

基于参数化流形学习的压缩传感重构方法

宫磊¹, 赵方¹, 陆阳²

(1. 北京林业大学 信息学院, 北京 100083; 2. 燕山大学 信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 压缩传感是一种新的信息获取理论,它突破了传统的采样理论,将数据采集和压缩合二为一,再利用重构算法将原始数据恢复。为了能够得到更好的压缩传感重构效果,把流形学习的思想和方法与压缩传感相结合,提出了一种基于参数化流形学习的压缩传感重构方法。实验结果表明,提出的方法对自然图像进行重构取得了很好的效果,充分验证了基于参数化流形学习的压缩传感重构方法的有效性。

关键词: 压缩传感; 重构算法; 流形学习; 聚类; 参数化

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)11-4159-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.11.041

Compressive sensing reconstruction method based on parametric manifold learning

GONG Lei¹, ZHAO Fang¹, LU Yang²

(1. School of Informatics, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China; 2. College of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: Compressive sensing is a new theory of information acquisition, which breaks through the traditional sampling theory. It combines data acquisition with data compression, and then recovers the original signal by reconstruction algorithms. In order to get the better effect of compressive sensing construction, this paper mainly combined the ideas and methods of manifold learning with compressive sensing, and then proposed a compressive sensing reconstruction method based on parametric manifold learning. The experimental results show that reconstruction of natural images has very good results with the proposed method. Therefore, it fully verifies the effectiveness of compressive sensing reconstruction method based on parametric manifold learning.

Key words: compressive sensing; reconstruction algorithms; manifold learning; cluster; parametric

0 引言

在信号处理领域,压缩传感(compressive sensing)理论吸引了一些相关研究人员的关注。该理论是在对信号获取的同时,同步对数据进行适当的压缩处理,而传统的信号获取和处理过程主要是包括采样、压缩、传输和解压缩这四个方面。其采样过程也必然要受到奈奎斯特采样频率的限制,采样的数据量大,先采样再压缩浪费了大量传感元、存储时间以及存储空间。并且压缩传感理论采用非自适应性线性投影来获取原始信号的信息,然后通过数值优化问题来重构原始信号,这使得压缩采样的数据量远远小于传统采样理论所需要的数据量。这些是压缩传感在信号处理领域中有着突出的优点以及广阔的应用前景的根本原因^[1-3]。

近年来流形学习的理论因其巨大的应用价值越来越受到了广泛的重视,如何把流形学习的理论和方法应用到压缩传感中,提高压缩传感的效率和质量,使信号和图像能够更好地进行压缩传感重构是一个重要的研究方向^[4-6]。

本文针对图像块具有的低维流形特性,在压缩传感中应用参数化流形学习的方法,提出了一种基于参数化流形学习的压缩传感重构算法。

1 图像块的流形模型

假设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间,假如对于 Hausdorff 拓扑空间 M 中的每一个点 x ,都会有一个开邻域 $U \subset M$ 存在,使其满足开邻域 U 和 d 维欧几里德空间 R^d 中的某一个开子集具有同胚的关系,那么此时就把 M 称为维数是 d 的拓扑流形,或简称为 d 的维流形^[7]。

假设数据是采样于一个低维流形上,该低维流形位于一个高维的欧几里德空间中,所谓的流形学习就是要从观测的高维数据中发现其潜在的低维流形结构,并构造出从高维空间嵌入到低维空间的一个非线性映射,从而实现数据可视化和维数约简的目的。

对于从一幅图像中抽取的宽度为 $\tau > 0$ 的图像块 $p_x(f)$,其中 $f \in L^2([0,1]^d)$, $x \in [0,1]^d$,可以表示成

$$p_x(f)(t) = f(x+t) \quad \forall t \in [-\tau/2, \tau/2]^d \quad (1)$$

其中, x 表示块 $p_x(f)$ 的中心; τ 表示对块大小的控制。

一个信号集合 $\Theta \subset L^2([0,1]^d)$ 包含了研究者关心的典型数据,与这个集合相关联的块流形可以表示成

$$M = \{p_x(g) \mid x \in [0,1]^d, g \in \Theta\} \quad (2)$$

收稿日期: 2012-04-14; 修回日期: 2012-05-27

作者简介: 宫磊(1987-),女,黑龙江绥化人,硕士研究生,主要研究方向为软件工程、人工智能等(gonglei8704@163.com); 赵方(1958-),男,副教授,主要研究方向为软件工程、数据库等; 陆阳(1986-),男,硕士研究生,主要研究方向为压缩传感、图像处理。

