

基于互交替投影的块稀疏正交匹配追踪算法*

蒋留兵¹, 黄 韬^{1,2}, 许腾飞¹

(1. 桂林电子科技大学 信息与通信工程学院, 广西 桂林 541004; 2. 梧州学院, 广西 梧州 543002)

摘要: 针对块稀疏信号, 理论分析和实验验证均表明算法精确重构的充分条件与矩阵块相关性和子相关性有关。在此基础上, 提出了一种基于互交替投影的块稀疏正交匹配追踪算法 (mutual alternating projection-block orthogonal matching pursuit, MAP-BOMP)。该算法利用互交替投影方法不断构造新的测量矩阵和感知矩阵, 使得矩阵块相关性和子相关性都很小, 从而提高重构概率, 并给出明确的算法收敛条件, 降低了计算复杂度。通过与大多数已有块稀疏信号重构算法进行实验仿真对比, 该算法在重构效果和重构速度上均优于其他算法。

关键词: 信号处理; 压缩感知; 块稀疏信号; 感知矩阵; 重构算法

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)11-4121-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.11.030

New block orthogonal matching pursuit algorithm using mutual alternating projection method

JIANG Liu-bing¹, HUANG Tao^{1,2}, XU Teng-fei¹

(1. School of Information & Communication Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, China;

2. Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China)

Abstract: As to block sparse signals, both theoretical analysis and experimental verification show that sufficient condition for precise reconstruction is both block-coherence and sub-coherence of dictionary must be very small. This paper introduced a new block orthogonal matching pursuit algorithm using mutual alternating projection method (MAP-BOMP). By exploiting the mutual alternating projection, the algorithm proposed to design the new measurement dictionary and sensing dictionary constantly for reducing the block-coherence and sub-coherence. The algorithm also gave the specific convergence conditions to reduce the complexity. Simulation results demonstrate this algorithm can provide more significant improvement for the recovery performance and speed than other existing algorithm.

Key words: signal processing; compressed sensing (CS); block-sparse signal; sensing matrix; reconstruction algorithm

压缩感知 (CS)^[1,2] 是一种将信号采样和压缩同时进行的新方法。其核心思想是对稀疏信号以远低于奈奎斯特采样频率的速度进行全局观测而非局部观测, 然后用适当的重构算法以较少的测量值来精确重构原信号, 相当于某种程度上打破了采样定理, 其自身的巨大潜力引起了国内外广大学者的高度关注^[3]。

CS 理论刚刚出现不久, 国内外众多学者提出了很多经典的重构算法, 比较有代表性的包括基于凸优化思想的基匹配法 (basic pursuit, BP)^[4] 和正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) 算法^[5]。BP 算法重构效果较好, 但是计算复杂度较高, 限制了实际的使用; 而 OMP 算法由于其计算复杂度低、易于实现等优点, 得到了很好的应用。但是这些传统算法只考虑了信号是稀疏的这一特点, 没有考虑到稀疏信号内部结构特征, 在某些特殊应用场合下重构误差很大。文献[6]指出了实际问题经常出现的一种特殊稀疏信号——块稀疏信号 (block-sparse signal), 即信号中不为零的地方成块出现。Eldar^[6] 提出关于块稀疏信号的块相关性 (block-coherence) 和子相关性 (sub-coherence) 概念, 建立了基于块稀疏信号的压缩感知理论

框架, 将 BP 和 OMP 算法分别拓展到块稀疏信号中, 提出了混合 l_2/l_1 范数优化算法 (mixed l_2/l_1 norm optimization program, L-OPT) 和块稀疏正交匹配追踪算法 (block OMP, BOMP)。这些算法充分利用了信号块稀疏结构特性, 重构效果优于传统意义下的重构算法, 运行时间也大大降低。文献[7]提出了 S-BOMP 算法, 引入了感知矩阵的概念, 采用交替投影思想来构造感知矩阵, 使得感知阶段能够更加精确地选择出比较正确的支撑块, 效果明显好于 BOMP 算法。但是该算法基于已知测量矩阵多次反复求解最优化问题最终得到感知矩阵, 没有明确的迭代停止准则, 运行时间很长。

