

基于相容性距离的冲突证据合成方法研究

刘希亮, 陈桂明, 李方溪, 张倩

(第二炮兵工程大学, 西安 710025)

摘要: 针对传统证据理论中高度冲突证据组合出现反直观结果的问题, 提出了一种基于相容性距离的冲突证据合成方法。分析了证据理论存在的三个方面问题和各种改进方法的特点, 通过欧式距离建立了证据距离和相容性测度矩阵, 对接受度归一化后计算出相容因子来对冲冲突概率进行加权分配。数值算例验证了改进合成公式的有效性和合理性。

关键词: 证据理论; 冲突概率; 证据距离; 相容因子

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1001-3695(2012)12-4527-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.12.032

Research on conflict evidence combination based on compatibility distance

LIU Xi-liang, CHEN Gui-ming, LI Fang-xi, ZHANG Qian

(The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Aiming at the counterintuitive results generated in the combination of highly conflicting pieces of evidence in evidence theory, this paper proposed a new evidence combination approach based on consistence distance. It analyzed the three existent aspects of classic rule and characteristics of usual modified methods. Then it built evidence distance and consistence measure matrix via Euclidean distance. Finally it calculated the consistence coefficient to distribute the conflict probability after normalized acceptance. Numerical example illustrates the efficiency of the proposed approach.

Key words: evidence theory; conflict probability; evidence distance; consistence coefficient

0 引言

证据理论作为一种重要的不确定性推理方法, 为不确定性信息的表达和合成提供了强有力的工具, 在信息融合、模式识别、故障诊断和决策分析等领域得到了广泛应用^[1]。该理论首先由 Dempster^[2] 提出, 后经 Shafer^[3] 系统化完善, 故又称做 D-S 方法。它具有坚实的数学基础, 能在无须先验知识的情况下, 以简单的推理形式得出较好的融合结果。

随着研究的深入, 人们发现在处理冲突证据时, 证据理论会因组合规则中的归一化过程产生与直觉相反的结论, 即遇到了“在模型 x 上使用方法 y 获得了一个与直觉相悖的结论 z ”的问题。有人认为是模型 x (证据本身, 即信息源) 不可靠, 也有人认为是方法 y (组合规则) 出了问题。鉴于此, 很多学者从两个方面对证据理论进行了改进。其中一种为基于修正原始证据源的方法。该类方法认为, D-S 组合规则本身没有错, 当证据高度冲突时, 应该首先对冲冲突证据进行预处理, 然后再使用 D-S 组合规则。Murphy^[4] 提出的平均法、邓勇等人^[5] 提出的加权平均法是其中的典型代表。另外一种为基于修改 D-S 组合规则的方法, 该类方法认为, 冲突管理办法是改进和发展证据推理的关键问题。Lefevre 等人^[6] 提出了冲突证据合成的

一般性框架, 在此基础上, 产生了大量改进的证据组合规则, 如 Yager^[7] 提出的合成公式、孙全等人^[8] 提出的合成公式以及李弼程等人^[9] 提出的合成公式等。

本文在前人研究的基础上, 遵循第二种改进思路, 提出了一种基于相容性距离的冲突证据合成方法, 对证据理论的合成规则进行了修正。

1 证据理论基础

在证据理论中, 辨识框架 (frame of discriminate) 由一系列两两相斥且穷举的命题构成, 常用 Θ 表示, Θ 的任意命题都属于幂集 2^Θ 。

定义 1 若 2^Θ 上的集函数 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ 满足:

$$m(\emptyset) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \quad (2)$$

则称 m 为 Θ 上的基本概率赋值 (basic probability assignment, BPA)。其中, $m(A)$ 反映了证据对辨识框架中命题 A 的支持程度。

定义 2 若 $m(A) > 0 (A \subseteq \Theta)$, 则称 A 为证据的焦元, 所有焦元的集合称为核。

D-S 证据理论的组合规则可表示为

收稿日期: 2012-05-23; 修回日期: 2012-06-30

作者简介: 刘希亮 (1983-), 男, 山东德州人, 博士研究生, 主要研究方向为机械设备状态监测与故障诊断 (liuxiliang111@yahoo.com.cn); 陈桂明 (1966-), 男, 江苏高邮人, 教授, 博导, 主要研究方向为智能检测与信息融合; 李方溪 (1975-), 博士研究生, 主要研究方向为故障诊断与信息融合; 张倩 (1984-), 女, 博士研究生, 主要研究方向为多源信息融合与优化配置。

$$m(A) = \frac{1}{1 - m_{\cap}(\emptyset)} \sum_{A_j \in A} \prod_{1 \leq j \leq n} m_i(A_j) \quad (3)$$