为了更好地对图像进行重构,在实验中需要对训练和测试的图像进行分块处理,得到每一个小块,再对分得的图像块进行随机投影重构。对于图像本身来说,已经得到证明其具有非常复杂的非线性流形结构,但是当把图像分割成适当的小块后,因为此时每一个分割后的图像块一般都只具有一些非常简单的几何结构(如低秩结构,如轮廓段和结构纹理等),所以可以把它们嵌入到潜在的低维流形中,也就是说,图像块本身具有很好的低维流形特性^[8]。可以把 $p_x(f)$ 看做是 D 维欧几里德空间中的点,把从自然图像库训练的图像块所构成的拓扑空间记作 M , 设 M 的维数为 d , 则 M 就是一个 d 维的流形, 图像块 $p_x(f)$ 是属于流形 M 的。

实验中正是运用图像块的这种低维流形特性,首先对自然图像库进行训练得到流形 M , 再对 M 进行随机投影处理,得到投影后的流形空间 M_1 , 则 M 和 M_1 是同构的。对于测试的图像进行分块处理得到测试的图像块 $p_x(f)$, 再对 $p_x(f)$ 进行随机投影得到观测值 $p_x(g)$, 则 $p_x(f)$ 和 $p_x(g)$ 也具有同构的关系。如果 $p_x(f)$ 属于 M , 则可以得到 $p_x(g)$ 是属于 M_1 的。利用 M 和 M_1 以及 $p_x(f)$ 和 $p_x(g)$ 具有相同的同构关系, 求出 $p_x(g)$ 在流形 M_1 上的投影, 利用相应 M 上的投影值就可以重建 $p_x(g)$, 进而对测试的图像进行重构。

2 图像块聚类

在参数化流形学习的过程中,图像块的聚类是非常关键的一步,聚类效果的好坏最终影响图像重构的效果。聚类是将物理或抽象对象的集合分成由类似的对象组成的多个类的过程,它是一种常见的数据分析工具。图像块本身具有低维流形特性,实验也表明一般的线性聚类算法(如 K 均值聚类算法)都难以达到理想的聚类效果。在最近这几年,谱聚类的方法得到了更为广泛的应用,因为谱聚类方法与传统的聚类方法相比较,具有能够在任意形状的样本集空间上聚类且收敛于全局最优解的优点。

谱聚类方法在进行聚类时,首先是以所要聚类的对象集为顶点集来构造一个赋权图,然后通过分析比较一个与这个图相关联的矩阵的特征值和特征向量从而得到聚类的效果。因此谱聚类方法形式简单,同时可以处理非常复杂的数据类型^[9]。但由于实验中训练的图像块样本的数目巨大,使用谱聚类算法会产生内存空间不足的问题。例如,要存储 10^6 个图像块样本,经计算大约需要 8 TB 的内存,这大大超出计算机的内存空间。所以在实验中采用的方法是将相似度矩阵稀疏化处理来减少内存的使用。

实验中采取 t 最近邻的方法,当且仅当 i 是 j 的 t 最近邻时保留 A_{ij} 的值。一般情况下 t 是一个很小的整数。可以清楚地看到,当图像块样本大小为 n 时,谱聚类存储相似度矩阵占用的内存为 $O(n^2)$, 采用相似度矩阵稀疏化之后的谱聚类算法存储相似度矩阵占用的内存为 $O(nt)$, 大大减少了内存的使用。改进后的谱聚类算法的主要步骤如下:

a) 计算相似度矩阵 $A \in R^{n \times n}$, 其中 $A_{ii} = 0$, 当 $i \neq j$ 时。

$$A_{ij} = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|_2^2}{\sigma^2}\right) \quad (3)$$