本文受到文献[8]中交替投影思想的启发, 提出了每次迭代同时更新测量矩阵和感知矩阵, 应用于标准的 BOMP 算法, 并给出了明确的迭代收敛条件, 减少不必要的复杂度, 高精度地重构出原信号。

1 块稀疏以及 BOMP 算法

块稀疏信号定义如下:

$$x = [x^T[1] \quad x^T[2] \quad \cdots \quad x^T[N]]^T \quad (1)$$

收稿日期: 2012-03-28; **修回日期:** 2012-05-02 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (61162007); 广西研究生教育创新计划资助项目 (2011105950810M11)

作者简介: 蒋留兵 (1973-), 男, 江苏泰兴人, 高级工程师, 硕士, 主要研究方向为智能信息处理 (jlbj@163.com); 黄韬 (1989-), 男, 河南信阳人, 硕士研究生, 主要研究方向为压缩感知; 许腾飞 (1987-), 男, 江苏徐州人, 硕士研究生, 主要研究方向为智能信息处理。

其中, $x^T[i] (i=1, \dots, N)$ 为 $p \times 1$ 维信号。如果 $x[i]$ 中有 k 个非零 l_2 范数, 那么信号 x 为 k 块稀疏信号。当 p 为 1 时, 块稀疏信号就是传统意义下的稀疏信号。实际应用场合中, 块稀疏信号的形式很多, 如波达方向估计 (direction-of-arrival)、多波段信号 (multi-band signal) 等。研究这些特殊块稀疏信号重构算法具有重要意义。

标准 BOMP 算法流程如下:

a) 初始化步骤。初始化残差 $r_0 = y$, 测量矩阵 Φ , 块稀疏度 K 。

b) 感知步骤。在第 k 步迭代的时候, 选择与残差 r_{k-1} 最匹配的块:

$$i_k = \arg \max_i \|\Phi^T[i] r_{k-1}\|_2 \quad (2)$$

c) 残差更新步骤。 $E_k = E_{k-1} \cup i_k$, 然后

$$r_k = (I_{kp} - \Phi_{E_k} \Phi_{E_k}^\dagger) y \quad (3)$$

d) 收敛条件。当 k 小于 K 时, 返回步骤 b), 否则停止迭代。

基于感知矩阵 Ψ 的 S-BOMP 算法, 就是在算法感知步骤中用式(4)代替式(2)选择最优块。

$$i_k = \arg \max_i \|\Psi^T[i] r_{k-1}\|_2 \quad (4)$$

其主要目的是降低测量矩阵 Φ 和感知矩阵 Ψ 之间的块相关性 $\tilde{\mu}_B$ 和子相关性 $\tilde{v}$, 从而提高选择最优块的正确率。

$$\tilde{\mu}_B = \max_{i,j \neq i} \frac{1}{p} \rho(\Psi^T[i] \Phi[j]) \quad (5)$$

$$\tilde{v} = \max_l \max_{i,j \neq i} |\Psi_i^T \Phi_j|, \Psi_i \in \Psi[l], \Phi_j \in \Phi[l] \quad (6)$$

p 为矩阵稀疏块大小, $\rho(\cdot)$ 代表矩阵的谱范数, 从定义中可以看出, $\tilde{\mu}_B$ 代表矩阵不同块之间最大相关性, 而 $\tilde{v}$ 代表矩阵同块内部各列之间最大相关性。理论证明和实验仿真均证明, 两者对于块稀疏信号重构算法性能分析都非常重要^[9]。

2 MAP-BOMP 算法

2.1 理论分析

定理 1 块稀疏信号精确重构的理想条件。假设 y 在测量矩阵 $\Phi \in M \times Np$ 上是 k 块稀疏的, 如果测量矩阵 Φ 和感知矩阵 Ψ 满足

$$\rho_c((\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}})^{-1} \Phi_{\text{opt}}^T \tilde{\Psi}_{\text{opt}}) < 1 \quad (7)$$

那么基于感知矩阵的 BOMP 算法能够在每一步迭代中选择最优的块^[9]。此处 $\rho_c(A) = \max_j \sum_i \rho(A[i, j])$ 。定理 1 给出的充分条件取决于支撑集对应的矩阵块 Φ_{opt} 和 Ψ_{opt} , 而最优的矩阵块是需要求解的, 事先不知道, 所以需要推导更加宽松的条件。

