

一种改进的多目标优化算法*

樊纪山¹, 王经卓¹, 熊盛武²

(1. 淮海工学院 电子工程学院, 江苏 连云港 222005; 2. 武汉理工大学 计算机学院, 武汉 430070)

摘要: 为了提高非劣解向 Pareto 最优面收敛的速度以及解的多样性, 设计了一种新的杂交算子并改进了 NSGA-II 算法。在此算法中, 采用中心均值重组算子策略增强算法全局快速搜索能力, 以获得最佳的 Pareto 近似解, 同时, 改进 NSGA-II 快速非支配排序和拥挤机制将父代与子代的双种群进行截短, 确保最优解不会丢失并保证解的多样性。数据实验表明, 该算法能在解的收敛性、分布性以及自适应程度上均表现较好。

关键词: 多目标优化; 中心均值重组; 自适应交叉; Pareto 最优

中图分类号: TP183 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)12-4463-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.12.014

Improved multi-objective optimization algorithm

FAN Ji-shan¹, WANG Jing-zhuo¹, XIONG Sheng-wu²

(1. School of Electronic Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang Jiangsu 222005, China; 2. School of Computer, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: This paper proposed a novel multi-objective evolutionary algorithm based on a novel crossover operation and improves NSGA-II, in order to heighten further rate of convergence of solutions to Pareto optimal front and ensure the diversity of optimal solution. In the algorithm, the crossover operator parameter was adaptive for enhancing the ability of global fast search to achieve better Pareto approximate solutions. Moreover, it improved fast ranking mechanisms and crowding distance sorting of NSGA-II truncates the population set formed by the parents and the new points, in order to ensure the optimal solution not be lost and to ensure the diversity of optimal solution. The experimental results show that the proposed approach is able to effectively solve the real-parameter multi-objective problems and has better performance on convergence, diversity and the degree of controlling self-adaptive.

Key words: multi-objective optimization; mean-centric recombination; self-adaptive crossover; Pareto optimal

0 引言

工程中许多决策或者控制问题大多是多目标优化问题,而多数多目标优化问题中的各目标之间存在约束或冲突。因为多目标优化算法所求解的不是单个最优解,而是一个最优解集,即 Pareto 最优面。所以,多目标优化算法有两个目的:a)尽可能找到真正的 Pareto 最优面;b)尽可能保持解的多样性。要同时满足这两个目标,对多目标优化算法而言有一定的难度。

多目标优化算法是全局性概率优化搜索方法。其发展过程大致有两个阶段。第一个阶段的研究主要是看是否基于 Pareto 优化;第二阶段是在 Pareto 优化的基础上使用其他集的概念,这个其他集中放置的是当前代的所有非支配解,便于解的个体有较好的分布。在这两个阶段中,比较典型的多目标演化算法有 Deb 等人^[1]提出 NSGA-II 算法和 Zitzler 等人^[2]提出的 SPEA2 算法。这两种算法是目前比较常见的多目标算法,它们的优点较多,但缺点也较明显。NSGA-II 的优点是全局搜索性能良好,解集具有良好的分布性,在算法中使用拥挤距离排序不会使算法陷入到局部最优;缺点是在高维问题中,解集的多样性不理想,而且在算法后期选择解的保留时很容易造成精英解的丢失^[3]。SPEA2 的优点在于可以取得一个分布度较

好的解集,尤其在高维问题的求解,但是在其聚类过程中多样性耗时长,运行效率不高^[4]。国内有许多研究者对这两种算法进行改进。李峰^[5]设计了一个有效的并行增强 Pareto 多目标算法,在算法中采用了全局并行模型和粗粒度并行岛模型。后来又出现了处理约束问题的优化算法(MOCPSO)^[6]可以将约束问题转换为多目标优化问题,基于 epsilon 支配概念的 epsilon-MOEA 算法^[7]可以防止解丢失的问题,在这些优化算法中多数都有额外参数的设置问题,需要人工参与运算,自适应性不太理想。基于此,提出了一种中心均值重组自适应多目标优化算法(IMOOA),在算法中改进模拟交叉算子,沿用 NSGA-II 算法所采用的拥挤距离对个体进行排序。通过实例测试和 NSGA-II 算法进行比较表明,该算法能有效解决了实参多目标优化问题,且在解的收敛性、分布性以及算法的自适应程度均表现较好。

