复高斯小波核函数的支持向量机研究 *

陈中杰[a]，蔡　勇[b]，蒋　刚[b]
（西南科技大学 a. 计算机科学与技术学院；b. 制造科学与工程学院，四川 绵阳 621010）

摘　要：针对基于常用核函数的支持向量机在非线性系统参数辨识及预测方面的不足之处，构建了一种新的核函数——复高斯小波函数核函数。首先证明了新构建的核函数的正确性，即满足 Mercy 条件，表明其可以作为核函数；然后构建基于该核函数的支持向量机，并将该支持向量机用于非线性系统的辨识和未知部分的预测。通过与常用核函数构建的支持向量机的仿真结果进行对比，验证了该方法的正确性和有效性。

关键词：复高斯小波核函数；Mercy 条件；支持向量机；非线性系统辨识及预测
中图分类号：TP391.4　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1001-3695(2012)09-3263-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.09.016

Study on SVM of complex Gaussian wavelet kernel function

CHEN Zhong-jie[a], CAI Yong[b], JIANG Gang[b]
(*a. School of Computer Science & Technology, b. School of Manufacturing Science & Engineering, Southwest University of Science & Technology, Mianyang Sichuan* 621010, *China*)

Abstract: According to the shortage of the SVM, which based on common kernel function, used in non-linear system identification problem signals, this paper put forward one new kernel function. This paper proved the proposition that the new kernel function was correct, which could satisfy the Mercy conditions, and it could be used as the kernel function. And then it built the SVM based on the new kernel function. It used the proposed SVM to identify parameters and forecast future information of the non-linear dynamic signals. Simulation experiment results validate the feasibility and effectiveness of the method, which compared with the SVM based on common kernel function.

Key words: complex Gaussian wavelet kernel function; Mercy conditions; support vector machine(SVM); non-linear parameter identification and prediction

0　引言

本文首先介绍了非线性系统特征参数辨识预测常用的一些方法。由于这些方法的特征参数辨识预测的效果一定程度上取决于样本数据量的大小，即样本数据必须满足大样本这一不足，目前很多学者都提出了采用基于小样本数据的 SVM 方法来解决此类问题。本文就是在分析了目前基于其他核函数的 SVM 方法在非线性系统特征参数辨识预测的基础之上，对复高斯小波函数满足 Mercy 条件作了证明，表明其可以作为核函数，并构建了基于复高斯小波核函数的 SVM，从而对非线性动态信号进行参数辨识和未知部分的预测，实验结果验证了复高斯小波 SVM 的有效性和优越性。

1　非线性系统参数辨识预测方法

1.1　参数辨识及预测的常用方法

目前，非线性系统特征参数辨识预测方法大致可以分为基于动力学模型的有模型方法和基于信号分析的无模型方法。前者的基本思想是：根据所研究问题的需要，建立结构的线性或非线性动力学模型。后者的基本思想是：依据结构响应信息的先验知识，对结构响应信号进行分析处理。目前，基于信号分析的无模型方法是非线性系统特征参数辨识预测方法中广泛应用的方法。

基于信号分析的无模型方法主要是采用时频分析、小波变换、神经网络和高阶统计分析等技术对非线性系统特征参数辨识预测的方法进行广泛的研究[1]。虽然这些方法在非线性系统参数辨识预测方面取得了不错的效果，但是这些方法大都是基于大样本的，即所需的数据量巨大，训练样本必须是大样本的情况下才能保证非线性系统参数辨识预测的效果。因此，目前很多学者都提出了采用基于小样本数据的 SVM 方法来解决此类问题。

1.2　SVM 方法

支持向量机（SVM）算法基于统计学习理论[2]，遵循结构风险最小化（structure risk minimization, SRM）准则。支持向量机的思想是通过非线性变换将原空间映射到高维的特征空间，从而在高维的特征空间中采用线性判别函数实现小样本条件下的机器学习。这种变换主要是通过核函数来实现的。支持向量机的核函数必须满足 Mercer 定理[3]。这种变换使支持向

收稿日期：2012-03-06；**修回日期：**2012-04-19　　**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(11176027)

作者简介：陈中杰(1986-)，男，山东菏泽人，硕士，主要研究方向为计算机图形学、智能控制、计算可视化(493673979@qq.com)；蔡勇(1962-)，男，教授，博士，主要研究方向为计算机图形图像处理、智能控制、虚拟现实技术；蒋刚(1978-)，男，研究员，博士，主要研究方向为统计学习理论与智能控制.

