012-05-08; **修回日期:** 2012-06-22 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61070182);北京市组织部优秀人才资助项目(2010D005003000008);北京市学科建设资助项目(PXM2012_014213_0000_74)

作者简介: 苏维均(1962-),男(通信作者),副教授,硕士,主要研究方向为智能控制与检测技术等(swj6843@163.com);王红红(1986-),女,硕士研究生,主要研究方向为智能控制与检测技术;于重重(1971-),女,教授,博士研究生,主要研究方向为智能信息处理、模式识别与机器学习;杨扬(1956-),男,教授,博士,主要研究方向为智能控制、图像处理与模式识别、多媒体通信、网络技术、服务科学和云计算。

1 压缩感知

CS 理论指出:当信号在某个正交变换基上是稀疏或可压缩的,那么就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将信号线性投影为低维观测量。所得的低维观测量保持了重建原始信号所需的重要信息,通过进一步求解稀疏最优化问题就能从线性观测量中精确或高概率地重建原始信号^[1,2]。

CS 理论框架如图 1 所示^[1]。a)对信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$,是否存在某个正交基 Ψ 而信号在 Ψ 上的表示是稀疏的,即信号的稀疏表示问题;b)设计一个与正交变换基 Ψ 不相关的 $M \times N$ 维的观测矩阵 Φ ,保证原始信号从 N 维降维到 M 维时重要信息不丢失,即信号的线性投影问题;c)设计重构算法,保证从 M 维线性观测量 $\mathbf{y} = \Phi\Psi\mathbf{x}$ 中能够重建原始信号,即信号的重构问题。

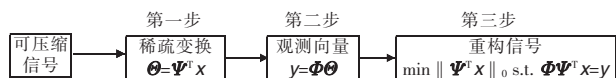


图 1 压缩感知理论框架

1.1 信号的稀疏表示

在 CS 理论中,信号只有在满足稀疏的情况下才能从 M 维的线性观测量中重建原始信号。其中 M 是线性观测量的维数, N 是原始信号的长度。

考虑长度为 N 的信号 $\mathbf{x}$,将其看做 $\mathbb{R}^N$ 中 $N \times 1$ 的列向量, $\mathbb{R}^N$ 中的任意信号均可以用一组 $N \times 1$ 的矢量基 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ 表示,那么信号 $\mathbf{x}$ 可以表示为^[2]

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} = \Psi \alpha \quad (1)$$

其中: $\Psi = [\Psi_1 | \Psi_2 | \dots | \Psi_N]$ 是可将信号 $\mathbf{x}$ 稀疏化的正交稀疏基; $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \Psi_i \rangle = \Psi_i^T \mathbf{x}$ 是加权系数 α 的列向量。如果 $\mathbf{x}$ 是 K 个矢量基的线性组合(即 α 中有 K 个非零系数,而其余 $N-K$ 个系数是零),则称信号 $\mathbf{x}$ 是 K 阶稀疏信号。而如果信号 $\mathbf{x}$ 在某些变换域(如小波域)是稀疏的,那么称信号 $\mathbf{x}$ 是可压缩信号^[3]。

衡量信号稀疏度的常用指标^[6]有:a)0 范数,即信号中非零元素的个数;b)稀疏因子,即信号中非零元素的个数与元素总数的比值;c)非线性逼近误差,即用正交基 Ψ 表示信号时的稀疏程度或分解系数的能量集中程度。常用的正交变换基^[6]有离散小波变换基、离散余弦变换基、快速傅里叶变换基、Curvelets 基、Gabor 基及冗余字典等,如采用离散小波变换基在稀疏表示的基础上对一维信号和二维图像进行去噪^[6]、语音信号的压缩感知编码^[7]以及根据小波域的稀疏性对信号的压缩感知研究^[8]等。