定理 2 块稀疏信号精确重构的一般条件。假设 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\tilde{v}$ 分别是测量矩阵 Φ 和感知矩阵 Ψ 之间的块相关性和子相关性, 如果满足

$$kp < (\tilde{\mu}_B^{-1} + p - (p-1)\tilde{v}\tilde{\mu}_B^{-1})/2 \quad (8)$$

那么基于感知矩阵的 BOMP 算法能够在每一步迭代中选择最优的块。

证明 由范数定义可知:

$$\begin{aligned} \rho_c((\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}})^{-1} \Phi_{\text{opt}}^T \tilde{\Psi}_{\text{opt}}) &\leq \\ \rho_c((\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}})^{-1}) \rho_c(\Phi_{\text{opt}}^T \tilde{\Psi}_{\text{opt}}) &\quad (9) \end{aligned}$$

根据 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\rho_c(A)$ 的定义, 得到

$$\rho_c(\Phi_{\text{opt}}^T \tilde{\Psi}_{\text{opt}}) = \max_{j \notin \text{opt}} \sum_{i \in \text{opt}} p(\Phi^T[i] \Psi[j]) \leq Kp \tilde{\mu}_B \quad (10)$$

根据文献[7]中引理 3 可知, 若 $\rho_c(A) < 1$,

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k \quad (11)$$

由式(11)可知:

$$\begin{aligned} \rho_c((\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}})^{-1}) &= \rho_c(\sum_{k=0}^{\infty} (-\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}} - I)^k) \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_c(\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}} - I))^k &= \\ \frac{1}{1 - \rho_c(\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}} - I)} &\quad (12) \end{aligned}$$

根据 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\tilde{v}$ 的定义, 很容易得到

$$\rho_c(\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}} - I) \leq (p-1)\tilde{v} + p(K-1)\tilde{\mu}_B \quad (13)$$

$$\rho_c((\Phi_{\text{opt}}^T \Psi_{\text{opt}})^{-1} \Phi_{\text{opt}}^T \tilde{\Psi}_{\text{opt}}) \leq \frac{Kp \tilde{\mu}_B}{(p-1)\tilde{v} + p(K-1)\tilde{\mu}_B} < 1 \quad (14)$$

如果式(14)成立, 那么就能满足式(7), BOMP 算法就能够精确重构。

定理 2 更加明确地表示了 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\tilde{v}$ 的重要性, 若不等式(8)右边数值很大, 重构范围也随之变大, 精确度也会变高。从式(8)中可以看出, 存在 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\tilde{v}\tilde{\mu}_B^{-1}$ 的博弈情况, $\tilde{\mu}_B$ 必须要小; 而 $\tilde{v}\tilde{\mu}_B^{-1}$ 也要很小, 即 $\tilde{v}$ 要很小或者 $\tilde{\mu}_B$ 很大。本文使用的测量矩阵必须要考虑到这两个因数。文献[9]通过求解最优化方程来分配 $\tilde{\mu}_B$ 和 $\tilde{v}$ 权值比重, 观察重构概率, 结果显示, 对于 BOMP 算法所用到的矩阵来说, $\tilde{v}$ 的重要性远大于 $\tilde{\mu}_B$ 。要精确重建就要优先考虑 $\tilde{v}$ 的大小。

2.2 基于互交替投影的矩阵构造

一般来说, 标准 CS 理论所用的测量矩阵均为高斯随机矩阵, 测量数目一般需要很少。虽然 BOMP 算法保证了算法复杂度较低, 但采用高斯随机矩阵重构效果不理想, 主要原因是块相关性和子相关性都很大。本文算法的思想是采用互交替投影方法构造测量矩阵和感知矩阵, 使得块相关性和子相关性都很小, 进而提高 BOMP 算法重构精度。然而对于任意的矩阵块 $\Phi[i]$ 和 $\Psi[j]$, 相关性大小可以看成是 p 维子空间问题。根据子空间理论知识, 要使矩阵块相关性和子相关性都很小, 那么矩阵块的弦距离必须达到最大。

