

# 基于图割优化的能量最小化模型图像分割方法\*

兰红, 柳显涛

(江西理工大学信息工程学院, 江西赣州 341000)

**摘要:** 针对主动轮廓模型中利用梯度下降法求解能量函数容易陷入局部极小的不足, 设计了一个离散化最小能量函数模型。该模型以 Chan-Vese 模型为基础, 利用图割方法优化能量泛函, 实现能量的全局最优解。新模型首先将图像映射为图, 将基于像素的能量泛函转换为可用图表示的离散化能量函数, 通过计算节点及其邻域关系权值, 迭代求解最小化能量并将其作用于形变轮廓曲线, 直至达到稳定状态。新模型改进了主动轮廓模型对弱边界图像初始轮廓敏感的问题, 提高了分割精度和运行速度。

**关键词:** 能量最小化; 图割; 主动轮廓模型; 离散化; 图像分割

**中图分类号:** TP391.41      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2012)11-4381-04

**doi:**10.3969/j.issn.1001-3695.2012.11.099

## Energy minimization model for image segmentation via graph cut optimization

LAN Hong, LIU Xian-tao

(School of Information Engineering, Jiangxi University of Science & Technology, Ganzhou Jiangxi 341000, China)

**Abstract:** Aiming at the drawbacks of active contour models which used gradient descent and result in local minimum easily, this paper proposed a discrete energy minimization model for image segmentation. It designed the new model based on Chan-Vese model and optimized the energy function via graph cut method. It could find a global minimum rather than a local one. To construct the new model, first step was to map the image for a graph, and then changed the level set energy function into a discrete form which should be proved graph-representable. Using the model traversed each node and its neighborhood, it computed the weights of the edges with these nodes, and got the new labels of pixels and updated the initial contour, until the energy remained constant and the contour reached the boundary of object. The major advantages of this model included the existence of global minimum and its insensitivity to initialization. Numerical implementations show that the model improves the accuracy and speeds for image segmentation.

**Key words:** energy minimization; graph cut; active contour model; discretization; image segmentation

## 0 引言

图像分割是计算机视觉研究领域最重要也最艰巨的一项任务。传统的基于数据驱动的图像分割方法, 如阈值法、边缘检测、区域生长、分裂合并等, 虽然简单快捷, 但不够鲁棒, 在弱边界点处容易泄露, 针对性也较强。近年来, 人们提出了基于能量最小化的图像分割框架, 该框架能够将图像目标形状等上层知识和灰度、梯度、纹理、光流等底层图像特征相融合, 以便更好地分割感兴趣目标, 其基本特征是通过建立数学模型构造一个能量函数, 将分割问题转换成数学寻优问题, 然后运用优化技术最小化该能量函数。

根据能量函数的连续性和寻优过程的不同, 基于能量最小化框架的方法可以划分为两大类<sup>[1]</sup>: a) 优化一个定义在连续轮廓(或曲面) $R^{\infty}$ 上的泛函; b) 优化一个定义在离散变量集 $Z^n$ 上的开销函数。第一类方法采用变分法、梯度下降法等优化技术对 $R^{\infty}$ 内的连续泛函进行优化, 该类方法主要包括蛇模型<sup>[2]</sup>、活动轮廓模型<sup>[3,4]</sup>及水平集方法<sup>[5]</sup>等; 第二类方法直接将问题转换为有限维整数空间 $Z^n$ 的组合优化, 进而采用动态

规划、最大流/最小割算法等对其优化, 该类方法主要包括基于路径的方法<sup>[6]</sup>及图割方法<sup>[7,8]</sup>等。

水平集方法采用梯度下降法最小化能量函数。梯度下降法通常仅能保证能量函数的局部最优, 并且依赖于近似的数值计算模式(如有限差分、有限元), 需要对数值计算进行很好的设计以保证解的鲁棒性和收敛性; 图割方法通过提供代价函数(cost function), 将区域、边界及一些拓扑限制很自然地融入到代价函数中, 能够实现能量的全局最优。