其中:

$$m_{\cap}(\emptyset) = \sum_{\cap A_j = \emptyset} \prod_{1 \leq j \leq n} m_i(A_j) \quad (4)$$

系数 $m_{\cap}(\emptyset)$ 称为冲突概率,反映了证据之间冲突的程度,归一化因子 $1/(1 - m_{\cap}(\emptyset))$ 的作用就是避免在合成时将非 0 的概率赋给空集 $\emptyset$ [10]。

2 证据组合存在的问题

在 D-S 证据组合中,如果 $m_{\cap}(\emptyset) = 1$,则证据之间矛盾,不能使用式(3)进行融合;而当 $m_{\cap}(\emptyset) \rightarrow 1$ 时,证据高度冲突,会产生有悖常理的结果。

例 1 辨识框架 $\Theta = \{A_1, A_2, A_3\}$ 有两条证据:

证据 1 $m_1(A_1) = 0.95, m_1(A_2) = 0.05$;

证据 2 $m_2(A_2) = 0.05, m_2(A_3) = 0.95$ 。

发现证据 1 和证据 2 是高度矛盾的,由式(3)(4)可得 $m_{\cap}(\emptyset) = 0.9975, m(A_2) = 1, m(A_1) = m(A_3) = 0$ 。计算结果有悖常理,即一个支持程度很低的命题 A_2 在组合后获得了最大的支持度。

例 2 辨识框架 $\Theta = \{A_1, A_2, A_3\}$ 有两条证据:

证据 1 $m_1(A_1) = 0.5, m_1(A_3) = 0.5$;

证据 2 $m_2(A_1, A_2) = 0.8, m_2(A_3) = 0.2$ 。

经计算可得 $m_{\cap}(\emptyset) = 0.5, m(A_1) = 0.8, m(A_2) = 0, m(A_3) = 0.2, m(A_1, A_2) = 0$ 。证据 2 中含两个元素的命题 $m_2(A_1, A_2)$ 经合成后没有得到支持。

通过以上两个例子可以发现证据理论存在两个方面的问题:a)由于证据冲突可能会失去占主导地位的多数意见,而把 100% 的确定性赋给了少数意见;b)只要有一个证据彻底反对某一命题 A ,那么合成结果对 A 的支持程度永远为 0;c)元素较多的命题得到的支持可能很少,与单个元素的命题相比,所占比例非常少,这是因为当某个命题的元素越多时,各证据能够为该命题提供支持的焦元数量可能越少,导致合成后获得的信任可能很少。

针对上述问题,研究人员从修改证据源和组合规则两个方面进行了改进。其中,Yager^[7]认为冲突不能提供有用信息,因而把冲突概率全部赋给了未知领域,该方法过于保守地将冲突全部否定,会使合成后证据的确定性增大,不符合证据推理的目的;Murphy^[4]先对 n 个证据作平均处理,再利用 D-S 公式进行合成,这只是对证据进行简单的平均,没有考虑到各证据的重要度;邓勇等人^[5]改进了 Murphy 的方法,认为不同的证据对最终决策的影响不一样,因而把平均处理改为加权平均,权重根据证据之间的距离来确定。然而,Murphy 和邓勇等人的方法是对单个证据进行多次合成,违背了 D-S 理论要求各证据相互独立的假设,即如果均值证据本身具有不确定性,在没有增加其他证据的情况下人为地使其达到确定性,那么这种确定性是不可靠的。李弼程等人^[9]把冲突概率按各个命题的平均支持程度加权后再进行分配,较好地克服了 D-S 证据理论存在的三个问题,但其缺点是当各命题的平均支持程度的相关性不大时,可能出现不能收敛到确定性的情况。