对于格拉姆矩阵 $\Psi^T \Phi \in Np \times Np$ 来说, $\tilde{\mu}_B$ 对应于格拉姆矩阵 $\Psi^T \Phi$ 中 $p \times p$ 大小的非对角线子矩阵块的最大谱范数, 而 $\tilde{v}$ 就对应于格拉姆矩阵 $\Psi^T \Phi$ 中 $p \times p$ 大小的对角线子矩阵块中非对角线元素最大值。已知测量矩阵 Φ 求解感知矩阵 Ψ 的问题就是要满足

$$\begin{aligned} \arg \min_{\Psi \in m \times Np} \|\Psi^T \Phi - G\|_F \\ \text{s. t. } G \in \{Np \times Np, G[i, i] = I_p, \|G[i, j]\|_F \leq \eta, i \neq j\} \quad (15) \end{aligned}$$

式(15)可以理解矩阵逼近求解问题, 通过逐块求解最优化问题得到感知矩阵 Ψ , 使得 $\Psi^T \Phi$ 无限接近于理想矩阵 G 。由文献[7]中可得

$$\Psi[j] = (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi G[j] \quad (16)$$

MAP-BOMP 算法构造测量矩阵 Φ 和感知矩阵 Ψ 的流程如下:

初始化。高斯随机测量矩阵 Φ 和收敛条件 ε , 迭代次数 num, 格拉姆矩阵 $G = \Phi^T \Phi$ 。

算法迭代步骤:

a) 给定矩阵 Ψ 和 $G = \Psi^T \Phi$, 通过求解 $\min \|H - G\|_F$ 寻找格拉姆矩阵 H 。

b) 给定格拉姆矩阵 H 和测量矩阵 Φ , 通过求解 $\min_{\Psi \in m \times N_p} \|\Psi^T \Phi - H\|_F$ 寻找测量矩阵 Ψ 。

c) 给定格拉姆矩阵 H 和感知矩阵 Ψ , 通过求解 $\min_{\Phi \in m \times N_p} \|\Psi^T \Phi - H\|_F$ 寻找测量矩阵 Φ 。

d) $G = \Psi^T \Phi, r_i = \|H - G\|_F$ 。

迭代停止条件: 迭代次数大于 num 或 $r_i - r_{i-1} \leq \varepsilon$ 。

算法输出: 测量矩阵 Φ , 感知矩阵 Ψ 。

收敛条件 ε 的作用是减少不必要的迭代次数。当每次迭代后, 格拉姆矩阵与迭代前格拉姆矩阵相差的 l_2 范数变化不大, 则认为算法达到收敛。迭代次数 num 的作用是防止算法不收敛的情况, 一般取 10 左右。本文通过仿真来证实基于互交替投影思想构造出来的矩阵的优越性, 并从矩阵块相关性和子相关性两方面, 与文献[7]中提出的构造矩阵、随机高斯矩阵相对比。测量数目 M 为 64 ~ 128, 稀疏块大小 p 为 4, 矩阵列数 N_p 为 256, 稀疏块个数 K 为 5, 收敛条件 ε 为 10^{-3} , num 为 10, 程序仿真 100 次。结果显示, 对于块相关性大小 $\bar{\mu}_B$ 来说, 本文互交替投影方法与 S-BOMP 算法构造出的感知矩阵相差无几, 均优于高斯随机矩阵; 但是互交替投影方法构造出的矩阵相关性大小 $\bar{v}$ 远小于其他矩阵。从后面仿真来看, 基于互交替投影矩阵的 BOMP 算法之所以能够重构且概率大大超过基于随机高斯矩阵和感知矩阵的 BOMP 算法, 是因为互交替投影矩阵子相关性很小, 这也间接突出了矩阵子相关性大小 $\bar{v}$ 对于 BOMP 算法重构性能的作用。此次仿真得到的结果与文献[9]中的结论相一致。图 1、2 分别为矩阵块相关性和矩阵子相关性对比结果。