本文将水平集方法和图割方法相结合, 提出一种基于图割优化的能量最小化模型, 该模型能够克服水平集能量函数中梯度下降法的不足, 不仅可以找到全局最小(不仅仅是局部最小), 而且采用图割技术的动态标号还可以明显提高算法的运行速度和分割精度。

## 1 变分水平集及 C-V 模型

变分水平集图像处理方法是变分法和水平集技术的结合, 它是基于主动轮廓模型的一类偏微分方程, 具有模型连续、主动性好、求解质量高以及数值方案灵活多样等优点, 目前在图

收稿日期: 2012-04-08; 修回日期: 2012-05-18      基金项目: 江西省教育厅科技项目(GJJ11465)

作者简介: 兰红(1969-), 女, 辽宁鞍山人, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为图像处理、模式识别(lanhong69@163.com); 柳显涛(1988-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为图像处理。

像处理领域得到广泛应用。Chan-Vese (C-V) 模型<sup>[9,10]</sup> 是变分水平集的经典模型之一,它是利用变分水平集求解简化的 Mumford-Shah (M-S) 模型的图像分割方法。下面首先介绍 M-S 模型。

设  $u(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} (N = 2, 3)$  为图像域上的可微函数,  $\Omega$  是有界开集,  $u_0(x, y)$  为原图像, 不失一般性地, 假设  $0 \leq u_0(x, y) \leq 1, (x, y) \in \Omega$ , 寻找  $(u, C)$ , 使下面的能量泛函最小:

$$F^{ms}(u, C) = \iint_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy + \beta \int_C d\sigma \quad (1)$$

其中:  $\alpha, \beta$  是非负常数;  $\int_C d\sigma$  是曲线轮廓  $C$  的长度。式中第一项为保真项, 控制分割后图像的相似性; 第二项为正则项, 保证分割图像的光滑性; 第三项为长度项, 控制边缘的分数维粗糙度。M-S 模型采用 Hausdauff 测度控制图像边缘的跳跃, 在数值逼近和数值求解中成为棘手问题。对此, Chan 和 Vese 提出了基于水平集的 C-V 模型简化求解 M-S 模型, C-V 模型利用分段常数去逼近图像的各个部分, 通过变分法引入水平集建立方程, 采用差分方法进行数值计算。C-V 模型的能量泛函如下:

$$F^{cv}(C, c_1, c_2) = \lambda_1 \iint_{\Omega_{in}} |u(x, y) - c_1|^2 dx dy + \lambda_2 \iint_{\Omega_{out}} |u(x, y) - c_2|^2 dx dy + \mu |C| \quad (2)$$

其中:  $c_1$  和  $c_2$  分别为图像域上曲线轮廓  $C$  的  $\Omega_{in}$  和  $\Omega_{out}$  两个区域的灰度平均值,  $\mu, \lambda_1, \lambda_2$  为正的常数。数值演化时, 通常取  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \mu$  尽可能取较小的值,  $\mu$  越小分割效果越好<sup>[5,15]</sup>。因为  $\mu$  取值越小, 表明演化过程中可以生成更多细小的边缘从而实现更好的分割; 随着  $\mu$  值增大, 分割就会变得越来越粗糙,  $\mu$  是边缘分割粗糙度的度量参数。

水平集方法利用 Lipschitz 连续零水平集函数  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  表示演化曲线  $C$ , 因此  $C = \{(x, y) \in \Omega : \varphi(x, y) = 0\}$ , 定义  $\varphi$  在  $C$  的内部是正的, 在  $C$  的外部是负的。利用  $\varphi$  代替未知曲线  $C$ , 则新的能量泛函表示为

$$F(\varphi, c_1, c_2) = \lambda_1 \iint_{\varphi \geq 0} |u(x, y) - c_1|^2 dx dy + \lambda_2 \iint_{\varphi < 0} |u(x, y) - c_2|^2 dx dy + \mu |C|(\varphi = 0) \quad (3)$$