b) 将相似度矩阵进行稀疏化处理,得到稀疏矩阵 A 。

c) 构建拉普拉斯特征矩阵 $L = D^{-1/2}AD^{-1/2}$, 其中 D 为对角矩阵, 可以把 D 定义为

$$D_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad (4)$$

d) 找到 L 最大的 k 个特征值 ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_c$) 和对应的特征向量 (f_1, \dots, f_c) , 构造矩阵 $F = (f_1, \dots, f_c) \in R^{n \times c}$ 。

e) 对矩阵 F 进行单位化处理, 即有

$$\bar{F}_{ij} = F_{ij} / \left(\sum_{j=1}^m F_{ij}^2\right)^{1/2} \quad (5)$$

f) 将 \bar{F} 中的每一行视为 R^k 空间中的一个点, 使用 k 均值算法, 划分为 m 个簇, 如果 \bar{F} 矩阵中的第 i 行属于第 j 个簇, 则 x_i 也属于第 j 个簇。

在实验中用相似度矩阵稀疏化的谱聚类算法对训练的图像块进行聚类, 实验把图像块聚成 100 类, 其中的部分聚类结果如图 1 所示, 从聚类结果可以看出, 此方法取得了比较好的效果。

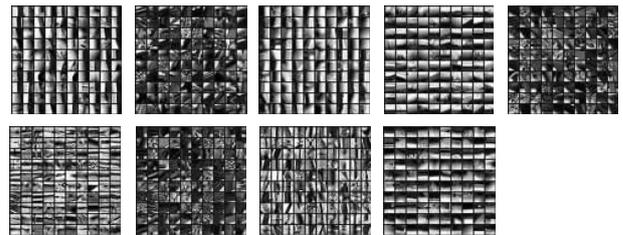


图1 图像块聚类结果

3 参数化流形学习压缩传感重构

3.1 参数化流形学习

对整幅图像投影计算会产生巨大的计算量, 因此需要研究针对给定图像中的每个小块的算法。一般情况下, 投影计算很容易受到噪声的影响; 另外, 随着抽样率的减小, 图像重构质量会受到巨大的影响。针对这些问题, 本文研究出了针对图像块流形模型参数化的方法, 采用计算有效的算法代替投影算子, 使用如 LLE 和 Isomap 等算法来建立流形, 但有很多的问题和注意事项, 使这些算法不能很好的使用。a) 当抽样数目很大时这些算法在建立流形时会产生非常大的计算复杂度; b) 对于寻找训练数据库之外的图像块参数的样本外扩展问题不能得到很好解决。本文采用一种更加容易的参数化流形学习方法, 对于块流形抽样率很高时也能够有效计算。

非线性流形 M 可用 k 个线性子流形(线性子空间) M_1, M_2, \dots, M_k 逼近。一般情况下, 这种假设都是合理的, 只要线性子流形的数量足够多, 则它们可以无限逼近 M 。流形 M 可以通过它的偏移量 μ_i 和标准正交基向量 V_i 来表示。流形上的每一块被它子空间上的坐标参数化, 如一个图像块 p 的参数化可以表示成:

$$\psi(p) = (\hat{i}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{i, \alpha} \|p - \mu_i - V_i \alpha\|_2 \quad (6)$$

通过两步在训练集中学习这种参数化流形。对于所训练图像块的集合 $D = \{x_i\}$, 把所有的图像块聚成 k 类(实验中 k 取 100), 每个聚类中心都与子空间的偏移量 μ_i 相关联。在每次聚类时, 先计算出每个图像块的本征维数, 然后使用 PCA 变换建立最优正交基。对于每一个测试的图像块, 流形上它与它最近的图像块通过两步建立: a) 通过计算它与所有聚类中心的距离, 得到与它距离最近的聚类中心; b) 一旦这个最近聚类中心被建立, 就可以把图像块投影到与最近的聚类中心相对应的那个聚类子空间上^[10]。例如, 对于一个测试的图像块 p , 通过

式(7)计算最近的聚类中心:

$$\begin{cases} \hat{i} = \arg \min_i \| p - u_i \| \\ \hat{\alpha} = V_i^T (p - u_i) \end{cases} \quad (7)$$