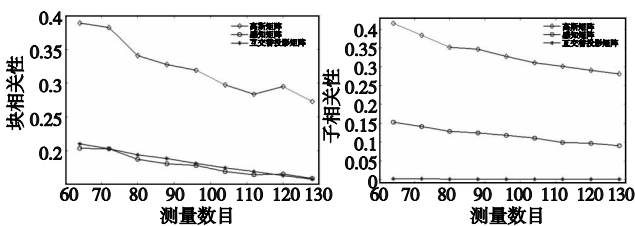


图1 矩阵块相关性对比

图2 矩阵子相关性对比

3 实验结果与分析

3.1 重构对比

实验将本文算法和 OMP、BOMP、S-BOMP 算法分别应用于块稀疏信号的重构, 计算每一种方法的重构概率并进行对比。实验随机选取一维块稀疏信号进行测试, OMP 和 BOMP 算法采用列归一化的随机高斯矩阵。

实验参数如下: 测量数目 M 为 100, 信号长度 N_p 为 200, 稀疏块大小 p 为 2, 稀疏块个数 K 为 20 ~ 35, 实验仿真 1000 次。图 3 为在不同稀疏度下各算法重构概率对比实验结果。当重构误差 $\|\hat{x} - x\|_2 / \|x\|_2$ 小于 10^{-4} 时, 可以看做算法精确重构。

从图 3 可知, 由于 OMP 算法没有利用块稀疏思想, 重构效果最差。与 BOMP 算法相比, S-BOMP 算法重构概率有了较大提高。无论在多大稀疏度下, 本文算法总是优于 S-BOMP 算

法, 在四种算法中重构概率最高。

3.2 运行时间

为了实验结果更加精确, 将本实验仿真 2000 次, 图 4 为各算法重构运行时间对比结果。从图 4 可知, OMP 和 BOMP 算法稀疏度增大, 运行时间也随着增大。BOMP 算法计算复杂度明显小于 OMP 算法。而 S-BOMP 算法在稀疏度小于 56 时, 运行时间大于 BOMP 算法, 这时重构概率在 0.5 以上; 当稀疏度大于 56 时, S-BOMP 算法重构所需时间反而少于 BOMP 算法, 不过这时重构概率很低, 没有实际参考意义。不管信号稀疏度为多大, MAP-BOMP 算法重构过程所需时间最少。

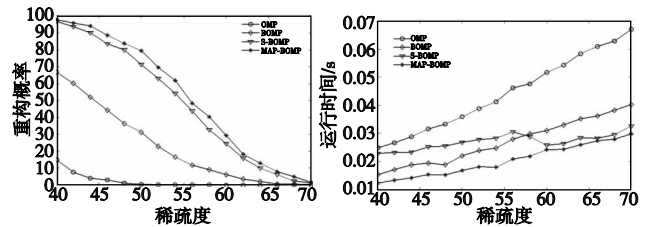


图3 重构概率对比

图4 运行时间对比

4 结束语

本文针对近年来提出的一种特殊信号——块稀疏信号, 提出了基于互交替投影的块稀疏匹配追踪算法, 使得选择最优矩阵块的正确性提高, 从而提高重构概率。构造测量矩阵和感知矩阵可以看成是矩阵逼近问题, 计算复杂度很小。本文也证明了对于重构块稀疏信号, 矩阵的子相关性至关重要, 对于块稀疏信号的处理具有实际意义。本文理论分析和实验仿真均无噪声存在的条件下进行, 故下一步的工作主要寻找噪声存在情况下的矩阵构造方法。

参考文献:

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] DUARTE M F, ELDAR Y C. Structured compressed sensing[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(9): 4053-4085.
- [4] DONOHO D L. On the stability of the basis pursuit in the presence of noise[J]. Signal Processing, 2006, 83(6): 511-532.
- [5] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [6] ELDAR Y C. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(6): 3041-3054.
- [7] HUANG An-min. A block orthogonal matching pursuit algorithm based on sensing dictionary[J]. International Journal of the Physical Sciences, 2011, 6(5): 992-999.
- [8] TROPP J A. Designing structured tight frames via an alternating projection method[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51(1): 188-209.
- [9] ZELNIK-MANOR L. Sensing matrix optimization for block-sparse decoding[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(9): 4300-4312.