将 Heavside 函数  $H(x)$  和 Dirac 函数  $\delta(x)$  代入式(3), 则  $F(\varphi, c_1, c_2)$  可以表示为

$$F(\varphi, c_1, c_2) = \lambda_1 \iint_{\Omega} |u(x, y) - c_1|^2 H(\varphi(x, y)) dx dy + \lambda_2 \iint_{\Omega} |u(x, y) - c_2|^2 (1 - H(\varphi(x, y))) dx dy + \mu \iint_{\Omega} \delta(\varphi(x, y)) |\nabla \varphi(x, y)| dx dy \quad (4)$$

利用梯度下降法分别求解  $c_1$  和  $c_2$ , 能量函数  $F$  通过  $c_1, c_2$  迭代更新求得最小化值:

$$c_1(\varphi) = \frac{\iint_{\Omega} u(x, y) H(\varphi(x, y)) dx dy}{\iint_{\Omega} H(\varphi(x, y)) dx dy} \quad (5)$$

$$c_2(\varphi) = \frac{\iint_{\Omega} u(x, y) (1 - H(\varphi(x, y))) dx dy}{\iint_{\Omega} (1 - H(\varphi(x, y))) dx dy} \quad (6)$$

最终轮廓曲线通过分段平滑函数得到近似求解:

$$u(x, y) = c_1 H(\varphi(x, y)) + c_2 (1 - H(\varphi(x, y))) \quad (7)$$

## 2 图和图割

图  $G = (V, E)$  是指由顶点集合  $V$  和连接两个顶点之间的边集  $E$  组成的用以描述事物之间相互关系的一种拓扑图形。图割就是指将图中顶点集合  $V$  分成两个不相交的集合  $S$  和  $T$ , 使得  $s \in S, t \in T$ , 也称为  $S-T$  割。

运用图割方法<sup>[5]</sup> 进行图像处理, 首先需要将图像映射为一个包含源点  $S$  和汇点  $T$  的双终端图, 图中顶点集合为图像的像素集合, 图的边集为像素之间的相邻关系, 边的权值通常取

像素之间如灰度、颜色等特征信息的差异值或相似值。在双终端图中, 可以将  $S-T$  割表示为一个映射  $f, f$  为一个顶点集合  $V - \{S, T\}$  到  $\{0, 1\}$  的映射, 当  $f(v) = 0$  则  $v \in S, f(v) = 1$  则  $v \in T$ 。图 1 展示了由前景  $O$  和背景  $B$  组成的二值图像对应的转换图  $G$  以及  $S-T$  割。

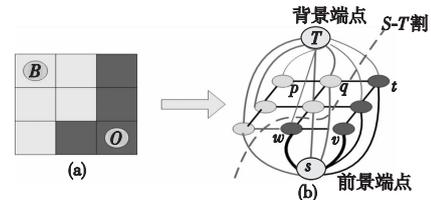


图 1 图像到图的转换及  $S-T$  割

一个  $S-T$  割的代价 (cost) 为从集合  $S$  到集合  $T$  的每条边的代价之和<sup>[11]</sup>, 即

$$C(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T, (u, v) \in E} C(u, v) \quad (8)$$

所谓最小割问题即是找到包含最小代价的割  $C(S, T)$ , 根据 Ford-Fulkerson 定理<sup>[12]</sup>, 最小割问题可以转换为求从源点  $S$  到汇点  $T$  的最大流问题来解决。

基于图割的图像分割方法可以获得鲁棒、高效的全局最优解, 因而本文将图割算法引入水平集, 构建一个新的离散能量最小化模型, 以此解决梯度下降法容易陷入局部极小的不足。

## 3 基于图割优化的能量最小化模型

利用图割方法优化求解水平集能量函数, 关键要解决两个问题: a) 如何将水平集泛函离散化; b) 证明离散化的水平集泛函是规则函数, 即满足图割方法最小化的条件。然后利用图割方法求解最小化能量, 最终生成目标区域的轮廓曲线。