1 多目标优化问题

一个通常的多目标优化问题(MOP)包含 n 个自变量的集合、 k 个目标函数的集合、 m 个约束限制的集合和目标函数及约束都是自变量的函数。以最大化问题为例,MOP 表示为

$$\text{maximize: } Y=f(X)=(f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)) \quad (1)$$

收稿日期: 2012-06-06; 修回日期: 2012-07-19 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174013, 60572015)

作者简介: 樊纪山(1975-), 男, 山东临沂人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为机器学习、演化计算(fjsszw2005@126.com); 王经卓(1973-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为检测与控制; 熊盛武(1966-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为机器学习、智能计算。

$$\text{subject to: } g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})) \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{where: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbf{Y} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{x}$ 是自变量向量, $\mathbf{y}$ 是目标向量; $\mathbf{X}$ 是自变量空间; $\mathbf{Y}$ 是目标空间, 约束 $g(\mathbf{x}) \leq 0$ 确定可行解。多目标优化问题 $\max(f(\mathbf{X}))$ 中的相关定义如下:

定义1 Pareto 支配。对于任意的自变量向量 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbf{X}$: 当且仅当 $f_i(\mathbf{X}_1) < f_i(\mathbf{X}_2)$, 称 $\mathbf{X}_2$ Pareto 支配 $\mathbf{X}_1$, 记为 $\mathbf{X}_2 > \mathbf{X}_1$; 当且仅当 $f_i(\mathbf{X}_1) \leq f_i(\mathbf{X}_2)$, 称 $\mathbf{X}_2$ Pareto 弱支配 $\mathbf{X}_1$, 记为 $\mathbf{X}_2 \geq \mathbf{X}_1$ ($i = 1, 2, \dots, m$)。

定义2 Pareto 最优解。对于一个自变量向量 $\mathbf{X}^* \in \mathbf{X}$, 若不存在 $\mathbf{X}' \in \mathbf{X}$, 使得 $f_i(\mathbf{X}^*) \geq f_i(\mathbf{X}')$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 且其中至少有一个不等式严格成立, 则称 $\mathbf{X}^*$ 为 Pareto 最优解。

定义3 Pareto 最优面。假如 Pareto 最优解集 $\{\mathbf{X}^*\}$, 则称 $P_{\text{true}} = \{f(\mathbf{X}') = (f_1(\mathbf{X}'), f_2(\mathbf{X}'), \dots, f_m(\mathbf{X}')) \mid \mathbf{X}' \in \{\mathbf{X}^*\}\}$ 为 Pareto 最优边界。

2 IMOOA 多目标优化算法

2.1 中心均值重组策略

在 SBX 算子中使用了概率分布函数, 该分布函数中有一个需要用户自己确定、可取任意非负实数的参数 η , 这样就使得该算子在实际应用过程中有一定的局限性, 不能自适应操作。SBX 算子中产生新个体采用的是线性组合方式。假设参与生成新个体的父代个体值为 P_1 和 P_2 , 则它们的后代个体为^[8]

$$c_1 = ((1 + \beta(\mu))p_1 + (1 - \beta(\mu))p_2)/2 \quad (5)$$

$$c_2 = ((1 - \beta(\mu))p_1 + (1 + \beta(\mu))p_2)/2 \quad (6)$$

其中: $\mu \in [0, 1]$ 的任意一个随机数, $\beta(\mu)$ 的计算式为

$$\beta(\mu) = \begin{cases} 2\mu \frac{1}{\eta + 1} & \text{if } \mu \leq 0.5 \\ \frac{1}{2(1 - \mu)} \frac{1}{\eta + 1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

其中: η 是用户自设的一个正数值。为了能使算法自适应地参与演化运算, 将 η 的值进行一定的改进处理。

在演化算法的运算过程中, 向 Pareto 优化界面推进时, 常有两种情况产生: a) 种群个体正在靠近优化解, 如图1所示; b) 种群个体包围优化解, 如图2所示。第一种情况发生在演化算法运行的前期阶段, 在这个阶段中算法要决定如何来产生新的种群个体 (pop-best) 以便向 Pareto 优化解靠近, 这时可能最好的种群个体位于当前种群的边缘, 但可能会是局部最优解。为了改变产生的优良个体接近最优解, 这里采用一种中心距离重组策略来避免算法陷入局部最优。对于第二种情况, 这时最好的种群个体 (pop-best) 可能是一个折中的种群个体。为了获得更优的种群个体值, 也需要进一步改进处理。