3 改进的冲突证据合成公式

为了度量辨识框架内各个证据之间的相容程度,引入证据欧式距离^[11]作为分配冲突概率的依据。在李弼程等人^[8]提出的公式(以下简称“李弼程合成公式”,其他同理)的基础上,提出了相容因子的概念。若某个证据与其他证据的距离较小,则认为它们之间相容性较好,在分配冲突概率时通过相容因子赋予该证据较大的权重,从而得到较多的概率分配,最终获得较大的支持程度。根据这个思路本文提出一种改进的证据理论合成公式。

设辨识框架内有 n 条相互独立的证据 m_i ,以每个证据的 BPA 为行向量组成矩阵 $B_{n \times N}$, N 为命题个数。

定义 3 设向量 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为矩阵 B 的第 i 行,即 $p_i = (m_i(A_1), m_i(A_2), \dots, m_i(A_N))$ 。向量 $p_i - p_j$ 的长度称为证据 m_i 和 m_j 的欧式距离:

$$d_{ij} = \|p_i - p_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N [m_i(A_k) - m_j(A_k)]^2} \quad (5)$$

通过证据距离可以量化证据之间的相容性程度,若距离短则证明相容性好,反之则相容性差。

定义 4 证据之间的相容性测度 con_{ij} 为

$$con_{ij} = e^{-1/d_{ij} - \bar{d}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

其中:

$$\bar{d} = \frac{1}{n(n-1)/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \quad (7)$$

表示证据距离均值。

由此可以得到一个相容性测度矩阵 $C_{n \times n}$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & con_{12} & con_{13} & \dots & con_{1n} \\ con_{21} & 1 & con_{23} & \dots & con_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ con_{n1} & con_{n2} & con_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

当两个证据之间的距离越小时,它们的相容性测度就越大,表明相容性越好。

定义 5 辨识框架对证据 m_i 的接受度 rec_i 为

$$rec_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n con_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

式(9)是将相容性测度矩阵的每一行中除自身的相容性测度以外的所有元素求和, rec_i 反映的是证据 m_i 与其他所有证据的相容程度,是相容性测度的函数。如果一个证据与其他证据相容较好,则认为它们相互包容,这些证据相互支持对方;如果一个证据与其他证据相容较坏,则认为它们相互支持的程度低。将 rec_i 归一化后就可以得到衡量冲突概率分配的相容因子。

定义 6 证据 m_i 与其他证据的相容因子为

$$\delta_i = \frac{rec_i}{\sum_{i=1}^n rec_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

相容因子 δ_i 可以作为分配冲突概率的权重。

至此得到了一种改进的证据组合规则:

$$m(A) = \sum_{A_j \in A} \prod_{1 \leq j \leq n} m_i(A_j) + m_{\cap}(\emptyset) \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times m_i(A) \quad (11)$$

上述合成公式能够有效平衡多个证据,且不会把 100% 的确定性赋给少数意见,而元素较多的命题也能得到一定的信任

分配。此外,只要有证据支持某一命题,合成结果就不会为 0,从而有效克服了 D-S 合成公式三个方面的不足。

改进合成公式的计算步骤如下:

- 根据式(5)计算任意证据 m_i 和 m_j 之间的距离 d_{ij} ;
- 根据式(8)计算相容性测度矩阵 C ;
- 根据式(9)计算辨识框架对证据 m_i 的接受度 rec_i ;
- 根据式(10)计算相容因子 δ_i ,确定分配权重;
- 用改进的合成公式对证据进行合成。

4 应用实例

例 3 设辨识框架 $\Theta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$,依次收到六条证据。

- 证据 1 $m_1(A_1) = 0.50, m_1(A_2) = 0.30, m_1(A_3) = 0.20$,
 证据 2 $m_2(A_1) = 0.50, m_2(A_2) = 0.35, m_2(A_3) = 0.15$,
 证据 3 $m_3(A_1) = 0.00, m_3(A_2) = 0.90, m_3(A_3) = 0.10$,
 证据 4 $m_4(A_1) = 0.55, m_4(A_2) = 0.30, m_4(A_3) = 0.15$,
 证据 5 $m_5(A_1) = 0.60, m_5(A_2) = 0.30, m_5(A_3) = 0.10$,
 证据 6 $m_6(A_1) = 0.60, m_6(A_2) = 0.30, m_6(A_3) = 0.10$ 。