### 3.1 水平集泛函的离散化表示

在式(4)的水平集能量泛函中, 前两项为图像区域信息, 第三项为轮廓曲线  $C$  的长度。分别对这三项进行离散化处理。

#### 3.1.1 区域项的离散化

设图像区域内的每一个像素  $p = (x, y) \in \Omega$ , 定义二值变量  $x_p$  的取值如下:

$$x_p = \begin{cases} 1 & \varphi(p) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

代入式(4), 则其前两项可离散化表示为

$$F(c_1, c_2, \varphi) = \lambda_1 \sum_p |u(x, y) - c_1|^2 x_p + \lambda_2 \sum_p |u(x, y) - c_2|^2 (1 - x_p) + \mu \iint_{\Omega} \delta(\varphi(x, y)) |\nabla \varphi(x, y)| dx dy \quad (10)$$

其中:  $c_1, c_2$  的离散化格式为

$$c_1 = \frac{\sum_p u(x, y) x_p}{\sum_p x_p} \quad (11)$$

$$c_2 = \frac{\sum_p u(x, y) (1 - x_p)}{\sum_p (1 - x_p)} \quad (12)$$

#### 3.1.2 长度项的离散化

##### 1) Cauchy Crofton 方程

微分几何中通常采用 Cauchy Crofton 方程求解曲线轮廓长度的近似值<sup>[13]</sup>。Cauchy Crofton 方程的定义为

$$\int_L n_L dL = 2 \|C\|_E \quad (13)$$

其中:  $\|C\|_E$  为轮廓曲线  $C$  的欧氏距离长度;  $n_L$  是 Cauchy Crofton 方程在  $0 \sim 2\pi$  各个方向的直线  $L$  与轮廓线  $C$  相交的直线集合的测度, 其和等于轮廓曲线长度的 2 倍。用坐标系表

示直线集合,则平面上的直线  $L$ ,由从  $L$  到坐标原点  $O$  的距离  $p \geq 0$ ,以及从原点出发垂直于  $L$  的半直线与  $x$  轴的夹角  $\theta(0 \leq \theta < 2\pi)$  所决定,因此可以用下面的集合代替平面上所有直线的集合  $\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in R^2; p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ,于是有

$$dL = dpd\theta \tag{14}$$

代入式(13),得到与  $C$  相交的直线集合的测度为

$$\iint_{L \cap C} dL = \iint n_L(p, \theta) dpd\theta = 2 \|C\|_E \tag{15}$$

以边的权值  $w_k$  作为直线集合的测度,则轮廓曲线长度可表示为

$$\|C\|_E = \frac{1}{2} \sum_k n_k \frac{\delta^2 \Delta \theta_k}{|e_k|} = \sum_k n_k w_k, w_k = \frac{\delta^2 \Delta \theta_k}{|e_k|} \tag{16}$$

2) 轮廓曲线离散化的近似表示

利用上述关于曲线离散化近似解的数学方程对水平集泛函的第三项长度项进行离散化转换,首先计算  $w_k$ :

a) 根据像素关系构建直线网格图。如图 2 所示,设图像中每个像素对应图中的一个节点,像素之间的相邻关系构成边,根据 Cauchy Crofton 方程,曲线轮廓  $C$  的长度近似等于与它交叉的边的权值和。

b) 定义每个像素对应节点的 8 邻域系统。如图 3 所示,设  $\Delta p$  取单位值,  $\delta = 1$ ,对于节点  $p$  的 8 个邻域节点,边  $e_1 \sim e_8$  的长度分别定义为:  $|e_1| = |e_3| = |e_5| = |e_7| = 1, |e_2| = |e_4| = |e_6| = |e_8| = \sqrt{2}$ 。由式(16)可知,节点到其邻域节点的权值(即代价值)  $w_1 \sim w_8$  分别为

$$w_1 = w_3 = w_5 = w_7 = \frac{\pi}{8}, w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