对于以上两种情况是任何演化在重组过程中不可避免发生的事情, 因而很难判断算法在何时发生这两种情况。为了能够判定算法得到的是局部最优还是一个折中解, 在这里采用了中心距离重组策略。也就是将种群到变量空间中心点的平均距离 (欧式距离) 与最好个体到变量空间中心距离作比较, 即

$$\Delta = d_{\text{avg}}/d_{\text{best}} \quad (8)$$

对于第一种情况, 这时 Δ 的值可能比较小, 而第二种情况可能会导致 Δ 的值比较大。为了能够确定算法接近或收敛于优化解的边缘, 将产生后代解的方程进行修改, 在这里定义两个

参数 λ_1 和 λ_2 分别代表参与产生新个体的父代个体。 λ_1 和 λ_2 分别为

$$\lambda_1 = (\Delta(p_1 + p_2) - (p_2 - p_1))/2 \quad (9)$$

$$\lambda_2 = (\Delta(p_1 + p_2) - (p_1 - p_2))/2 \quad (10)$$

其中: p_1 和 p_2 是从当前种群中选择两个个体。然后将它们代入到式(5)和(6), 以便生成新的个体。在算法演算过程中新个体产生的概率分布为

$$P(\beta) = (\eta + 1)/(\beta + 1)^{\eta + 2} \quad (11)$$

$$\beta = |(\lambda_1 - \lambda_2)/(p_1 - p_2)|$$

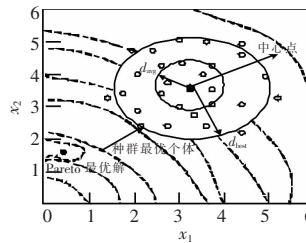


图1 种群解接近 Pareto 优化界面

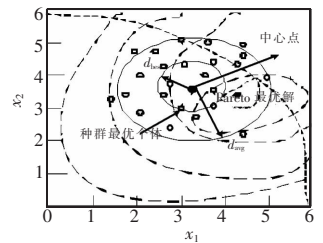


图2 种群解环绕 Pareto 最优界面

2.2 种群的截取策略

在 NSGA-II 算法中优良个体选取采用精英策略。基本方法是将父代 P_t 和子代 Q_t 全部个体组合成一个统一的种群 R_t , 这样就使得 R 中个体的规模变成 $2N$; 接着将 R_t 种群按非劣解等级分类并计算个体的拥挤距离; 然后按照等级的高低进行个体的选取, 直到选择出个体总数达到 N , 形成新一轮进化的父代种群 P_{t+1} 。从这里可以看出, 在选择种群个体的过程中可能会使精英个体选取不当, 这样会破坏解的多样性。为了改变算法中的这个缺陷, 本文对其进行改进。种群个体的截取步骤为: a) 对种群中的个体依然进行非支配排序, 使种群中的每个个体均有相应的优化面; b) 采用 NSGA-II 算法中拥挤距离以及使用本文提出的中心均值策略计算出每个前沿优化面到中心距离点的平均距离 d_{avg} 来选取同一个优化面的个体。假设 S_k 表示第 k 个优化面的个体数量, 当前 i 个优化面个体总数量 $< N$, 但前 $i+1$ 个优化面的总数量 $> N$, 则前 i 个优化面的所有个体都添加到 P_{t+1} 种群, 则第 $i+1$ 优化面的个体, 从中选择 d_{avg} 最大个体进入 P_{t+1} 种群中直到种群的规模为 N 为止。

2.3 算法流程

- 在整个目标空间中随机产生种群大小为 N 的初始种群 P_0 ;
- 计算当前种群 P_t 中每个个体的目标函数值, 依函数的值对初始种群进行快速非支配排序;
- 计算种群中每个个体的拥挤度;
- 使用锦标赛选择法进行个体选择;
- 利用中心均值重组策略进行 SBX 算子演化生成新的子种群 Q_t ;
- $R_t = P_t \cup Q_t$;
- 使用改进的种群截取策略在 R_t 中选择 N 个个体填充到 P_{t+1} ;
- 满足终止条件时停止算法, 否则 $t = t + 1$ 并转到步骤 b)。

3 数值实验与分析

3.1 测试函数

本文采用 Zitzler 等人在文献[9]中所列举的四个典型的测试函数 (ZDT1 ~ ZDT4) 进行了数值实验, 并与经典算法 NS-

GA-II 的计算结果进行比较。

ZDT1 具有凸的 Pareto 最优前沿;ZDT2 具有非凸的 Pareto 最优前沿;ZDT3 具有离散特征,其 Pareto 最优边是由几个非连续的凸区域组成的;ZDT4 具有 21^9 个局部最优前沿,而且越靠近真正的 Pareto 最优前沿,局部最优前沿就越密集。因此,很难得到它的 Pareto 最优解,此函数用来测试算法处理多峰值问题的能力。它们都是一些难以求解的问题。