为验证改进合成公式的有效性,分别利用 D-S 合成公式、Murphy 合成公式、邓勇合成公式、李弼程合成公式和本文改进公式进行证据组合,结果如表 1 所示。

表 1 证据组合结果

证据	组合方法				
	D-S 合成公式	Murphy 合成公式	邓勇合成公式	李弼程合成公式	本文改进公式
m_1	$m(A_1) = 0.649\ 4$	$m(A_1) = 0.647\ 2$	$m(A_1) = 0.647\ 2$	$m(A_1) = 0.557\ 5$	$m(A_1) = 0.557\ 5$
m_1, m_2	$m(A_2) = 0.272\ 7$	$m(A_2) = 0.273\ 5$	$m(A_2) = 0.233\ 5$	$m(A_2) = 0.304\ 9$	$m(A_2) = 0.304\ 9$
	$m(A_3) = 0.077\ 9$	$m(A_3) = 0.079\ 3$	$m(A_3) = 0.079\ 3$	$m(A_3) = 0.137\ 6$	$m(A_3) = 0.137\ 6$
m_1, m_2, m_3	$m(A_1) = 0.000\ 0$	$m(A_1) = 0.198\ 8$	$m(A_1) = 0.241\ 6$	$m(A_1) = 0.297\ 8$	$m(A_1) = 0.328\ 4$
	$m(A_2) = 0.969\ 2$	$m(A_2) = 0.781\ 6$	$m(A_2) = 0.657\ 2$	$m(A_2) = 0.563\ 8$	$m(A_2) = 0.512\ 6$
	$m(A_3) = 0.030\ 8$	$m(A_3) = 0.019\ 6$	$m(A_3) = 0.101\ 2$	$m(A_3) = 0.138\ 4$	$m(A_3) = 0.159\ 0$
m_1, m_2, m_3, m_4	$m(A_1) = 0.000\ 0$	$m(A_1) = 0.338\ 2$	$m(A_1) = 0.351\ 2$	$m(A_1) = 0.376\ 3$	$m(A_1) = 0.425\ 3$
	$m(A_2) = 0.984\ 4$	$m(A_2) = 0.654\ 6$	$m(A_2) = 0.508\ 3$	$m(A_2) = 0.477\ 5$	$m(A_2) = 0.402\ 4$
	$m(A_3) = 0.015\ 6$	$m(A_3) = 0.007\ 2$	$m(A_3) = 0.140\ 5$	$m(A_3) = 0.146\ 2$	$m(A_3) = 0.172\ 3$
m_1, m_2, m_3, m_4, m_5	$m(A_1) = 0.000\ 0$	$m(A_1) = 0.498\ 3$	$m(A_1) = 0.472\ 5$	$m(A_1) = 0.426\ 3$	$m(A_1) = 0.641\ 7$
	$m(A_2) = 0.989\ 0$	$m(A_2) = 0.498\ 3$	$m(A_2) = 0.453\ 2$	$m(A_2) = 0.434\ 8$	$m(A_2) = 0.346\ 7$
	$m(A_3) = 0.011\ 0$	$m(A_3) = 0.003\ 4$	$m(A_3) = 0.074\ 3$	$m(A_3) = 0.138\ 9$	$m(A_3) = 0.011\ 6$
$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$	$m(A_1) = 0.000\ 0$	$m(A_1) = 0.665\ 2$	$m(A_1) = 0.506\ 9$	$m(A_1) = 0.458\ 8$	$m(A_1) = 0.878\ 8$
	$m(A_2) = 0.981\ 3$	$m(A_2) = 0.334\ 5$	$m(A_2) = 0.475\ 2$	$m(A_2) = 0.415\ 5$	$m(A_2) = 0.111\ 5$
	$m(A_3) = 0.018\ 7$	$m(A_3) = 0.000\ 3$	$m(A_3) = 0.0179$	$m(A_3) = 0.129\ 7$	$m(A_3) = 0.009\ 7$

