

基于GA的颗粒复合材料细观胞元重构研究*

赵玖玲, 蒋育良[†]

(第二炮兵工程大学, 西安 710025)

摘要: 对利用实验方法和数值方法得到的颗粒复合材料细观胞元模型进行力学分析时, 由于计算量非常大, 很难考虑其细观结构的全部信息。为了得到适用于仿真计算的细观结构模型, 在随机颗粒堆积算法建立细观胞元模型的基础上, 通过设计遗传算法(GA)重构出了具有各态历经性、统计均匀性和各向同性的最小胞元模型。通过体积分数为40%的二相随机颗粒复合材料的重构算例, 验证了算法的有效性。结果表明, 重构后的新胞元不仅在结构尺寸上大大减小, 而且具有比原始胞元更好的统计特性, 为进一步研究颗粒复合材料的宏观性能提供了条件。

关键词: 颗粒复合材料; 细观重构; 两点概率函数; 遗传算法; 适应度函数

中图分类号: TP391.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)10-3681-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.10.020

Mesostructure reconstruction of random particulate composites using GA

ZHAO Jiu-ling, JIANG Yu-liang[†]

(The Secondary Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Mechanics analysis of the particulate composites meso-cell model, which is generated by using experimental methods and numerical methods, since the calculation is very large, and it is difficult to consider all the mesostructure. In order to obtain the mesostructure model for simulation, this paper reconstructed the minimal mesostructure model by designing the genetic algorithm, which had ergodicity, homogeneity and statistical isotropy, based on the random particle packing algorithm. The experiment on two-phase random particulate composites of 40% packing fraction, indicate the algorithm's availability. The results show that: the reconstructed unit cell is not only greatly reduce the structural size, and has better statistical properties than the original cell, it provides conditions for the further study of particulate composites macroscopic properties.

Key words: particulate composites; mesostructure reconstruction; two-point probability function; genetic algorithm (GA); fitness function

0 引言

已有研究表明, 颗粒复合材料的宏观性能依赖于其细观结构, 通过细观仿真建立与真实复合材料细观结构具有相同统计特征的细观胞元模型, 为复合材料宏观性能的研究提供了有效途径。目前, 基于数字图像处理^[1]和基于数值仿真^[2,3]是建立细观胞元模型的两个主要方法。基于数字图像处理的方法对数字图像处理技术要求较高, 细观胞元结构太大, 且很难生成三维模型。而数值仿真方法可方便地生成二维和三维的细观胞元模型, 具有更好的适用性。Kochevets 和 Knott 等人^[2,4]提出了一个基于分子动力学的随机颗粒堆积算法, 实验证明其算法可生成圆/球形颗粒胞元模型。但是, 为了能够真实地代表复合材料的细观结构, 用该方法所建立的细观模型要求具有足够大的尺寸, 导致细观仿真耗时太长而难以实现。因此, 如何重构具有最小胞元尺寸的细观胞元模型已成为当前研究的重点和难点。

本文首先引入 Torquato^[5]用 n 点概率函数描述两相随机非均质复合材料细观形态的优点, 量化分析了颗粒堆积算法^[6,7]所建立周期性胞元模型(PUC)的统计特征; 然后基于遗传算法实现了细观胞元重构, 有效克服了颗粒堆积算法建立

PUC 尺寸太大的问题; 为消除极小量的重叠和其对最优目标性能的影响, 引入了罚函数及重叠优化; 最后通过对体积分数为40%的二相随机颗粒复合材料进行重构, 验证了本文算法的有效性。

1 细观胞元统计特性的基本原理

n 点概率函数可用来描述随机非均质颗粒复合材料的细观形态, 从统计意义上反映复合材料细观结构的特点。本文进一步通过 Monte Carlo 模拟将两点概率函数应用于定性描述细观结构和重构 PUC 的研究中。

1.1 一点和两点概率函数^[8,9]