1.2 观测矩阵的设计

观测矩阵的设计是 CS 理论的一个重要问题,是 CS 理论能否成功实现的重要条件。首先,观测矩阵的设计要以约束等距条件(restricted isometry property, RIP)为基本准则,既要减少压缩测量次数,又要确保信号的重建精度;其次,观测矩阵的设计包括矩阵元素的设计和矩阵维数的设计,压缩测量次数 M 、信号稀疏度 K 和信号长度 N 满足一定的关系^[4]。

考虑已知观测矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$) 的信号 $\mathbf{x}$ 的重构问题,信号 $\mathbf{x}$ 在该矩阵下的线性投影为 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$,矩阵表示形式为^[1]

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

因为 $\mathbf{y}$ 的维数 M 远小于 $\mathbf{x}$ 的维数 N ,因此式(2)有无穷多个解,很难从中重构出原始信号 $\mathbf{x}$ 。如果原始信号 $\mathbf{x}$ 是 K 阶稀疏的,且 $\mathbf{y}$ 与 Φ 满足一定条件,那么信号 $\mathbf{x}$ 就可以通过求解最优范数问题从观测量 $\mathbf{y}$ 中重构^[2]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3)$$

Candès 等人指出,如果要精确重构 K 阶稀疏信号 $\mathbf{x}$,测量次数 M 需满足 $M = O(K \log(N))$,并且观测矩阵 Φ 必须满足 RIP^[1]。

高斯随机矩阵的优点是它几乎与任意稀疏信号都不相关,因此当观测矩阵 Φ 是高斯随机矩阵时,观测矩阵 Φ 能以较大概率满足 RIP^[3],故可以通过选择 $M \times N$ 的高斯测量矩阵得到所需的观测矩阵 Φ 。

1.3 重构算法的设计

基于 CS 理论的信号重建问题就是寻找欠定方程组(方程的数量少于待解的未知数)的最简单解的问题,而范数是指信号中非零元素的个数,因而能够使得结果尽可能地稀疏。Candès 在文献[1]中指出,范数最优化问题(3)在实际应用中可以转换成一个简单的近似形式:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq \delta \quad (4)$$

其中: δ 是一个极小的常量。

同时,Donoho 在文献[2]中证明,上述问题是一个 NP-hard 问题,要求出 $\mathbf{x}$ 中非零值的所有可能,因而是无法求解的。

目前的压缩感知重构算法主要分为基于凸优化的方法和基于贪婪的匹配追踪算法两大类^[4,5]。凸优化法主要有基追踪法(basis pursuit, BP)、内点法(inner point, IP)、梯度投影法(gradient projection algorithm, GPA)、迭代阈值法(iteration threshold, IT)^[4];贪婪算法主要有匹配追踪法(matching pursuit, MP)、正交匹配追踪法(orthogonal matching pursuit, OMP)、正则化正交匹配追踪法(regularization orthogonal matching pursuit, ROMP)、压缩采样匹配追踪(compressive sampling matching pursuit, CoSaMP)、子空间追踪法(subspace pursuit, SP)等^[5]。

2 基于小波树的 CoSaMP 算法

在 WSN 中,传感器节点采集的大量数据需要在网络内部传输、交换和处理,但是节点在处理能力和能量上受到严重限制,从而使得需要节点间通信和高复杂度算法的传统信息压缩方式很难得到应用。基于上述考虑,CS 被引入到 WSN 的监测数据的压缩和重建中。节点采集的监测数据在离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)域或离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)域都具有良好的稀疏性,使其具备应用 CS 理论的前提。

