快速可展窄带曲面设计*

崔晓坤1,陈明2

(1. 广东科学技术职业学院, 广州 510640; 2. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055)

摘 要: 针对在服装、制鞋、钣金等行业的产品外形设计中,经常需要插值两条特征空间曲线,构建光顺可展窄带来过渡连接相邻的两可展曲面(可无伸缩地展开成平面)的问题,提出了一种新算法支持可展窄带的优化实时设计。其中:一条线为样式线,承载了外形褶皱的设计要求,通常固定不变;另外一条为设计线,允许其在指定的范围内进行变动(该范围通过两曲面嵌入线进行限定),并且保证设计线始终处于一个被连接的可展曲面上。该问题最终可转换为离散组合优化与非线性约束优化相混合的优化问题,可迭代进行快速求解。最后与主流计算机辅助设计软件 Cimatron 以及文献[1]中的方法进行了对比测试。测试结果表明该算法在造型速度上以及可展窄带的可展度方面均具有明显优势。所提算法对于相关行业的可展窄带外型设计具有实际工程应用价值。

关键词: 可展曲面; 曲面展开; 褶皱设计; 造型设计; 组合优化

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1001-3695(2012)10-3997-04

doi:10.3969/j. issn. 1001-3695. 2012. 10. 106

Efficient developable strip surface design

CUI Xiao-kun¹, CHEN Ming²

(1. Guangdong Institute of Science & Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen Guangdong 518055, China)

Abstract: In some industries such as garments, shoes and metal building, etc, one developable strip surface is often required to interpolate two specified set of skeleton curves such that two neighboring developable patches (which can be flattened onto planed without any distortion, tear or stretch) can be smoothly joined together. To solve this problem, this paper proposed a novel algorithm to support the design of developable strip at an instant rate; one of the bounding curves, i. e., pattern curve, was fixed to carry some appeal requirement such as wrinkles; the other one, called design curve, would be perturbed within a controllable tolerance (which was defined by two embedded curves) and guaranteed it be on one of neighboring developable patches all the time. The problem was formulated as a combination of a discrete combinatorial optimization problem and a constrained nonlinear optimization problem, and could be solved in an efficient iterative manner. Cimatron and the method in [1] were set up as benchmark. Experiments show that the proposed algorithm has obvious advantages in both speed and developability of the final strip surface. The proposed is of practical engineering senses in designing strip surfaces in related engineering applications.

Key words: developable surfaces; surface flatten; wrinkle design; modeling design; combinational optimization

0 引言

在服装、皮革以及板金等相关行业通常要求所设计的产品外形为可展曲面,从而保证产品能够无伸缩或伸缩很小的情况下展开成平面,从而便于制造 $[^{2-4}]$ 。可展曲面包含三类曲面,即柱面、锥面以及切线曲面 $[^{5}]$ 。大量的文献基于 NURBS 或Bezier 曲面来表示可展曲面 $[^{2,6-10}]$,但由于可展曲面的复杂性,这类参数可展曲面的表示方法仍难以应用到工程中。有学者尝试研究网格可展模型 $[^{1,11-13}]$,这为研究可展曲面指出了新的研究方向。该研究源于制鞋行业,在该行业中,鞋子的后跟部位通常不变化或变化很小,前面部位通常需要快速更新鞋子款式从而需要进行设计;设计师通常需要插值两曲线设计一条过渡窄带(被插值的两曲线的 Hausdroff 距离远小于两条曲线本身长度),即图 1 最左图中的两条黑线 C_1 和 C_2 所包含的过

渡区域。其中, C_1 在鞋子后端曲面(为可展曲面),该部位通常较为固定不变; C_2 在鞋子前端曲面(亦为可展曲面),该部分通常根据款式不停的变化。 C_1 通常要求设计成波浪外形使得最终过渡窄带形成褶皱而达到不同的视觉效果。设计阶段通常单独设计鞋面前端后,直接从已有的图形库中调出鞋面后端,因此应设计一过渡窄带来连接鞋面的前后端。该过渡窄带要求插值两曲面嵌入曲线 C_1 和 C_2 ,使得窄带最终能缝合在鞋子前后端的曲面上。