投影算子通过式(8)进行建立:

$$Proj_M(p) = u_i + V_i \hat{\alpha} \quad (8)$$

其中, $\hat{\alpha}$ 由式(7)计算得到。通过这种参数化流形学习的方法就可以求出每个图像块在其所在的流形空间上的投影。

3.2 重构算法实现

基于参数化流形学习的压缩传感重构算法实现步骤如下:

a) 训练非线性流形 M , 然后用相似度矩阵稀疏化的谱聚类方法对 M 进行聚类, 把 M 分成 J 个子流形(本实验中取 $J = 100$), 即有 $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_J$ 。

b) 对非线性流形 M 进行随机投影, 得到投影后的非线性流形 M_p , 即有 $M_p = M_{p1} \cup M_{p2} \cup \dots \cup M_{pJ}$ 。

c) 对要测试的图像 X 进行分块处理, 然后进行投影, 得到每一块 x 的观测值 x_p , 根据参数化流形学习的方法, 采用式(7)(8)把 x_p 向非线性流形 M_p 上进行投影, 得到每个观测值在 M_p 上的投影值 x_p^1 。

d) 将 x_p^1 向集合 $C = \{x_p^1: \| y - \Phi x_p^1 \|_2^2 \leq \varepsilon_1\}$ 投影得到 $x_p^2 = x_p^1 + \Phi^T (y - \Phi x_p^1)$

e) 把 x_p^2 重新组合成新的图像 X_1 , 再对 X_1 进行分块处理, 把它分成具有重叠的图像块, 得到每一块 x_p^3 , 用参数化流形学习的方法把 x_p^3 向非线性流形 M 上进行投影, 得到投影值 x_p^4 。

f) 把 x_p^4 重新组合成新的图像 X_2 , 再对 X_2 进行分块处理得到 x_p^5 , 令 $x_p^5 \rightarrow x_p^1$, 转到 d) 迭代循环。实验中设置循环次数为 120 次, 最后得到重构的图像 $\bar{X} = X_2$ 。

4 实验结果

为了比较算法的性能, 本章选择尺寸为 512×512 的标准二维图像 Lena 和尺寸为 256×256 的标准二维图像 house 进行实验。

图 2 是采用基于参数化流形学习的压缩传感重构方法(以下简称参数化方法)和压缩传感重构算法中效果比较好的 SLO 方法^[11] 分别对 Lena 图像进行重构的对比结果。实验中为了便于观察, 只是显示了 Lena 图像局部区域的放大效果。比较图 2(b)(c) 可以清楚地看到, 在抽样率为 0.2 时, 采用 SLO 方法重构的图像具有明显的块效应, 重构的图像也比较模糊; 采用参数化方法重构的图像的块效应得到明显的改善, 同时也比采用 SLO 方法重构的图像清晰。比较图 2(d)(e), 在抽样率为 0.3 时, 随着抽样率的增加, 重构图像变得清晰, 应用 SLO 方法重构的图像依然具有块效应, 采用参数化算法重构图像的块效应得到改善。在图 2(g) 中, 当抽样率为 0.4 时, 采用参数化方法基本上消除了分块重构图像的块效应, 同时重构的图像也变得非常清晰。

图 3 是对 house 图像采用参数化方法与 SLO 方法重构效果的比较。比较图 3(b) 和 (c) 可以明显地看到, 采用 SLO 方法重构的 house 图像的边缘区域非常模糊, 具有明显的锯齿效应; 而采用参数化方法重构的图像比较清晰, 锯齿效应得到很大的改善, 特别是对于屋顶的右侧部分边缘区域基本消除了锯齿效应。比较图 3(d)(e), 在抽样率为 0.3 时也具有相似的效