2.1 基于小波域的 WSN 信号的压缩感知

2.1.1 温度信号的稀疏性

以 WSN 中温度传感器采集的温度信号为例,对其在小波域的稀疏性进行说明。首先对温度信号 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 进行小波变换,得到 $\mathbf{x}$ 的小波系数 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$:

$$\alpha = \Psi^T \mathbf{x} \quad (5)$$

其中,小波变换矩阵 Ψ 是信号 $\mathbf{x}$ 的自相关函数 R_x 通过特征值分解得到的:

$$R_x = \mathbf{x} \mathbf{x}^T = \Psi \Lambda \Psi^T \quad (6)$$

对于上述温度信号(图 5),选用连续的、长度 $N = 4096$ 的

多组采样数据,用 db 波和 Haar 波两种不同的小波基进行小波分解,如图 2~3 所示。

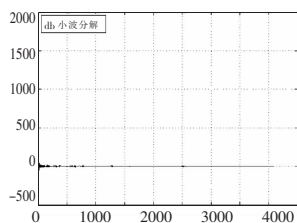


图2 温度信号小波域(db波)分解

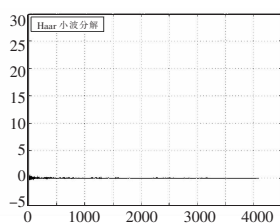


图3 温度信号小波域(Haar波)分解

图中横坐标表示温度信号的长度,纵坐标表示小波分解的系数值。从图2和3可以看出,无论是 db 波还是 Haar 波,温度信号经小波分解后所得的大部分小波系数值都是0。由 CS 理论中稀疏信号的定义可知,温度信号在小波域具有很好的稀疏性,是可压缩信号,满足应用 CS 理论的基础。

2.1.2 小波树模型

从上面的分析可知,WSN 中的温度信号在小波域具有良好的稀疏性。进一步分析可以得出,信号的小波系数可以自然地组成一个树结构,而且最大的小波系数可以沿着小波树的分支聚类,这样就产生了小波系数的一个连通树模型^[9]。文献[10]中基于模型的压缩感知理论证明,小波系数的连通树模型可以很好地用于压缩感知重构算法。

长度 $N=2^l$ (l 是整数)的信号 $\mathbf{x}$ 的小波表示为

$$\mathbf{x} = v_0 \nu + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} w_{i,j} \varphi_{i,j} \quad (7)$$

其中: ν 是扩展函数; $\varphi_{i,j}$ 是尺度为 i 、偏移为 j 的小波函数。小波变换组成了扩展系数 v_0 和小波系数 $w_{i,j}$,其中 i 为尺度, $0 \leq i \leq l-1$, j 为位置, $0 \leq j \leq 2^i-1$ 。矩阵表示形式(1)中的 Ψ 在这里是一个以尺度和小波函数为列的矩阵,稀疏系数 α 是与尺度和小波系数有关的向量。小波系数之间的父/子关系可以用如图4所示的小波系数树形象地表示。

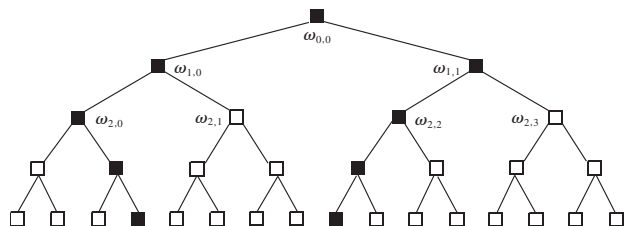


图4 小波系数二叉树

图4中的黑色节点是温度信号在小波变换基下的不连续小波系数;大系数的集合形成一个有根节点的连通树。如果小波树中的任意一个系数 $w_{i,j} \in \Omega$ (Ω 为小波系数集合),那么它的父代 $w_{i-1, \lceil j/2 \rceil}$ 也属于集合 Ω 。

2.2 基于小波树模型的 CoSaMP 算法

本文提出基于小波树模型的 CoSaMP 算法,并采用 CSSA (condensing sort and select algorithm)^[11]进行稀疏逼近。

传统的 CoSaMP 算法^[12]在每次迭代中仅选取一个原子来更新原子集合,这样就会造成很大的重建时间。迭代次数与稀疏度 K 、测量次数 M 密切相关,随着迭代次数的增大,耗时也将大幅增加。因此需要更好的算法,在保证重建质量的同时提高重建速度。