收稿日期: 2012-03-03; **修回日期**: 2012-04-05 **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(61100088);广东省自然科学基金资助项目(S2011040000145)

作者简介: 崔晓坤(1979-), 男, 湖北襄阳人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为数学建模、数据库、算法分析、程序设计(4967815@qq. com); 陈明(1979-), 男, 硕导, 博士, 主要研究方向为 CAD/CAM、计算机图形学、虚拟现实、图像识别、企业信息化.

展曲面,从而不能满足工程制造要求。从几何角度上看,该问 题可描述为:给定两条曲线 C_1 和 C_2 ,可展曲面 S_1 和 S_2 ,其中 C_2 位于曲面 S_2 上, C_1 为 S_1 的嵌入曲线, C_1 成波浪形, 需要求 解构建可展曲面 S。注意到如果 C,和 C,为任意给定(设计过 程中,往往如此),插值两条曲线的窄带根本无法满足可展的 几何约束。所以该问题可转换为:在满足 C_2 位于曲面 S_2 上以 及工程允许的误差条件下,如何小范围变更曲线 $C_2(C_1)$ 出于 褶皱的外形设计要求,固定不变)使得最终的插值曲线S尽可 能地满足近似可展曲面的要求(展开后伸缩率在材料允许的 范围内)。本文将该问题转换为两个子问题从而获得求解:a) 针对曲线 C_1 ,如何参数化曲线 C_2 ,使得形成的直纹面 S(ruled)surface,可展曲面是直纹面的一种特殊形式)具有最优的可展 度(下文定义);b)如何在 S_2 上变动曲线 C_2 ,在满足诸多约束 的情况下,使S获得更优的可展度。由于子问题 b)的求解导 致曲线 C_2 发生变化,从而使得子问题 a) 存在新的最优解,而 子问题 a)的新解会导致子问题 b)产生新解,所以可迭代求解 出最优可展窄带曲。

1 问题的离散表示

可展曲面是直纹面的一种特殊曲面。给定直纹面参数方程 $S(u,v)=vC_1(u)+(1-v)C_2(u)$,其中 C_1 和 C_2 称为 S 的准线, $(C_1(u)-C_2(u))$ 则称为母线 [5]。倘若对曲线 C_2 重新进行参数化 $\xi(u):[0,1]\to[0,1]$,其参数方程则变化为 $S(u,v)=vC_1(u)+(1-v)C_2(\xi(u))$,不同的 $\xi(u)$ 将对应不同的直纹面,亦对应表示顶点 $P=\{p_i\}$ 、 $Q=\{q_j\}$ 不同的连接方式,其中 P 和 Q 分别为 C_1 和 C_2 上的取样点,如图 2 所示。