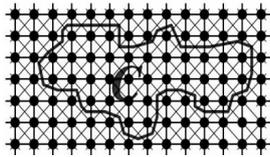


图2 曲线C的网格图

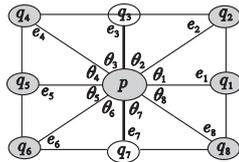


图3 8邻域系统

c) 计算  $n_k$ 。引进一个检测函数  $d(p, q)$  用于检测两个像素  $p$  和  $q$  之间的连线是否和轮廓曲线相交。由式(9)知,如果连线与轮廓线相交,当且仅当  $x_p$  和  $x_q$  有不同的标号,检测函数可以表示成如下格式:

$$d(p, q) = x_p(1 - x_q) + x_q(1 - x_p) \tag{17}$$

d) 生成离散化轮廓曲线式。代入式(16),轮廓线长度可以表示为

$$\|C\|_E = \sum_{p, q \in \mathcal{E}_k} w_k (x_p(1 - x_q) + x_q(1 - x_p)) \tag{18}$$

至此,基于图割的离散化能量最小化模型建成,其表达式为

$$F(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 \sum_p |u(x, y) - c_1|^2 x_p + \lambda_2 \sum_p |u(x, y) - c_2|^2 (1 - x_p) + \mu \sum_{p, q \in \mathcal{E}_k} w_k (x_p(1 - x_q) + x_q(1 - x_p)) \tag{19}$$

3.2 图表表达式及证明

要利用图割方法求解水平集最小能量泛函,还需证明式(19)是可以图表示的。关于图割方法中什么样的函数可以用图表示, Kolmogorov 和 Zabih<sup>[14]</sup> 进行了深入研究,并给出了图割方法中关于二值能量函数的表达式及能量函数用图表示需满足的条件。具体定义如下:

设  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \{0, 1\}$  是一个二值变量集合,则具

有  $n$  个变量的二值函数(称为  $F^2$  类函数)的能量函数表达式为

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_i E^{i,j}(x_i) + \sum_{i < j} E^{i,j}(x_i, x_j) \tag{20}$$

函数  $E$  可以用图表示当且仅当它是一个正规函数,即  $E^{i,j}$  的每一项满足以下不等式:

$$E^{i,j}(0, 0) + E^{i,j}(1, 1) \leq E^{i,j}(0, 1) + E^{i,j}(1, 0) \tag{21}$$

现在证明式(19)的能量函数是  $F^2$  类函数,是可以图表示的。对应式(20),式(19)的能量函数可以改写为如下  $F^2$  类函数形式:

$$E^p(x_p) = \lambda_1 |u(x, y) - c_1|^2 x_p + \lambda_2 |u(x, y) - c_2|^2 (1 - x_p) \tag{22}$$

$$E^{p,q}(x_p, x_q) = (x_p(1 - x_q) + x_q(1 - x_p)) w_{pq} = (x_p + x_q - 2x_p x_q) w_{pq} \tag{23}$$

显然式(22) (23)符合式(20)中  $F^2$  类函数的定义,现在验证其满足式(21)的正规函数条件。

证明 由式(23)可知:

a)  $E^{p,q}(0, 0) = E^{p,q}(1, 1) = 0$  ;

b) 因为  $w_k$  总是正的,有

$$E^{p,q}(0, 1) \geq 0 \text{ 和 } E^{p,q}(1, 0) \geq 0$$

所以  $E^{p,q}(0, 0) + E^{p,q}(1, 1) \leq E^{p,q}(0, 1) + E^{p,q}(1, 0)$

式(19)满足式(21)的正规函数条件,该函数是可以图表示的。

至此,完成了基于图割方法的水平集泛函离散化表示,形成了以式(19)为数值方程的新的能量最小化模型。该模型可根据像素标号和权值求解最小化能量。

3.3 算法实现步骤

本文算法的核心是利用图割方法对水平集能量泛函进行优化,形成新的最小化能量模型。算法的实现从水平集初始轮廓定义开始,之后建立并调用式(19)的能量最小化模型,再利用图割方法,通过遍历图中的每个节点及其邻域节点的代价值,求解最小化能量。