本文选择改进 CoSaMP 算法的原因如下。首先,CoSaMP 算法具有鲁棒的重构保证,与传统的基于贪婪的重构算法相对

应;其次,传统的 CoSaMP 算法具有基于最佳信号估计的贪婪结构,仅需把其中最佳的 K 次稀疏估计替换成本算法中的最佳 K 次小波树结构稀疏估计,这样就可以将信号修正到一个最佳的小波树结构估计;最后,对于相同的测量次数,CoSaMP 算法可以得到更精确和更快速的重构信号。

基于小波树模型的 CoSaMP 算法的基本步骤是:

a) 初始化: $\hat{\mathbf{x}} = 0, d = \mathbf{y}, i = 0$;

b) 迭代循环:

(a) 迭代次数: $i \leftarrow i + 1$;

(b) 形成信号的剩余估计: $\mathbf{e} \leftarrow \Phi^T d$;

(c) 根据小波树结构修剪剩余估计:

$$\Omega \leftarrow \text{supp}(M(\mathbf{e}, K));$$

(d) 合并支持集: $T \leftarrow \Omega \cup \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1})$;

(e) 形成信号估计: $\mathbf{b}|_T \leftarrow \Phi_T^+ \mathbf{y}, \mathbf{b}|_{T^c}$;

(f) 根据小波树结构修剪信号估计:

$$\hat{\mathbf{x}}_i \leftarrow M(\mathbf{b}, K)$$

(g) 优化小波树结构:

$$M(\mathbf{x}, K) = \arg \min_{\mathbf{x} \in M_K} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|;$$

(h) 更新测量剩余: $d \leftarrow \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_i$;

迭代停止条件不满足时返回步骤 a), 开始新一轮迭代, 停止条件达到时循环结束, 进行下一步;

c) 返回重构结果: $\hat{\mathbf{x}} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_i$ 。

其中: $\mathbf{x}$ 表示原始信号; $\hat{\mathbf{x}}$ 表示 $\mathbf{x}$ 的估计量; $\mathbf{y}$ 表示线性观测量; i 表示迭代次数; 矩阵 Φ 表示观测矩阵; M 表示 CSSA 算法, K 是信号 $\mathbf{x}$ 的稀疏度; Ω 和 T 表示的是集合; $\mathbf{A}^\dagger$ 表示的是矩阵 $\mathbf{A}$ 的伪逆; T^c 表示集合 T 的补集。

3 仿真实验及分析

3.1 实验数据与方案

3.1.1 实验数据

仿真实验的数据来源于农业温室大棚无线传感器网络中温度传感器所采集的温度信号,传感器的原始数据经过数据预处理后,采用连续的、长度 $N = 4096$ 的多组采样数据作为实验数据。

3.1.2 实验方案

首先,对温度信号进行小波变换,使其稀疏化;然后,选择高斯随机白噪声矩阵为观测矩阵,将高维的原始温度信号作线性投影得到低维的线性观测量;最后,采用基于小波树模型的 CoSaMP 算法,从线性观测量中进行原始温度信号的压缩感知重构。

3.1.3 实验指标

实验中,采用不同的采样率,以信号的重构误差和重构时间作为压缩感知算法的实验指标,指标定义如下:

$$\text{采样率}(S_R) \quad S_R = M/N \quad (8)$$

$$\text{相对误差}(R_E) \quad R_E = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| / \|\mathbf{x}\| \quad (9)$$

均方根误差(RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^2 / (N-1)} \quad (10)$$