图 2 曲线 C_2 不同的参数化 $\xi(u)$ 产生不同直纹面的示意图

根据可展曲面定义可知: $dC_1(u)/du, dC_2(u)/du$ 和 $C_1(u) - C_2(u)$ 共面,则 S 为可展曲面^[5],所以本文定义直纹面 的可展度 E(S) 为: $E(S) = \int_0^1 |\det(V_1, V_2, V_3)| du_0$ 其中, V_1 $V_2 \setminus V_3$ 分别为 $dC_1(u)/du \setminus dC_2(\xi(u))/du$ 和 $C_1(u) - C_2(\xi(u))/du$ (u))的单位向量。E(S)描述了三个单位向量的平面度,E(S)的值越小,强行展开S后,面积变化越小,即S的可展度越大; 若 E(S) = 0,则 S 为可展曲面。求解最优参数化 $\xi(u)$ 的解析 解非常困难,甚至无解。本文采用离散的方法来解决这一难 题:将 C_1 和 C_2 进行等参数离散,获得两折线标记为 PL_1 和 PL, 取样点标记为 $P = \{p_i\}$ 和 $Q = \{q_i\}$, 不同的 $\xi(u)$ 表示不同 的 $p_i q_i$ 相连(如图 2 所示),亦产生不同的 E(S)。所以 $\xi(u)$ 的 求解可以转换为求解一系列的 p_iq_i 连接方式使得E(S)最小。 PQ 连接方式确定后,则 p_iq_i 与 p_{i+1} 或 q_{i+1} 构成唯一的三角面集 合,该集合可视为S的离散表示。当取样点足够多时,最终的 三角面集合可精确地表示连续曲面 S。由于 C_1 为固定曲线, 故d $C_1(u)$ /du 的求解可以通过 C_1 的参数方程进行; $C_1(u)$ – $C_2(\xi(u))$ 由于确定了 p_iq_i 的连接,可以直接计算为 $(p_i - q_i)$, 而 C_2 为需要设计的曲线,故 C_2 即 PL_2 需要小范围迭代更新, 所以无法从 C_2 的初始参数方程对 $dC_2(\xi(u))/du$ 进行计算。 这种情况下,本文插值三相邻点 $\{q_{j-1},q_j,q_{j+1}\}$ 构成抛物线 $C(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, 则 $dC_2(\xi(u))/du$ 可以计算为 $a_1 + a_2 t^2$

 $2\gamma a_2$,其中 $\gamma = \|q_i - q_{i-1}\|/(\|q_i - q_{i-1}\| + \|q_i - q_{i+1}\|)$ 。 现在待求的子问题包括:

- a)如何寻找最优的 PQ 连接方式(即确定母线);
- b) 如何变更 $\{q_j\}$ 并满足五个条件: (a) PL_2 与给定的原有曲线 C_2 保持一定的相似形状; (b) $\{q_j\}$ 均在曲面 S_2 上; (c) PL_2 较为光顺,从而满足快速裁剪与拼接的需要; (d) E(S) 最小; (e) 出于交互设计的考虑,如何保证最后的整体算法运行速度在可接受的范围内。

2 局部优化的边界三角化窄带曲面

本文用边界三角化的方法^[7]来近似表示目标窄带曲面。在图 3 中,边界三角化通过一系列的三角面集合(所有三角面的顶点在目标曲面的边界上)表示一直纹面。更确切地说是让 $P = \{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$ 和 $Q = \{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 为边界曲线 C_1 和 C_2 的取样点。三角面集合 $T = \{T_1,T_2,\cdots,T_N\}$ 中的所有三角顶点均为 P 和 Q,如果以下标准被满足,则称 T 边界三角化边界曲线 C_1 和 C_2 :

- a) T_1 由线段 $\langle p_1,q_1\rangle$ 与点 p_2 或 q_2 生成, T_N 由 $\langle p_m,q_n\rangle$ 和 p_{m-1} 或 q_{n-1} 生成;
- b) 每个三角片 T_k , 1 < k < N, 都由边 $\langle p_i, q_j \rangle$ (称之为桥) 与点 p_{i+1} 或 q_{i+1} 生成;
 - c)每个顶点 p_i 和 q_i 都至少为一个三角形的顶点;
- d) 对于任意两顶点 p_i 和 p_j ,如果 i < j ,则所有以 p_i 为顶点的三角面在所有以 p_j 为顶点的三角面先构建,对于 Q 中的顶点 q_i 该条件同样适合。

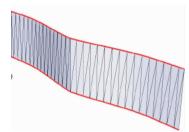


图 3 窄带的边界三角化离散表示

算法 FindingLocalOptBBT()

输入:参数曲线 C_1, C_2 ;输出: $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ 。

- a) 散曲线 C_1 与 C_2 , 获取离散点 $P = \{p_i\}$, $0 \le i \le m$ 与 $Q = \{q_j\}$, $0 \le j \le n$ 。
 - b)i=1,j=1,将其加到链表 List 中。
 - c) While ($i \le m$ and $j \le n$) Do {
 - (a)通过线段 p_iq_i 和点 p_{i+1} 构建三角片 T_k^{-1} ,和通过线段 p_iq_i 和点