为描述复合材料细观结构的统计特征, 考虑由大量随机颗粒细观结构组成的集合体构成样本空间 Φ 。一点及两点概率函数分别表示为

$$S_1(x) = \langle I_r(x, \alpha) \rangle \quad (1)$$

$$S_2(x, x') = \langle I_r(x, \alpha) I_s(x', \alpha) \rangle \quad (2)$$

其中: x 是细观结构中随机选取的一点; α 为样本空间的样本数; S_n 表示在点 x, x' 处同时发现第 r, s 相的概率; 符号 $\langle \cdot \rangle$ 表示样本平均, 即

$$\langle I_r(x) \rangle = \int_{\Phi} I_r(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha \quad (3)$$

收稿日期: 2012-03-10; 修回日期: 2012-04-21 基金项目: 国防科研预研究基金资助项目

作者简介: 赵玖玲(1972-), 女, 陕西合阳人, 副教授, 硕导, 博士, 主要研究方向为计算机仿真; 蒋育良(1986-), 男(通信作者), 四川资中人, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机仿真(jiang_yuliang@126.com)。

$$I_r(x, \alpha) = \begin{cases} 1 & x \in D_r(\alpha) \\ 0 & x \notin D_r(\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

其中: $p(\alpha)$ 代表在样本空间 Φ 里 α 的概率密度; $D_r(\alpha)$ 代表被第 r 相占据的区域。

通常, 计算式(1)(2)定义的概率函数非常困难。但是, 如果所描述的材料细观结构具有各态历经性、统计均匀性和各向同性时, 式(1)(2)可简化为

$$S_r(x) = S_r = c_r \quad (5)$$

$$S_{rs}(x, x') = S_{rs}(x - x') = S_{rs}(\|x - x'\|) \quad (6)$$

其中: c_r 为复合材料中第 r 相的体积分数; $\|x - x'\|$ 表示点 x 和 x' 的距离。特别地, 两点概率函数 $S_{rs}(x, x')$ 的极限情况为

$$\lim_{\|x - x'\| \rightarrow 0} S_{rs}(x, x') = \delta_{rs} S_r = \delta_{rs} c_r \quad (7)$$

$$\lim_{\|x - x'\| \rightarrow \infty} S_{rs}(x, x') = c_r c_s \quad (8)$$

其中: δ_{rs} 为 Kronecker 函数, 定义为

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (9)$$

式(7)表明不可能在同一点同时发现两个相, 且一点概率函数是两点概率函数在两点趋于零时的极限值, 因此两点概率函数包含了一点概率函数。式(8)说明当两点足够长时, 点 x 和 x' 具有统计无关性。

1.2 概率函数的 Monte Carlo 模拟

对式(3)所示的方程, 利用 Monte Carlo 数值积分方法计算细观结构的一点及两点概率函数, 有

$$S_r(x) = \frac{1}{V} \int_V I_r(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_r(x_i) \right] \quad (10)$$

$$S_{rs}(x, x') = \frac{1}{V} \int_V I_r(x) I_s(x') dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_r(x_i) I_s(x'_i) \right] \quad (11)$$

其中: 点 x 和 x' 是结构中随机分布的点; M 是投点次数, 趋于无穷。Monte Carlo 算法的主要思想是在结构内重复置入距离为 $r = \|x - x'\|$ 的两个点并计算这两点落入各相的概率。如图1所示。

在计算结构两点概率函数时, 可以通过 sampling template^[10]方法代替“投点”过程。如图2所示, 该方法将模板的中心随机置入结构中, 分别统计模板中心点及径向点所在的相即可。如果细观结构具有统计各向同性, 位于同一模板圆周内的点可以进行平均。