模型的建立需首先将图像映射为图,利用像素标号及其邻域像素间关系构建图的顶点和边,依据像素属性确定边权值,生成离散化最小能量函数  $F$ ,求解  $F$  并将其作用于轮廓曲线,依据新的轮廓曲线与图中边的交叉情况重新确定每个节点的像素标号值,再根据式(11)(12)修改  $c_1$  和  $c_2$ ,重新计算最小能量函数,循环迭代直至满足能量函数的收敛条件,得到目标轮廓。算法的具体流程如图 4 所示。

4 实验验证与效果分析

算法应用于普通图像、临床 MRI 肝脏图像和牙菌斑口腔图像,并和 C-V 模型的分割效果进行对比。本文以三幅图像为例,说明本文建立的最小化能量模型的有效性,算法参数选取依据文献[9]并结合医学图像特征选择较小的  $\mu$  值,分别为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \mu = 0.2$ 。运行效果如图 5 ~ 7 所示。其中(a)为原图像;(b)为初始轮廓,本文采用用户自定义方法设定初始轮廓为矩形;(c) (d)和(e) (f)分别为 C-V 模型和本文模型的迭代和分割效果图。从图中可以看出,本文算法对初始轮廓的敏感性、弱边界的识别以及运行速度方面都具有良好的鲁棒性。