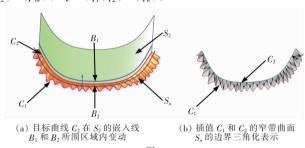
 q_{j+1} 构建三角片 T_k^2 , 如果 $E(T_k^2) > E(T_k^1)$, 则 i = i+1, 否则 j = j+1; (如果 i = m,则直接 j = j+1,直到 j = n 退出循环; 如果 j = n,则直接 i = i+1, 直到 i = m 退出循环)。

- (b)将[i,j]加入到链表 List 中 :。
- d)根据 List 生成一系列的三角片 T_i 返回。

步骤 c)中的循环通过 E()来判定是 i+1 还是 j+1,保证 所有 p_i 和 q_j 都能顺序相连;在步骤 a)后(即 P 和 Q 确定后,其中 m、n 不一定要求相等)该循环确保获得局部优化的 PQ 连接方式。

3 算法的整体描述

在图 4 中, S_2 是可展曲面(直纹面),曲线 C_2 是 S_2 上的嵌入线。称曲线 C_1 为样式线,通常为了产生褶皱而成波浪形,在设计过程中是固定不变的。曲线 C_2 则在曲面 S_2 上,允许在嵌入线 B_1 与嵌入线 B_2 所包围的小区域中移动。曲线 C_2 称为目标线。出于便于制造的目的,插值目标线和样式线的窄带 S_n 通常要求是可展的。另外由于 S_n 会最终与 S_2 缝合,所以要求最终的 C_2 必须在 S_2 上。标记 C_1 和 C_2 的离散点集为 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ 和 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ 。



算法 LocalOptStripDesign()

输入:曲线 C_2 、 C_1 ,曲面 S_1 ,嵌入曲线 B_1 和 B_2 ;输出: S_n 的边界三角网格模型。

- a)P,Q←离散 C_1 与 C_2 。
- b) While(是否满足循环终止条件) Do:{
- (a) ξ←通过 FindingLocalOptBBT() 获取局部最优的 PQ 连接,即 Co 的参数化 ε(u) o
- (b) 在 B_1 和 B_2 之间移动 Q 中所有点 q_j 使得整个 S_n 的可展度提高,即 $E(S_n)$ 值减小;返回步骤(a)
 - c)输出 S_n 。

步骤(a)是通过 FindingLocalOptBBT()子函数获得局部最优的参数化 $\xi(u)$;步骤(b)则在 $\xi(u)$ 固定的情况下,通过移动 q_j 来提升整个 S_n 的可展度,该步骤的求解将在下文继续阐述。其中循环终止的条件是:

- $a)E(S_n)$ 小于指定的阈值。
- b) $(E_k(S_n) E_{k+1}(S_n)) < \delta$, 其中 δ 为数值很小的实数,实验中设置为 0.002。
 - c)循环的次数超过所设定次数 10。

4 单变量的多项式优化

考虑到设计的瞬时响应要求以及最终 C_2 形状的易控性,本文采用逐个移动顶点 q_j 的策略。 q_j 移动的先后顺序根据 E ($\sum T_k(q_j)$)值来确定,其中 E($\sum T_k(q_j)$)表示以 q_j 为顶点的所有三角片的可展度的和。如果 E($\sum T_k(q_j)$)最大,则最先移动 q_j 。实验表明这种移动顺序能有效提高最终 S_n 的可展度。在研究初期阶段只考虑 q_j 沿着曲面 S_2 的母线的方向(即(p_i –