ZDT1:具有凸的 Pareto 最优前沿。

$$\min f_1(x) = x_1$$

$$\min f_2(x) = g(x) (1 - \sqrt{x_1/g(x)})$$

$$g(x) = 1 + 9 \times \sum_{i=2}^m x_i / (m-1)$$

$$x_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2, \dots, 30$$

ZDT2:具有非凸的 Pareto 最优前沿。

$$\min f_1(x) = x_1$$

$$\min f_2(x) = g(x) (1 - \sqrt{x_1/g(x)})$$

$$g(x) = 1 + 10(m-1) + \sum_{i=2}^m (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i))$$

$$x_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2, \dots, 30$$

ZDT3:具有凸、不连续的 Pareto 最优前沿。

$$\min f_1(x) = x_1$$

$$\min f_2(x) = g(x) (1 - \sqrt{x_1/g(x)}) - (x_1/g(x)) \times \sin(10\pi x_1)$$

$$g(x) = 1 + 9 \times \sum_{i=2}^m x_i / (m-1)$$

$$x_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2, \dots, 30$$

ZDT4:具有非凸、局部最优较多的 Pareto 最优前沿。

$$\min f_1(x) = x_1$$

$$\min f_2(x) = g(x) (1 - \sqrt{x_1/g(x)})$$

$$g(x) = 1 + 10(m-1) + \sum_{i=2}^m (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i))$$

$$x_1 \in [0, 1], x_i \in [-5, 5] \quad i = 2, 3, \dots, 10$$

3.2 性能评估准则

本文采用 Zitzler 等人^[9-11]所采用的评价多目标优化算法的性能准则:

$$GD = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^N D_i^2} \quad (12)$$

其中: D_i 为在目标空间上第 i 个解到 Pareto 最优边界的最短欧氏距离, N 为得到的非支配解的个数, n 为目标函数的个数。 GD 能评价算法所得最终解集与 Pareto 最优边界的趋近程度, GD 越小,说明越趋近 Pareto 最优解。

$$SP = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{d}_i - d_i)^2} \quad (13)$$

其中: $d_i = \min_{j=1 \wedge j \neq i}^N |f_k^i(x) - f_k^j(x)|$, $\bar{d}_i$ 是 d_i 的均值。 SP 能评估算法多的解集在目标空间上的均匀分布程度,其值越小,说明解的分布越均匀。

3.3 算法运行环境及参数设置

参与比较的 NSGA-II 算法采用实数编码,IMOOA 算法也采用实数编码,这样能便于算法的比较。这两种算法均在 VC++6.0 下编译运行,IMOOA 算法中没有使用变异算子,目的就是突出显示所提出策略的优越性能,选择算子采用锦标赛算法来选择父代的个体。两种算法的种群大小都是 100, NSGA-II 算法的变异率设为 0.01,交叉概率为 0.9,最大运行

代数为 200。

3.4 运行结果分析

为了避免算法的随机性,所得的优化近似解集运行 20 次。同时分别计算出 ZDT1 ~ ZDT4 各自的最终解集的 GD 和 SP 的值,求 20 次的平均值和标准方差,其结果如表 1 所示。

表 1 两种算法求解优化问题的性能比较

测试函数	GD		SP	
	NSGA-II	IMOOA	NSGA-II	IMOOA
ZDT1	1.23e-3	7.32e-4	4.35e-3	3.72e-3
	2.34e-4	1.29e-4	7.41e-4	5.37e-4
ZDT2	1.51e-3	9.67e-4	8.34e-3	6.45e-3
	3.45e-4	1.73e-4	1.67e-3	6.32e-4
ZDT3	9.89e-4	8.78e-4	1.03e-2	7.45e-3
	6.35e-4	5.78e-4	4.56e-3	1.35e-3
ZDT4	5.39e-2	3.79e-2	1.34e-2	4.67e-3
	1.73e-2	3.08e-2	2.13e-2	9.79e-3