以证据 A_1 为例,不同组合公式下合成后的证据值如图 1 所示。

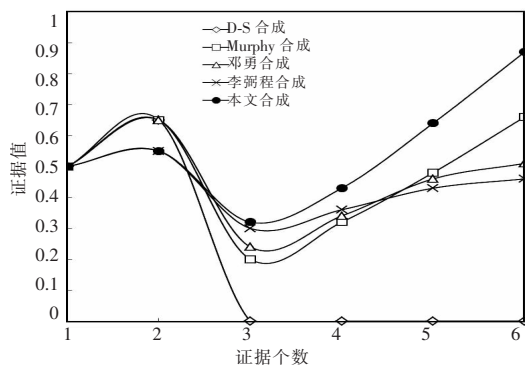


图 1 证据 A_1 合成趋势图

本例中,证据 m_3 是干扰项,与其他证据冲突较大。从表 1 可以看出,基于 D-S 合成公式直接进行合成所得的结果受到 m_3 的严重影响,由于 m_3 彻底否定 A_1 ,导致后续组合已不可能再获得正确的结论;Murphy 合成公式、邓勇合成公式和李弼程合成公式均可抑制坏证据 m_3 的干扰,组合结果符合常理,但是当出现 m_3 时, $m(A_1)$ 值变化较大,随着支持 A_1 的证据(m_4 ,

m_5, m_6) 逐渐出现, $m(A_1)$ 值有所增加,但增加速度缓慢,导致无法作出判断;而本文提出的改进组合方法较好地克服了上述问题。从图 1 看出,改进公式的合成结果受 m_3 影响较小,相对于其他方法合成证据值变化小,而且随着证据的增加, $m(A_1)$ 值明显增加,有助于作出决策。

例 3 验证了本文改进公式的正确性,证明了在存在冲突证据的情况下,能够有效降低冲突对合成结果的影响,具有较好的稳定性和较快的收敛速度。其实,本文方法同样适用于非冲突证据的合成。这是因为当证据相容性较好时,冲突概率较小,式(11)中第一项较大,因此式中第一项起主要作用,根据相容因子分配权重对合成结果的影响很小,会得出与经典 D-S 合成公式相一致的结果。

5 结束语

a) 分析了传统证据理论存在的三个方面的问题,用实例进行了说明,给出了目前冲突合成的两个研究方向,并指出了各种改进方法的优缺点。

b) 改进了证据理论合成公式,通过证据距离和相容性测度矩阵判定辨识框架对证据的接受度,最终确定相容因子,从而定量地衡量证据之间的相容性程度。对于与其他证据相容性好的证据,将获得较大的相容因子,在证据合成公式中分配较大权重;对于相容性差的证据,相容因子显得更为重要。实例分析结果表明了该方法的合理性和有效性。

c) 需要指出的是,本文的证据合成公式不仅对冲突证据合成具有较好效果,对于非冲突证据合成同样适用。在实际应用中,若证据之间相容性较好,则要根据冲突程度和收敛速度选择合适的组合规则。如何根据需要确定不同的证据合成方法是未来重点研究的内容之一。

参考文献:

- [1] 周迪民,段国云. 证据理论在不确定性推理中的应用研究[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(12): 4433-4435.
- [2] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(2): 325-339.
- [3] SHAFER G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976: 10-40.
- [4] MURPHY C K. Combining belief functions when evidence conflicts[J]. *Decision Support Systems*, 2000, 29(1): 1-9.
- [5] 邓勇,施文康,朱振福. 一种有效处理冲突证据的组合方法[J]. 红外与毫米波学报, 2004, 23(1): 27-32.
- [6] LEFEVRE E, COLOT O, VANNOORENBERGHE P. Belief functions combination and conflict management[J]. *Information Fusion*, 2002, 3(2): 149-162.
- [7] YAGER R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules[J]. *Information Sciences*, 1987, 41(2): 93-137.
- [8] 孙全,叶秀清,顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式[J]. 电子学报, 2000, 28(8): 1117-1119.
- [9] 李弼程,王波,魏俊,等. 一种有效的证据理论合成公式[J]. 数据采集处理, 2002, 17(1): 33-36.
- [10] 李玲玲,马东娟,王成山,等. DS 证据理论冲突处理新方法[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(12): 4528-4531.
- [11] 李巍华,张盛刚. 基于改进证据理论及多神经网络融合的故障分类[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 93-99.