其中: $\mathbf{x}$ 为原始信号, $\hat{\mathbf{x}}$ 为重构信号, M 为测量次数, N 为原始信号的长度。

3.2 实验及结果分析

表1给出了不同采样率下两种算法的相对误差、均方根误

差和运行时间的比较结果;图5为原始温度信号;图6~10对应于上述采样率的重构信号。

表1 不同采样率下温度信号的重建比较

比较项		采样率				
		0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
R_E	本文算法	0.015	0.025	0.033	0.040	0.428
	传统算法	0.033	0.048 5	0.055	0.074	0.764
RMSE	本文算法	0.255	0.428	0.688	0.869	9.417
	传统算法	0.956	1.105	1.292	1.540	2.183
运行时间/s	本文算法	1.765 2	1.977 7	2.119 0	3.929 2	8.487 1
	传统算法	167.94	182.59	129.53	113.04	94.545

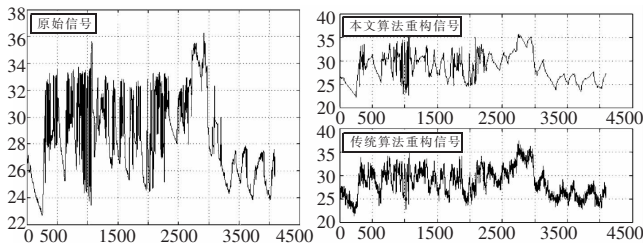


图5 原始温度信号

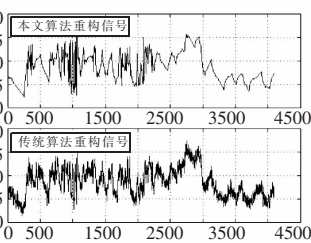


图6 $M/N=0.5$

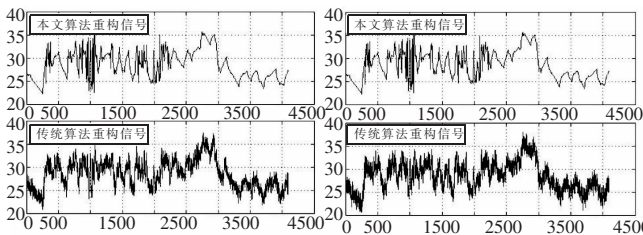


图7 $M/N=0.4$

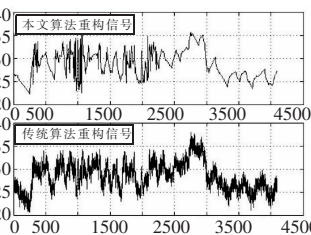


图8 $M/N=0.3$

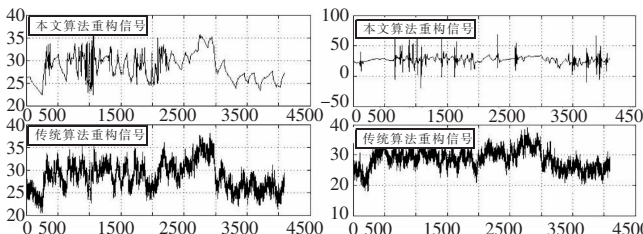


图9 $M/N=0.2$

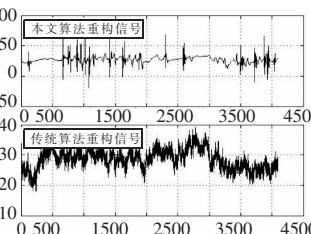


图10 $M/N=0.1$

从表1和图5~10可以看出,本文算法相比传统算法而言,相对误差、均方根误差及重构算法时间都明显优于传统算法。两种算法中,相对误差和均方根误差都随着测量次数的减少而有所增大。虽然在传统算法中,随着测量次数的减少运算速度明显加快,但是本文算法的运算速度却随之有所降低。比较可知,本文所提算法较传统 CoSaMP 算法在误差、运算速度上都有显著改进。但是从图表上可以明显地看出,在本文算法中,当 $M=0.1 \times N$ 时,虽然重构信号的变化趋势与原始信号的趋势是类似的,但是重构信号的相对误差和均方根误差却有大幅增大,重构质量明显降低,而且运算速度也有大幅度的降低。由此可以看出,在该算法中,测量次数 M 与信号长度 N 并不只