果。从图 3(g) 中可以看到, 当抽样率为 0.4 时, 采用参数化方法基本上消除了重构图像边缘区域的锯齿效应, 重构的图像变得非常清晰。



图2 Lena图像实验结果



图3 House图像实验结果

表 1 是实验中对 Lena 和 house 图像分别采用参数化方法和 SLO 方法进行重构, 在不同抽样率下的重构图像的 PSNR。从表 1 中的数据可以清楚地看到, 采用参数化方法重构的图像比采用 SLO 方法重构的图像的 PSNR 值提高了很多。以 Lena 图像为例, 在抽样率为 0.2 时, PSNR 提高了 2 dB; 在抽样率为 0.3 时, PSNR 提高了 1.34 dB; 在抽样率为 0.4 时, PSNR 提高了 0.69 dB; 在抽样率为 0.5 时, PSNR 提高了 0.74 dB。对于尺寸为 256×256 的 house 图像, 在抽样率为 0.2 时, PSNR 提高了 2.49 dB; 在抽样率为 0.3 时, PSNR 提高了 1.83 dB; 在抽样率为 0.4 时, PSNR 提高了 1.13 dB; 在抽样率为 0.5 时, PSNR 提高了 0.84 dB。在各种情况下, 采用参数化方法与采用 SLO 方法相比, PSNR 值都得到了明显的提高, 从而充分验证了参数化算法的有效性。

表 1 两种重构方法 PSNR 的比较 /dB

图像	方法	抽样率			
		20%	30%	40%	50%
Lena	SLO	29.65	32.60	34.43	36.18
	参数化方法	31.65	33.94	35.12	36.92
house	SLO	29.77	32.73	34.66	36.90
	参数化方法	32.26	34.56	35.79	37.74

5 结束语

本文研究了图像块流形模型和图像块本身所具有的低维流形特性, 然后对训练的图像块进行聚类, 提出了图像块在流形上投影的新的计算方法, 即参数化流形学习方法; 并把参数化流形学习方法同压缩传感相结合, 提出了一(下转第 4179 页)

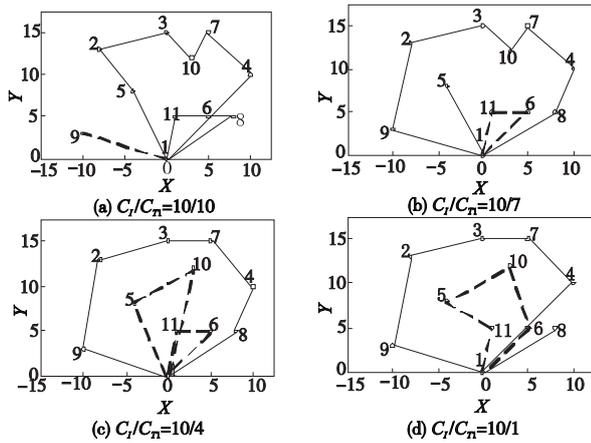


图3 最优路径

表 3 改进 MMAS 及本文算法结果比较

C_1/C_n 比	方案总费用		费用节省/%
	改进 MMAS	本文算法	
10/10	5211.2	4292.57	17.63
10/7	4877.84	3737.118	23.39
10/4	4544.48	3257.12	28.33
10/1	4211.12	2183.26	48.15

由表 2 和表 3 可得,在相同 C_1/C_n 比的情况下,将本文算法与仅仅用改进 MMAS 算法求解的结果相比,当 C_1/C_n 取 10/10、10/7、10/4、10/1 时,总费用分别节省了 17.63%、23.39%、28.33%、48.15%;也可以由图 4 得,随着 C_1/C_n 比值从 10/10 到 10/1 逐渐增大,本文算法节省的费用也逐渐上升。在实际运用中,根据不同公司、不同车间的 C_1/C_n 比,可以求得不同的配送方案,高频次小批量配送或大批量低频次配送,令配送的整体费用最小。综上,本文的算法对于解决循环配送问题是有效的,结果优于改进的 MMAS。