从表 1 中可以看出,IMOOA 算法在这四种连续测试函数中都表现出良好的性能,无论在收敛性还是在解的分布性上都能获得较优的 Pareto 优化界面。

两种算法所得近似解的前沿边如图 3 ~ 6 所示。

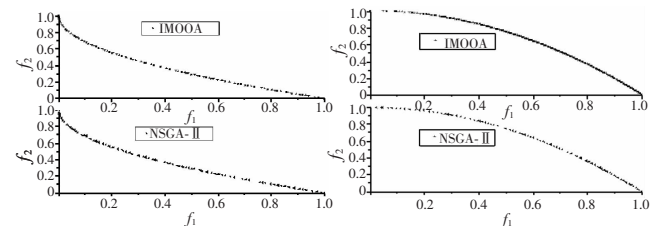


图 3 ZDT1 两种算法所得 Pareto 优化面

图 4 ZDT2 两种算法所得 Pareto 优化面

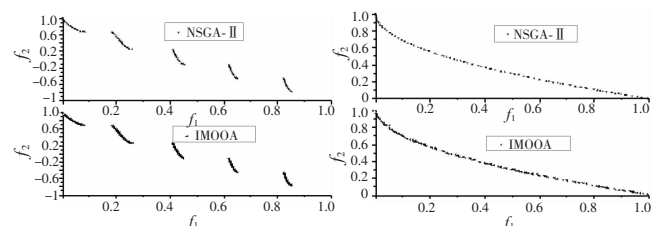


图 5 ZDT3 两种算法所得 Pareto 优化面

图 6 ZDT4 两种算法所得 Pareto 优化面

从图 3 中 ZDT1 两种算法的优化结果来看,两种算法在多样性以及收敛性方面都表现出较好的性能,但 IMOOA 算法所得的解分布更加均匀一些。图 4 中 ZDT2 可以看出 IMOOA 算法所得的解分布更加均匀,且优化界面比较光滑,解的数量较多。图 5 中 ZDT3 的 NSGA-II 和 IMOOA 两种算法所得优化界面都比较趋近真实的 Pareto 优化面,但后者解的数量更多,分布更均匀。图 6 中 ZDT4 充分表明了 IMOOA 算法所得的最终解集能更加逼近真实的 Pareto 最优边界,且在目标空间分布更加均匀,表现出了良好的收敛性和分布性。

4 结束语

NSGA-II 算法在解决多目标优化问题中得到广泛应用,但其在保持解的多样性方面有一定的不足。本文针对其缺陷进行研究,采用均值中心重组策略以及改进精英选择策略,提出一种改进的目标优化算法。从实验结果来看,该算法与 NSGA-II 算法相比较能搜索到更优的 Pareto 优化解,而且解的分布均匀,且在收敛性、算法的自适应程度等方面表现出良好的性能。

(下转第 4494 页)

公交二分网络社团划分的结果如图4所示(为了方便区分不同类节点,将线路1~6分别用字母A~F表示)。

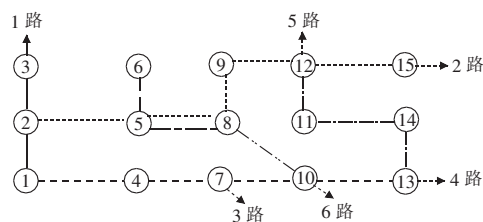


图3 示例公交网络

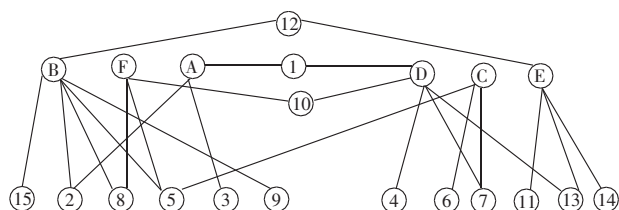


图4 示例公交网络的社团结构

由图4可以看出,该二分公交网络模型被划分为两个不同社团,并且两社团间存在三个孤立节点分别是站点1、站点10和站点12。本文把它们每一个视为一个独立的社团,则网络中一共有五个社团,分别进行编号。利用本文算法分别搜索从站点1到站点12、站点2到站点10的最佳路径,结果如表1所示。

表1 本文算法执行结果

所求路径	路径编号	路径输出节点	换乘次数	所经站点数
1—12	1	1-A-2-B-12	1次	5站
	2	1-D-13-E-12	1次	7站
2—10	1	2-B-8-F-10	1次	3站
	2	2-B-5-F-10	1次	3站
	3	2-A-1-D-10	1次	4站