 q_j)的方向)进行变化。这种考虑是因为:a)单个方向的移动会大大减少程序的运算量,很容易保证最终程序达到交互设计瞬时响应的要求;b)沿着 S_1 的母线的方向移动会保证最终的 q_j 在曲面 S_2 上,并且 q_j 间的先后关系会保持住,从而不会出现自相交以及扭曲过度的情况;c) S_n 通常会要求比较接近柱面,v 方向(即母线方向)的优化通常为主要需要优化的方向。假设曲面 S_2 没有自相交,参数方程可标记为 $S_2(u,v)=vR_1(u)+(1-v)R_2(u)$, $(u,v)\in[0,1]$,其中 R_1 和 R_2 是对应的准线。 B_1 和 B_2 是 S_3 上的点,它们的参数方程为

$$\begin{split} B_1\left(t_1\right) &= S\left(u_1\left(t_1\right), v_1\left(t_1\right)\right) = v_1\left(t_1\right) R_1\left(u_1\left(t_1\right)\right) \, + \\ &\quad \left(1 - v_1\left(t_1\right)\right) R_2\left(u_1\left(t_1\right)\right) \qquad t_1 \in \left[0, 1\right] \\ B_2\left(t_2\right) &= S\left(u_2\left(t_2\right), v_2\left(t_2\right)\right) = v_2\left(t_2\right) R_1\left(u_2\left(t_2\right)\right) \, + \\ &\quad \left(1 - v_2\left(t_2\right)\right) R_2\left(u_2\left(t_2\right)\right) \qquad t_2 \in \left[0, 1\right] \end{split}$$

对于顶点 $q_j = S_2(u_0,v_0)$,单位母线方向可以计算为 $\tau = \frac{R_2(u_0) - R_1(u_0)}{\|R_2(u_0) - R_1(u_0)\|}$,则 q_j 沿着方向 τ 在一定范围内移动。通过顶点 q_j 的母线会与 B_1 和 B_2 相交于两点记为 M_1 和 M_2 , $M_1 = S_2(u_0,v_1(t_1))$, $M_2 = S_2(u_0,v_2(t_2))$,其中 $t_2 = u_2^{-1}(u_0)$,显然 q_j 对应的 v 的坐标 $v_0 \in [v_1,v_2]$ 。由于 $[v_1,v_2]$ 定义了一个很小区间, q_j 在母线的移动变化量 $\delta \in [v_1-v_0,v_2-v_0]$ 很小,这表明可以对 $E(\sum T_k(q_j))$ 的值在 $v=v_0$ 进行泰勒展开:

$$E(\sum T_k(q_j(v))) = E(\sum T_k(q_j(v_0))) + \beta_1 \delta + \beta_2 \delta^2 + \beta_3 \delta^3 + \beta_4 \delta^4 + 0(\delta^5)$$
(1)

其中: β_i 通过均匀取样然后求解线性方程获得。最初的 q_j 移动问题可以转换为单变量的多项式优化问题。目标函数式 (1) 在区间[v_1-v_0 , v_2-v_0]内的 k 个根可以获得解析解,区间 [v_1-v_0 , v_2-v_0]被进一步划分为 k+1 个子区间,由于目标函数在每个子区间为单调函数,局部最优的很容易获取;在所有 k+1 个局部最优的值中选取最优值作为最终的全局最优值。一旦被确定,则顶点 q_j 立即被更新。该部分算法的伪代码如下:

算法 LocalMovePntP ()

输入:准线 R_1 与 R_2 ,曲面 $S_2(u,v)$, $Q = \{q_j\}$, $0 \le j \le m$,曲线 B_1 和 B_2 ;输出:更新后的 $Q = \{q_j\}$, $0 \le j \le m$ 。

While $(i \leq m)$ Do:

- a) q_i ←选择 q_i 作为目标点。
- b) 计算母线方向 τ ;交点 M_1 和 M_2 ;对于顶点 q_j 、 M_1 和 M_2 ,计算在是 $S_2(u,v)$ 中的参数坐标 v 的坐标值 v_0 、 v_1 和 v_2 。
- c) 在区间 $\delta \in [v_1 v_0, v_2 v_0]$ 取样, 确定目标函数式(1)的 β_i 系数。
- d)基于标准多项式求解根的方法求解根,从而获得最优的 q_j 沿母线的移动量。
 - e) 更新 $q_i = S_2(u_0, v_0 + \delta)$ 。