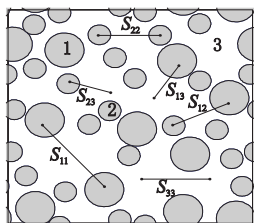


图1 Monte Carlo算法计算概率函数

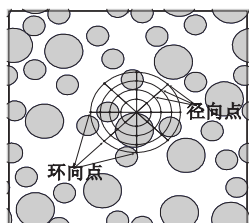


图2 Monte Carlo模拟概率函数的取样模板

2 PUC 各态历经性、统计均匀性和各向同性验证

为了证明概率函数式(5)(6)适用于颗粒堆积算法所建立的细观胞元模型中, 本章将对 PUC 的各态历经性、统计均匀性和各向同性进行验证。以四相复合材料为例, 通过颗粒堆积算法产生颗粒数为 70, 结构实际尺寸为 $800 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m}$, 体积分数约为 40% 的圆形颗粒细观胞元。

2.1 各态历经性的验证

各态历经性假设要求:

$$\overline{C_r} \approx \overline{S_r}, \text{ 且 } \overline{S_r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_r^i \quad (12)$$

当通过一点概率函数计算而来的样本平均 $\overline{S_r}$ 与体积平均 $\overline{C_r}$ 的误差小于 1% 时, 可以设想介质具有各态历经性。其中 n 代表所有胞元的数量, $\overline{C_r}$ 代表每一个相位的平均体积分。独立一阶概率函数 S_r^i 是通过 50 000 次的随机抛掷计算得到的。表 1 列出了估计得到的 S_r^i 、 $\overline{S_r}$ 和 $\overline{C_r}$, 从表中可以看到满足各态历经性要求。

表1 六个体积分约为 40% 一点概率函数
(P : 颗粒, $pack$: 胞元, M : 基体)

S_r^i	pack ₁	pack ₂	pack ₃	pack ₄	pack ₅	pack ₆	$\overline{S_r}$	$\overline{C_r}$
P_1	0.2775	0.2700	0.2878	0.2720	0.2822	0.2845	0.2790	0.2857
P_2	0.0873	0.0845	0.0853	0.0807	0.0834	0.0844	0.0843	0.0869
P_3	0.0178	0.0184	0.0170	0.0167	0.0167	0.0147	0.0168	0.0173
M	0.6174	0.6271	0.6099	0.6306	0.6177	0.6164	0.6199	0.6101

2.2 统计均匀性的验证

统计均匀性表示了一个给定方程的平移不变性, 一点概率函数可以在不同的坐标系中进行评估。将原始坐标从 $(0, 0)$ 平移到 $(-L, -L)$ 、 $(-L/2, -L/2)$ 、 $(-L/4, -L/4)$ 、 $(L/4, L/4)$ 、 $(L/2, L/2)$ 和 (L, L) 来计算一点概率函数, 胞元的长度为 $2L$ 。表 2 列出了在以上坐标系中的一点概率函数值及其标准差, 可以看到一点概率函数在不同坐标系中的标准差均小于 2%, 可以设想介质具有统计均匀性。

表2 不同坐标系下的一点概率函数
(P : 颗粒, M : 基体)

S_r	$(-L, -L)$	$(-L/2, -L/2)$	$(-L/4, -L/4)$	$(L/4, L/4)$	$(L/2, L/2)$	(L, L)	标准差
P_1	0.279 1	0.281 4	0.274 6	0.277 8	0.278 4	0.277 7	0.019 3
P_2	0.088 0	0.089 1	0.086 7	0.087 8	0.087 4	0.087 8	0.000 9
P_3	0.017 5	0.017 4	0.018 3	0.017 7	0.018 2	0.017 0	0.000 2
M	0.615 3	0.612 1	0.620 4	0.616 7	0.615 9	0.617 4	0.016 3

2.3 各向同性的验证

利用 Monte Carlo 算法模拟计算结构的两点概率函数, 计算中投点数分别取 500、2 000、5 000 和 10 000, 环向点数均为 100; 对于四相材料, 共有 $4^2 = 16$ 个两点概率函数。这里只给出基体—基体标准差 (S_{mm}) 作比较, 其他的标准差分布类似, 如图 3 所示。从图 3 中可以看出, 几个投点数模拟下, 标准差都小于 2%, 所以该复合材料具有各向同性。随着模拟次数的增加, 标准差逐渐降低, 在 $N > 5 000$ 时趋于稳定, 此时标准差小于 1%。