表2显示了文献[10]的算法对同一个算例的搜索结果,该算法可以求出两点间指定数量的多条路径,但这些路径的换乘次数不能保证是最小的,且算法给出了路径所经过的所有站点,并没有区分这些站点信息对乘客的重要程度,也没有输出换乘所需的线路信息。对比表1和2中相关数据可以看出,本文算法可以求出最小换乘下的多条最佳出行路径,并且结果给出了相应的换乘点和换乘线路,可以较好地满足乘客的实际出行需求。

表2 文献[10]中算法搜索站点1~12的路径结果

路径编号	所经站点序列	换乘次数	所经站点数
1	1-2-5-8-9-12	1次	5站
2	1-4-7-10-13-14-11-12	1次	7站
3	1-2-5-7-10-13-14-11-12	2次	8站
4	1-2-5-8-10-13-14-11-12	2次	8站

4 结束语

公交网络路径选择问题的研究对公交网络优化以及公交线路查询具有重要的实际意义。现有的研究多采用有向赋权图模型描述公交网络,需要在路径搜索过程反复判断是否存在换乘,且搜索步数较多。本文将复杂网络的理论应用于公交最优路径求解问题,提出一种新的公交多路径搜索算法。将算法应用于具体实例,结果表明本文算法可以较快地求得最小换乘下的多条有效路径以供乘客选择。因此,该算法对于解决公交路径搜索问题具有重要的实际意义。

参考文献:

- [1] 汪小帆,李翔,陈关荣. 复杂网络理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社,2006.
- [2] BAGLER G. Analysis of the airport network of India as a complex weighted network[J]. *Physica A*,2008,**387**(12):2972-2980.
- [3] SEN P, DASGUPTA S, CHATTERJEE A, et al. Small-world properties of the Indian railway network[J]. *Physical Review E*,2002,**67**(2):036106.
- [4] JIANG Bin, CLARAMUNT C. Topological analysis of urban street networks[J]. *Environment and Planning B*,2004,**31**(1):151-162.
- [5] 蔡念,蔡彩燕. 一种公交网络最优路径新算法[J]. 计算机应用研究,2010,**27**(3):907-908.
- [6] 龚萍. 城市公交网络最优路径求解算法研究[D]. 成都:电子科技大学,2010.
- [7] 侯刚,周宽久. 基于换乘次数最少的公交网络最优路径模型研究[J]. 计算机技术与发展,2008,**18**(1):45-47.
- [8] 吴亚晶,张鹏,狄增如,等. 二分网络研究[J]. 复杂系统与复杂性科学,2010,**7**(1):1-12.
- [9] 王洋,狄增如,樊瑛. 二分网络社团结构的比较性定义[J]. 复杂系统与复杂性科学,2009,**6**(4):40-44.
- [10] 闫小勇,尚艳亮. 基于二部图模型的公交网络路径搜索算法[J]. 计算机工程与应用,2010,**46**(5):246-248.
- [11] 鲍江宏,关毅璋. 基于矩阵运算的公交查询高效算法[J]. 计算机工程与应用,2008,**44**(10):198-200.
- [6] 刘衍民,牛奔,赵庆祯. 求解约束优化问题的多目标粒子群算法[J]. 计算机应用研究,2011,**28**(3):851-854.
- [7] 过晓芳. 基于粗糙集理论的改进ε-支配多目标进化算法[J]. 计算机应用研究,2011,**28**(3):948-950.
- [8] DEB K, JAIN H. Parent to mean-centric self-adaptation in single and multi-objective real-parameter genetic algorithms with SBX operator, KanGAL Report 2011017[R].
- [9] ZITZLER E, DEB K, THIELE L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms; empirical results [J]. *Evolutionary Computation*,2000,**8**(2):173-195.
- [10] ZITZLER E, THIELE L. Multi-objective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pare to approach [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*,1999,**3**(4):257-271.
- [11] 龚正,王毅,周佳. 一种改进的多目标演化算法[J]. 计算机工程与应用,2010,**46**(26):43-45.

(上接第4465页)

参考文献:

- [1] DEB K, PRATAB A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*,2002,**6**(2):182-197.
- [2] ZITZLER E, LAUMANN S, THIELE L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm, TIK-Report Nr./03 [R]. Iúrich:ETH, TIK,2001.
- [3] 樊纪山. ε-dominance 多目标演化算法在优化问题中的应用研究[D]. 武汉:武汉理工大学,2006.
- [4] 肖晓伟,肖迪,林锦国,等. 多目标优化问题的研究概述[J]. 计算机应用研究,2011,**28**(3):805-808.
- [5] 李峰. 多目标演化算法及在优化问题中的应用[D]. 武汉:武汉理工大学,2004.