是单纯的线性关系,不能为获得好的重构质量而肆意地降低测量次数。因此,在确保重构质量并尽可能地减少重构误差的同时,必须要权衡测量次数、稀疏度和信号长度之间的关系。

4 结束语

本文根据压缩感知的基本理论,在小波域上对无线传感网络中温度传感器的监测信号进行了压缩感知的研究。本文选用两种不同的小波基对温度监测信号进行了小波域上的稀疏性分析,选用高斯随机白噪声矩阵作为观测矩阵,对温度信号进行线性投影。根据所得的线性观测量,通过本文所提出的算法对温度信号进行了重构。仿真结果证明,在一定范围内,本文算法相比传统的 CoSaMP 算法更为有效。仿真结果分析,若要兼顾重构质量和运算速度,必须权衡测量次数 M 、信号在小波域上的稀疏度 K 、原始信号长度 N 之间的关系。

参考文献:

- [1] CANDÈS E. Compressive sampling [C]//Proc of International Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, 2006:1433-1452.
- [2] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [3] 李树涛,魏丹. 压缩传感综述 [J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369-1377.
- [4] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [5] 戴琼海,付长军,李向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425-434.
- [6] 赵瑞珍,刘小宇,LI Ching-chung,等. 基于稀疏表示的小波去噪 [J]. 中国科学:信息科学, 2010, 40(10): 33-40.
- [7] 孙林慧,杨震. 基于压缩感知的分布式语音压缩与重构 [J]. 信号处理, 2010, 26(6): 824-829.
- [8] 白凌云,梁志毅,徐志军. 基于压缩感知信号重建的自适应正交多匹配追踪算法 [J]. 计算机应用研究, 2011, 28(11): 4060-4063.
- [9] BARANIUK R G. Optimal tree approximation with wavelets [C]//Proc of SPIE Conference on Wavelet Application in Signal and Image Processing VII. 1999:196-207.
- [10] BARANIUK R G, GEVHER V, DUARTE M F, et al. Model-based compressive sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2010, 56(4): 1982-2001.
- [11] BARANIUK R G, JONES D L. A signal-dependent time-frequency representation: fast algorithm for optimal kernel design [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(1): 134-146.
- [12] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301-321.

(上接第4521页)

- [5] 白子建,赵淑芝,田振中. 公共交通网络优化的禁忌算法设计与实现 [J]. 吉林大学学报:工学版, 2006, 36(3): 340-344.
- [6] 陈艳艳,孙明正. 多层次公交线路规划与评价技术 [M]. 北京:人民交通出版社, 2011.
- [7] 王佳,符卓. 综合客运枢纽接驳公交线路优化设计 [J]. 系统工程, 2012, 30(5): 101-106.
- [8] 柳伍生,周和平,陈凤. 城市群城际公交网络设计模型与算法 [J]. 系统工程, 2011(10): 92-96.
- [9] 蔡念,蔡彩燕. 一种公交网络最优路径新算法 [J]. 计算机应用研

究, 2010, 27(3): 907-908

- [10] 王庆荣,张秋余. 基于随机蚁群神经网络的近期公交客流预测 [J]. 计算机应用研究, 2012, 29(6): 2080-2084.
- [11] 于滨,杨忠振,程春田. 并行蚁群算法在公交线路网优化中应用 [J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(2): 211-214.
- [12] 雷英杰,张善文,李续武,等. MATLAB 遗传算法工具箱及应用 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2005.
- [13] 王岚. 基于自适应交叉和变异概率的遗传算法收敛性研究 [J]. 云南师范大学学报:自然科学版, 2010, 38(3): 32-37.
- [14] 潘立军,符卓. 求解带时间窗取送货问题的遗传算法 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(2): 120-125.