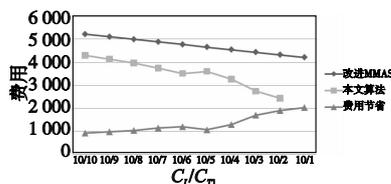


图4 C_1/C_n 比值对结果的影响

5 结束语

本文主要研究了车间物料循环配送规划问题,建立基于 bi-level 规划数学模型,并以基于 2-opt 改进的 MMAS 的双层迭代算法求解物料循环配送量、周期和路径,针对不同公司或不同车间的具体情况,以库存费用和运输费用的比值为因子,对算法结果进行分析。相比于 IMMAS,本算法引进了线旁库存,首创性地提出了确定配送周期的策略,结合下层车辆路径模型进行迭代求解,结果表明费用节省显著,显示了本算法的优越性,为实际物料配送等提供了实用价值。进一步地,可以针对更大规模的问题,结合供应链上下游,快速解出最优配送周期、配送量和最优配送路径。

参考文献:

- [1] PESCE L F, FRAZAO C D, CIVINSKAS J, et al. The next step for a lean production: milk-run(2000-01-3230)[R]. 2000.
- [2] CHUAH K H. Optimization and simulation of just-in-time supply pickup and delivery systems[D]. Lexington: University of Kentucky, 2004.
- [3] RUSDIANSYAH A, TSAO D B. An integrated model of the periodic delivery problems for vending-machine supply chains [J]. *Journal of Food Engineering*, 2005, 70(3):421-434.
- [4] 王旭,施朝春,葛显龙. 基于 Milk Run 模式的库存运输整合优化[J]. *计算机集成制造系统*, 2011, 17(4):852-857.
- [5] 王亮,孙绍荣,吴晓层. 最小化运输与库存费用的两级分销策略分析[J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 25(10):33-38.
- [6] CALVETE H I, GALE C, OLIVEROS M J. Bi-level model for production-distribution planning solved by using ant colony optimization [J]. *Computers and Operations Research*, 2011, 38(1):320-327.
- [7] LIU Shu-chu, LEE W. A heuristic method for the inventory routing problem with time windows[J]. *Expert Systems with Applications*, 2001, 38(10):13223-13231.
- [8] 李哲,夏立,庄浩俊,等. MMAS-EC 算法求解旅行商问题[J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47(9):41-47.
- [9] ZHANG Xiao-xia, TANG Li-xin. A new hybrid ant colony optimization algorithm for the vehicle routing problem [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2009, 30(9):848-855.

(上接第 4161 页)种基于参数化流形学习的压缩传感重构方法;最后通过实验实现了基于参数化流形学习的压缩传感重构方法。把提出的方法与已有的压缩传感重构方法进行了比较,充分验证了基于参数化流形学习的压缩传感重构方法的有效性。

参考文献:

- [1] WANG Yao, LIN Shu-nan. Error-resilient video coding using multiple description motion compensation [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology*, 2002, 12(6):438-452.
- [2] BARANIUK R. Compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4):118-121.
- [3] VAISHAMPAYAN V A. Design of multiple description scalar quantizers[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1993, 39(3):821-834.
- [4] MEKUZ N, BAUCKHAGE C, TSOTSOS J K. Subspace manifold learning with sample weights[J]. *Image and Vision Computing*, 2009, 27(1-2):793-801.
- [5] ZHANG Zhen-yue, ZHA Hong-yuan. Principal manifolds and nonli-

- near dimensionality reduction via tangent space alignment[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2004, 26(1):313-338.
- [6] WANG Jing, ZHANG Zhen-yue, ZHA Hong-yuan. Adaptive manifold learning[J]. *Neural Information Processing Systems*, 2005, 38(45):1473-1480.
- [7] 陈维桓. 微分流形初步[M]. 北京:高等教育出版社, 2001:2-9.
- [8] 练秋生,张红卫,陈书贞,等. 融合图像块低维流形特性与解析轮廓波稀疏性的压缩成像算法[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(1):207-212.
- [9] 赵凤. 半监督谱聚类特征向量选择算法[J]. *模式识别与人工智能*, 2011, 24(1):148-156.
- [10] NI J, TURAGA P. Example-driven manifold priors for image deconvolution[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2011, 20(11):3086-3096.
- [11] MOHIMANI G H, BABAIE-ZADEH M, JUTTEN C. Complex-valued sparse representation base on smoothed L0 norm[C]//Proc of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2008:3881-3884.