3 基于 GA 的 PUC 细观重构

本章将在所建立的细观模型的基础上, 基于遗传算法^[11]重构具有与其相同统计特征的最小胞元模型。该模型的两点概率函数与原来胞元的两点概率函数相一致, 具有良好的几何代表性。

3.1 基于 GA 重构 PUC 的基本方法

遗传算法是用于优化问题的智能算法, 针对不同的实际问题有着不同的应用空间。遗传算法具有收敛速度快、寻优效果好的特点, 具体过程如下:

- 给定进化代数计数器 gen ;
- 确定编码方案, 随机产生初始种群 P_0 ;
- 构造适应度函数, 计算种群的适应值;
- 引进最优保留策略, 将当前种群中适应度最高的个体完整地复制到下一代群体 P_i 中;
- 对新种群进行选择、交叉、变异等遗传操作;

f) 采用 Metropolis 准则,在 P_i 中插入新的个体;

g) $\text{gen} = \text{gen} + 1$, 返回 e), 直到满足终止条件;

h) 对遗传算法得到的最优解进行解码。

对于目前的 PUC 重构,群中的每一个个体都是单元胞中粒子的可能配置,由真值染色体 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{2N-1}, z_{2N}\}$ 表示, P_i 是最优化问题的一组可能解:

$$z_{2i-1} = x_i, z_{2i} = y_i \quad i=1, 2, \dots, N \quad (13)$$

其中: x_i 和 y_i 是 x, y 坐标系中第 i 个粒子的中心坐标。

1) 编码方案与初始化

本文采用的编码方式是实数编码,与二进制编码相比,实数编码不需要进行解码,改善了遗传算法的复杂性,提高了运算效率;同时避免了进制转换时引起的误差,求解精度高。确定了编码方案便可对初始种群中每一个个体的所有颗粒坐标连成一串进行编码,如式(13)所示,并设定进化计数器 gen 。

2) 适应度函数

适应度函数在遗传算法的搜索过程中起着极为关键的作用,群体的适应值分布直接决定了遗传算法的收敛速度。遗传算法的最优控制问题实质上是求适应度函数的最大值问题,而 PUC 重构的最优解是寻求两点概率函数差异的最小值,从而需要将最优解问题转变为求最大值问题。另外,重构过程中可能出现颗粒重叠,这是不希望得到的结果,应对重叠情况的适应度值进行惩罚。因此,构造如下的适应度函数:

$$F(x) = C_{\max} - (f_1(x) + f_2(x)) \quad (14)$$

其中: $f_1(x)$ 是两点概率分布函数; $f_2(x)$ 是重叠惩罚函数; $C_{\max}$ 是一个较大的实数。如何确定 PUC 重构中的适应度函数,下面将进行详细描述。

3) 选择、交叉和变异

选择算子是从当前种群中选择一些比较优良的个体,并将其复制到下一代群体中。本文采用随机竞争选择法,每次按轮盘赌选择机制选取一对个体,然后让这两个个体进行竞争,适应度高的被选中,如此反复,直到选满为止。

交叉算子能产生一些较好的新个体,寻优的搜索过程主要通过它来实现,由于是实数编码,本文采取两点算术交叉。

假设在两个个体 X_A^t 与 X_B^t 之间进行算术交叉,则交叉运算后所产生的两个新个体为

$$\begin{cases} X_A^{t+1} = \alpha X_B^t + (1 - \alpha) X_A^t \\ X_B^{t+1} = \alpha X_A^t + (1 - \alpha) X_B^t \end{cases} \quad (15)$$

其中: α 为 $[0, 1]$ 间的随机数。

变异算子可改善遗传的局部搜索能力,维持种群的多样性,防止出现早熟现象。本文采用非均匀变异法。

假设对个体 X_A^t 进行非均匀变异,则变异后所产生的新个体为

$$X_A^{t+1} = X_A^t + (L_{\text{up}} - X_A^t) \times \alpha \times (1 - \text{gen}/\text{maxgen})^2 \quad \text{或} \quad (16)$$

$$X_A^{t+1} = X_A^t - (X_A^t - L_{\text{low}}) \times \alpha \times (1 - \text{gen}/\text{maxgen})^2 \quad (17)$$