5 曲线的光顺

出于裁剪方便的考虑,通常要求最终的 C_2 为光顺曲线,优化后的 PL_2 往往满足不了要求,故选取高斯光顺算子 $g(z) \propto \exp(-z^2/(2\sigma^2))$ 对 Q 中的某些尖锐点进行处理。尖锐点 q_j 可以通过交互确定,也可以通过比较 $\|q_j-q_{j-1}\|/\|q_{j-1}-q_{j-2}\|$ 与 $\|q_{j+1}-q_j\|/\|q_{j+2}-q_{j+1}\|$ 的值来确定,一旦挑选出来,则更新 $q_j = \sum_{q_i \in \Omega} q_i g(l(q_i))/\sum_{q_i \in \Omega} g(l(q_i))$,其中 Ω 为与 q_j 相邻的顶点加上 q_j 。实验中, $\Omega = \{q_{j-2}, q_{j-1}, q_j, q_{j+1}, q_{j+2}\}$; $l(q_i)$ 是 q_j 与 q_i 之间的长度; σ 是光顺系数,如果 σ = 0,则无

光顺效果,如果 σ 取无穷大,则每个顶点为相邻点的算术平均值。光顺后 q_i 会偏离曲面 S_2 ,所以最终会将它们投影到 S_2 上。

6 实验

基于此算法在 VS 2005 环境中,利用 C++开发了可展曲 面设计的原型系统,在 CPU 2.5 GHz, DDR2 2 GB, GeForce G100 128 MB 显存的 PC 机上进行了实验。实验首先对目标曲 线 C_2 不进行优化,只是利用文献[7]中的方法进行全局的参 数化优化,然后输出边界三角化网格模型,其可展度数据 E (S_n) 作为对比基准;另外一个重要的衡量优化标准是对比窄 带 S_n 展开前后的面积变化率 $\Delta A = (Area_{in} - Area_{in}) / Area_{in}$, 该值越小越好,其值为0,则说明 S_n 为可展曲面。此外还统计 了程序运行的时间,所有相关的数据在表1罗列。从表1中可 见程序运行速度在交互设计可接受的范围内。另外该算法虽 然在 C_2 参数优化上只采取了局部优化策略,但最终结果对比 文献[1]仍有较大提升,其中例1、例2中的可展度分别提高了 87%与66%,可见该算法对于接近圆柱面的窄带具有明显的 优化作用;对比图 5(c)(d), 光顺后的 C_2 可以拥有更易裁剪 的优势,但 S_n 的可展度变低了。现有的CAD系统尚无对曲线 C_2 进行可展特性优化的功能,通常均基于 NURBS 的放样功能 生产窄带,在例3中,本文特意针对目前主流鞋子 CAD 系统 Cimatron 与本文提出的方法作了比较。如图 7,中间线为固定 线 C_1 ,其两侧线为设计线 C_2 ,其中的移动距离被设定为不超过 δ ≤20 mm。对比图 7(c)与(a)(b),可以发现 C_2 的下端明显 沿着鞋面向 C_1 方向进行了移动,使得最终的 S_n 可展度大为提 高, S_n 几乎为可展曲面(展开后面积拉伸0.21%)。





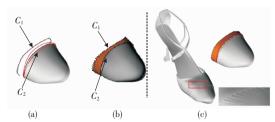




(c) 优化 C₂ 后的窄带 S_n,其中 C₂ 成明显锯

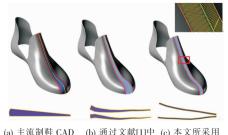
(d) 光顺后的 C_2 以 及最终的 S_n ,光顺 后的 C_2 拥有比(c)中 更好的裁剪特性