图 5 是一个简单的灰度图像,由于初始轮廓的设置导致

C-V 模型对于底部的边缘识别出现了误差,说明 C-V 模型对初始轮廓的位置还是具有一定的敏感性。本文算法较好地解决了这个问题。

图 6 和 7 的数据来源于临床研究的科研数据库。其中图 6 为 MR 腹部肝脏图像的分割,图 7 为牙菌斑口腔图像的分割。

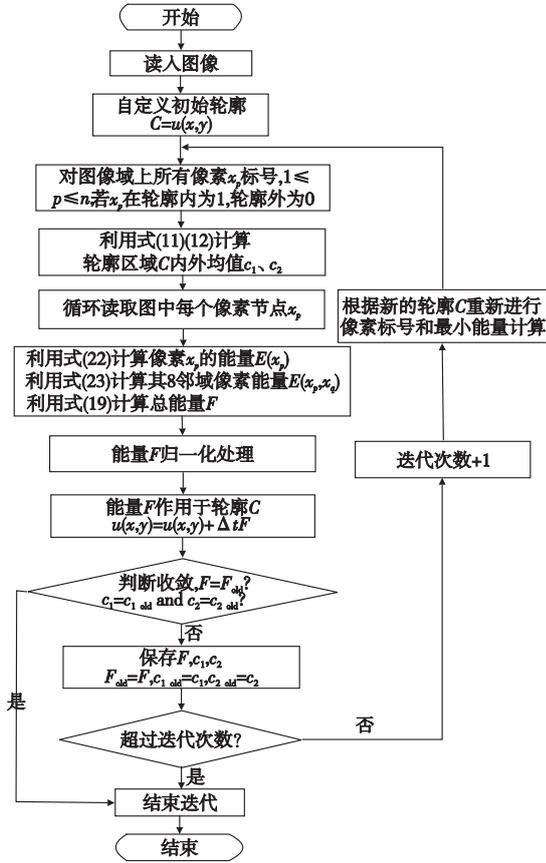


图4 算法流程

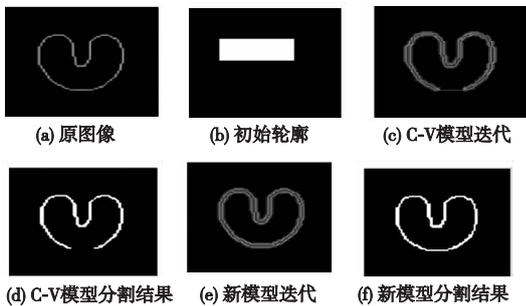


图5 两种算法的普通图像分割效果

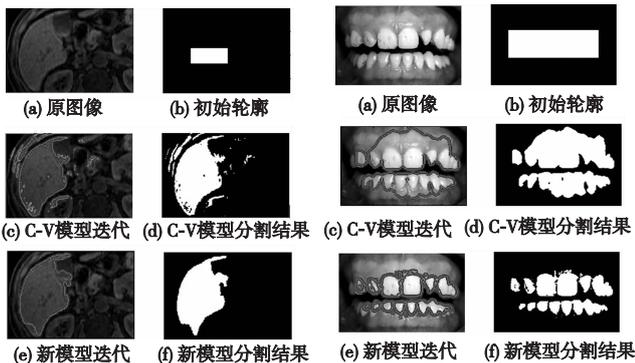


图6 两种算法的肝脏图像分割效果

图7 两种算法的牙菌斑口腔图像分割效果

从图 6、7 可以看出, C-V 模型对于模糊边界的分割还存在

一定的不足,对于像素非常接近的目标和背景边界很难实现目标区域的有效划分,本文提出的能量最小化模型继承了图割优化技术的稳定性和对初始轮廓的不敏感性,在运行速度和分割精度上都有明显改善。本文算法应用于多个临床病例图片,对有病灶的肝脏图像以及牙菌斑图像分割效果较其他算法明显。实验证实本文提出的能量最小化模型算法能有效地提高上述两类医学图像的分割精度。

### 5 结束语

本文介绍了一个基于图割优化的能量最小化模型。该模型将水平集和图割方法相结合,将图像分割转换为图的最小割,将 C-V 模型的能量函数离散化,从而形成离散化最小能量模型。基于新模型的图像分割利用图割代替梯度下降法实现能量函数最小化。实验结果证明,新算法具有更高的稳定性和鲁棒性,结果完全独立于初始轮廓,与传统的使用梯度下降的方法相比,速度上也有很大提高。本文进一步的研究将集中在图割优化解决多项分割问题等方面。

### 参考文献:

- [1] BOYKOV Y, FUNKA-LEA G. Graph cuts and efficient N-D image segmentation[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 70(2): 109-131.
- [2] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOUS D. Snakes: active contour models[J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321-331.
- [3] COHEN L D. On active contour models and balloons[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Understanding, 1991, 53(2): 211-218.
- [4] CASELLES V, KIMMEL R, SAPIRO G. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61-79.
- [5] OSHER S J, FEDKIW R P. Level set methods and dynamic implicit surfaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [6] AMINI A A, WEYMOUTH T E, JAIN R G. Using dynamic programming for solving variational problems in vision[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(9): 855-867.
- [7] BOYKOV Y, KOLMOGOROV V. An experimental comparison of min-cut / max-flow algorithms for energy minimization in vision[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(9): 1124-1137.
- [8] 徐秋平. 基于图割理论的目标提取方法研究[D]. 西安: 陕西师范大学, 2009.
- [9] CHAN T, VESE L. Active contours without edges[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.
- [10] 王芳梅, 范虹, 王凤妮. 水平集在图像分割中的应用研究[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(4): 1207-1210.
- [11] BOYKOV Y, CREMERS D, KOLOMOGOROV V. Tutorial: graph cuts versus level sets[C]//Proc of European Conference on Computer Vision. 2006.
- [12] FORD L, FULKERSON D. Flows in networks[M]. [S. l.]: Princeton University Press, 1962.
- [13] MANFREDO P, CARMO D O. Differential geometry of curves and surfaces[M]. [S. l.]: Prentice-Hall, 1976.
- [14] KOLMOGOROV V, ZABIH R. What energy functions can be minimized via graph cuts? [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 147-159.
- [15] KOEPLER G, LOPEZ C, MOREL J M. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(1): 282-299.