其中: L_{up} 和 L_{low} 分别代表 X 取值区间上限和下限; α 为 $[0, 1]$ 间的随机数; maxgen 为最大进化次数。

4) 增加新个体

本文采用 Metropolis 准则:

$$\Delta f = f(X_A^{t+1}) - f(X_A^t) \quad (18)$$

若 $\Delta f > 0$, 则接受新解,并用上一代最优解替换当代最差解;若 $\Delta f < 0$, 则按概率 $p = \exp(-\Delta f/\text{gen})$ 接受新解,并用当代最优解替换当代最差解。 gen 为当前进化次数,开始时候可能接受较差的恶化解,随着 gen 的增大,接受恶化解的概率逐渐减小;最后在 gen 趋于 maxgen 时,就不再接受恶化解了。若不

接受新解,则保持上一代最优解不变,用当代最优解替换当代最差解。

3.2 适应度函数的确定

式(8)说明当两点概率函数投点间的距离大于一定值时呈现统计无关性,因此可以确定出重构 PUC 的原始长度规模 H_{init} 。

3.2.1 两点概率分布函数

对于一个给定 H_{init} 的 PUC, 体积分数为 C_i , 粒子半径为 r_i , 相位 i 的粒子数为 N_i , H 代表 PUC 的最小尺寸,通过如下的目标函数可以使体积分数的差异最小:

$$G(H) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_p} (C_i - \frac{N_i \pi r_i^2}{H^2})^2} \quad (19)$$

其中: n_p 是复合材料中粒子相位的个数。这个最优问题可以得到解析解来获得最优的 PUC 尺寸规模为

$$\frac{dG}{dH} = 0 \Rightarrow H = \sqrt{\frac{\pi \sum_{i=1}^{n_p} N_i^2 r_i^4}{\sum_{i=1}^{n_p} N_i r_i^2 C_i}} \quad (20)$$

通过式(20)确定了 PUC 的最优长度规模后,颗粒中心的最优位置就可以通过求下面的目标函数的最小参数值来确定,基于两点的概率分布为

$$F(\mathbf{x}_N) = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \|S_{rs}^* - S_{rs}\|_{L_2} = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \sqrt{\int_0^H (S_{rs}^* - S_{rs})^2 dr} \quad (21)$$

其中: $\mathbf{x}_N = \{x_1, y_1, \dots, x_N, y_N\}^T$ 是颗粒中心位置向量, x_i 和 y_i 分别是第 i 个粒子的 x, y 坐标; m 是复合材料相位的总数,等于 $n_p + 1$; S_{rs}^* 是原始细观结构计算所得到的两点概率函数; S_{rs} 是 PUC 计算所得到的两点概率函数。

但是式(17)没有包含颗粒的重叠情况,判断 PUC 中没有重叠,解向量 $\mathbf{x}_N$ 应该遵循:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} &\geq r_i + r_j \\ \forall i &= 1, \dots, N; j = i + 1, \dots, N \end{aligned} \quad (22)$$

其中: N 代表粒子总数, r_i 和 r_j 分别是第 i 和第 j 个粒子的半径。在重构过程中,应当避免颗粒间重叠情况的发生。

3.2.2 重叠惩罚函数

根据一对粒子中心的距离,可以将重叠分为两类:a) 部分重叠,即粒子中心的距离小于两者半径之和;b) 完全重叠,即粒子中心的距离小于任何一个半径。用 N_p 代表部分重叠事件数目, N_c 代表完全重叠事件数目,可能解中的重叠数量通过系数 η 来描述:

$$\eta = \begin{cases} \frac{2}{N_p} \sum_{i=j}^N \sum_{i=j+1}^N \frac{A_{\text{overlap}}}{(A_i + A_j)} & N_c = 0 \\ \frac{2}{N_p} \sum_{i=j}^N \sum_{i=j+1}^N \frac{A_{\text{overlap}}}{(A_i + A_j)} + 0.5 & N_c > 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中: A_i 和 A_j 分别代表颗粒 i 和 j 的面积; A_{overlap} 代表重叠面积。当出现某个颗粒的中心刚好在另一个颗粒的圆周上的极限情况时,重叠系数 η 被认为是 0.45。因为完全重叠是不希望出现的情况,所以应该给予惩罚,当出现完全重叠时重叠系数 η 自动加上 0.5。

根据由参数 η 所给出的重叠数量,建立了一个惩罚方程:

$$p = \begin{cases} 0 & \eta = 0 \\ \left(\frac{\eta}{w}\right)^\lambda & 0 < \eta < w \\ 1.0 & \eta \geq w \end{cases} \quad (24)$$

其中: w 代表重叠的较高中断, η 超过 w 则 $p = 1$; λ 是 $0 < \eta < w$ 下补偿函数的指数。

所以,通过两点概率分布函数式(21),和重叠罚函数式(24),可得出适应度函数为

$$F(x_N) = C_{\max} - \left(\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \sqrt{\int_0^H (S_{rs}^* - S_{rs})^2 dr} + p \right) \quad (25)$$

3.3 重叠问题优化

在上述 GA 操作过程中,仅仅通过重叠罚函数将无法完全消除颗粒重叠。为了得到合适的解,确保算法的收敛速度,需对发生重叠的颗粒进一步优化。本文引入一种简单的重叠优化方法,通过几何运算来调整每对重叠颗粒的坐标,使其沿着重叠的相反方向移动,并满足如下关系式:

$$\sqrt{(x'_i - x'_j)^2 + (y'_i - y'_j)^2} = r_i + r_j \quad (26)$$

其中: (x'_i, y'_i) 和 (x'_j, y'_j) 分别为一对重叠颗粒优化后的中心坐标; r_i 和 r_j 为颗粒的半径。

4 重构算例

首先通过颗粒堆积算法生成一个体积分数为40%、包含70个颗粒,结构实际尺寸为 $800 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m}$ 的单尺寸二相复合材料作为 GA 的原始种群,其两点概率函数如图4所示。从图4中可以得出,当两点概率函数取样模板半径 $r > 0.55$ (实际尺寸为 $220 \mu\text{m}$)时,两点概率函数呈现统计无关性。因此 PUC 原始大小 H_{init} 为 $440 \mu\text{m}$ 、包含22个颗粒,其最优大小由式(20)计算得到为 $438 \mu\text{m}$ 。

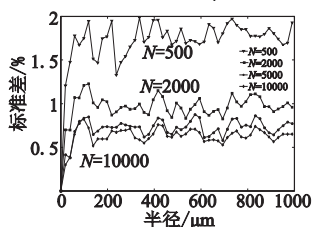


图3 基体—基体标准差与投点数的关系

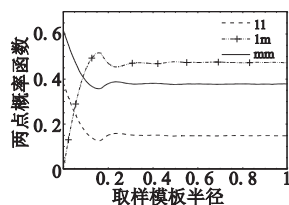


图4 体积分数为40%的二相颗粒两点概率函数

然后用第三章描述的遗传算法进行重构。这里遗传算法作用的对象是20个初始种群,且均由颗粒堆积算法直接产生。当迭代次数达到10 000或公差(由最坏个体和最好个体适应度的差决定)达到0.015而且保持至少1 000次的迭代时,仿真结束。罚函数的重叠较高中断 w 取为0.05,指数 λ 设为5.0。表3列出了目前遗传算法参数值。