图 5 帽子设计中存在的窄带设计



(a)(b)为插值 C_1 , C_2 , 部分的为通过文献[1]中的方法所设计的窄带, 连接鞋子的前后部位, 包夹 C_3 , 的两条曲线分别为 B_1 和 B_2 ; (c)为优化后的窄带 S_a , 与缝合 S_1 和 S_2 的最终效果

图 6 鞋子设计中存在的窄带设计



(a) 主流制鞋 CAD 软件 Cimatron 所设 计的窄带,以及其 展开后的二维裁片

(b) 通过文献[1]中 方法所设计的窄 带以及相应的二

(c) 本文所采用 的方法所设计 的窄带及二维

图 7 对比效果

表1 对比数据

范例	取样数目	图	可展度	$\Delta A/\%$	时间/s	迭代次数
例 1	m = 500 $n = 800$	图 5(b)	291.37	11.25	2.32	无
		图 5(c)	37.12	1.15	5.71	6
		图 5(d)	42.46	2.51	6.02	无
例 2	m = 300 $n = 500$	图6(b)	75.50	4.82	1.51	无
		图 6(c)	25.76	1.79	2.12	5
例3	m = 1000 $n = 1000$	图 7(a)	无	8.91	无	无
		图7(b)	611.32	5.22	38.2	无
		图7(d)	58.39	0.21	20.31	3

7 结束语

本文针对窄带直纹面通过组合优化与非线性优化相结合的方法就曲面的可展特性进行了优化,支持插值两条曲面嵌入线,允许其中一条在所嵌入的曲面上移动,并保持原有曲线形状。该算法能快速生成近似可展曲面的窄带,对于服装、皮革类行业的窄带设计具有工程应用价值。现阶段该算法只考虑了沿着母线方向的优化,所以如果最终的窄带与柱状曲面倘若相差过大,优化作用不明显。未来的工作可考虑减弱或消除这种限制,使得算法更通用。

参考文献:

- [1] WANG C C L, TANG K. Optimal boundary triangulations of an interpolating ruled surface [J]. ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2005, 5(4):291-301.
- [2] AUMANN G. A simple algorithm for designing developable Bézier surface [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20 (8-9): 601-616.
- [3] 李基拓,陆国栋,张东亮.基于切割路径树优化的三角化网格曲面自动切割[J].浙江大学学报:工学版,2006,40(8):1320-1326.
- [4] 陈志飚,赵耀,严俊. 船体曲面柔性敷设块的展开[J]. 工程图学学报,2006,1(1):119-123.
- [5] Do CARMO M. Differential geometry of curves and surfaces [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
- [6] 陈动人,王国瑾. 可展 Bezier 参数曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2003,15(5):570-575.
- [7] AUMANN G. Degree elevation and developable Bézier surfaces [J].
 Computer Aided Geometric Design, 2004, 21 (7):661-670.
- [8] 杨俊清,周敏,叶正麟,等.可展曲面的计算机辅助设计[J]. 机械工程, 2007,18(12):1425-1429.
- [9] CHALFANT J S, MAEKAWA T. Design for manufacturing using B-spline developable surface[J]. Journal of Ship Research, 1998, 42 (3):207-215.
- [10] 周敏, 彭国华, 叶正麟. 可展曲面的几何设计与形状调节[J]. 中国机械工程, 2006, 17(24):2554-2557.
- [11] CHEN M, TANG K. A fully geometric approach for developable cloth deformation [J]. The Visual Computer, 2010, 26(6-8):853-863.
- [12] JONEJA A, FU J, TANG K. Modeling wrinkles on smooth surfaces for footwear design [J]. Computer-Aided Design, 2005, 37 (8):815-823.
- [13] TANG K, CHEN M. Quasi-developable mesh surface interpolation via mesh deformation [J]. IEEE Trans on Visualization and Computer Graphics, 2009, 15(3):518-528.