表3 遗传算法的相关参数值

参数名称	参数符号	参数值
初始种群大小	P_0	20
最大进化次数	maxgen	500
交叉概率	P_c	0.3
变异概率	P_m	0.7

图5(b)是重构后 PUC 细观胞元,没有重叠,而且尺寸减小为原始胞元图5(a)的30%。图6(a)描述了原始群的两点概率函数平均值与初始种群的对比结果,为了便于比较只选择了部分个体,其余个体有相同趋势;图6(b)展示了原始群与重构 PUC 的比较结果,显而易见,重构后的 PUC 与原始种群的两点概率函数相吻合,而且曲线更稳定,因此具有更好的统计特性。

5 结束语

a) 利用一点和两点概率函数对复合材料细观结构的统计特性进行描述,证明了随机颗粒堆积算法生成的细观胞元模型各态历经性、统计均匀性和各向同性。

b) 基于遗传算法实现了对体积分数为40%的颗粒复合材料细观胞元模型重构,通过结果分析比较,证明新的胞元模型可以代替原始模型作为研究对象。

c) 下一步将针对更高体积分数的颗粒复合材料,解决消除颗粒重叠耗时太多的问题。

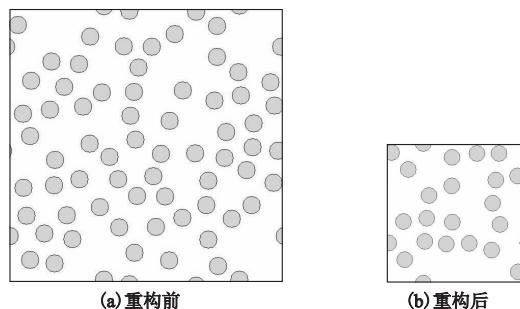


图5 胞元尺寸对比

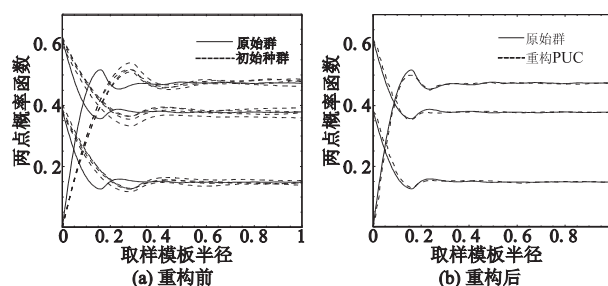


图6 两点概率函数对比

参考文献:

- [1] 刘著卿,李高春,张勇,等. 基于数字图像处理的复合推进剂细观颗粒填充模型[J]. 计算机与应用化学,2010,27(7):983-986.
- [2] KOCHETVETS S V. Random sphere packing model of heterogeneous propellants[D]. Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.
- [3] LEE H, BRANDYBERRY M, TUDOR A, et al. Three-dimensional reconstruction of statistically optimal unit cells of polydisperse particulate composites from microtomography[J]. Physical Review E, 2009,80(6):061301.
- [4] KNOTT G M, JACKSON T L, BUCKMASTER J, et al. Random packing of heterogeneous propellants[J]. AIAA Journal, 2001,39(4):678-686.
- [5] TORQUATO S. Morphology and effective properties of disordered heterogeneous media[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998,35(19):2385-2406.
- [6] JIA X, GAN M, WILLIAMS R A, et al. Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities[J]. Powder Technology, 2007,174(1-2):10-13.
- [7] STAFFORD D S, JACKSON T L. Using level sets for creating virtual random packs of non spherical convex shapes[J]. Journal of Computational Physics, 2010,229(9):3295-3315.
- [8] JIAO Y, STILLINGER F H, TORQUATO S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions I: basic principles[J]. Physical Review E, 2007,76(3):1-15.
- [9] JIAO Y, STILLINGER F H, TORQUATO S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions II: algorithmic detail and applications[J]. Physical Review E, 2008,77(3):1-15.
- [10] SMITH P A, TORQUATO S. Computer simulation results for the two-points probability function of composite media[J]. Journal of Computational Physics, 1988,76(1):176-191.
- [11] 牛向阳,倪前月,高成修. 基于遗传算法和模拟退火算法的混合算法[J]. 昆明理工大学学报:理工版,2008,33(2):25-28.