量机不但从理论上保证收敛在全局上能达到最优点，而且可以有效地避免维数灾的问题。目前，支持向量机在很多领域都已得到应用，并且比传统机器学习方法显示出了更优秀的性能，引起了广大学者的普遍关注[4]。对于非线性系统，目前利用小波函数时间窗的动态变化，在提取信号细微特征方面有了进一步的研究[5]。文献[5]构造了高斯小波核 SVM；文献[6]构造了尺度核 SVM 进行非线性系统的辨识预测。这些方法都难以得到普遍适用的满意结果。

2 复高斯小波核函数

2.1 复高斯小波核函数方法

本节首先对复高斯小波函数可以作为核函数进行证明，即证明其满足 Mercy 条件。

定义 1 $\exists\psi(x)\neq 0$，$\psi(x)$ 是复高斯小波：

$$\psi(x)=C_p\exp(-ix)\exp(-x^2)$$

定义 2 复高斯小波核函数：

$$\begin{cases}K(x,x')=\prod_{i=1}^{n}\psi(\frac{x_i-b_i}{a_i})\cdot\psi(\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})\\ \text{s.t.}\quad x,x'\in R^n\\ a_i,a_i',b_i,b_i'\in R;a_i\neq 0,a_i'\neq 0\end{cases}$$

其中：a_i、a_i' 为膨胀因子；b_i、b_i' 是位移因子。

2.2 复高斯小波函数满足 Mercy 条件的证明

证明 任取 $\varphi(x)\in R$，且 $\varphi(x)\neq 0$，有

$$\iint_{R_n\times R_n}K(x,x')\varphi(x)\varphi(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'=$$

$$\iint_{R_n\times R_n}\prod_{i=1}^{n}[\psi(\frac{x_i-b_i}{a_i})\cdot\psi(\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})]\times\varphi(x)\varphi(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'=$$

$$\iint_{R_n\times R_n}\prod_{i=1}^{n}\{C_p\exp[-i\frac{x_i-b_i}{a_i}]\exp[-(\frac{x_i-b_i}{a_i})^2]\times$$

$$C_p\exp[-i(\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})]\exp[-(\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})^2]\}\times\varphi(x)\varphi(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'=$$

$$\{\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\{C_p\exp[-i(\frac{x_i-b_i}{a_i})\exp[-(\frac{x_i-b_i}{a_i})]^2\varphi(x)\mathrm{d}x\}\times$$

$$\{\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\{C_p\exp[-i(\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})\exp[(-\frac{x_i'-b_i'}{a_i'})]^2\varphi(x')\mathrm{d}x'\}=$$

$$\{\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\{C_p\exp[-i(\frac{x_i-b_i}{a_i})\exp[-(\frac{x_i-b_i}{a_i})]^2\varphi(x)\mathrm{d}x\}^2>0$$

因此，复高斯小波函数满足 Mercy 条件，可以作为核函数。

3 构建基于复高斯小波核函数的支持向量机

在样本集 $\{(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 中，$x_i\in R^d$ 为输入，y_i 为对应的输出，定义 ε 不敏感损失函数为

$$|y-f(x)|_\varepsilon=\begin{cases}0 & |y-f(x)|\leqslant\varepsilon\\ |y-f(x)|-\varepsilon & |y-f(x)|>\varepsilon\end{cases}$$

根据 SVM 构造如下回归估计函数：

$$f(x)=\langle\omega\cdot\phi(x)\rangle+b$$

其中：$\phi(x)$ 为从输入空间到高维特征空间的非线性映射；ω 为权值系数；b 为偏差。

优化目标是：

$$\min_{\omega,b,\xi}\frac{1}{2}\|\omega\|^2+C\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\xi_i^*)$$

$$\text{s.t.}\ |y_i-\langle\omega\cdot\phi(x)\rangle-b|\leqslant\varepsilon+\xi_i$$

$$\xi_i\geqslant 0,\xi_i^*\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$$

松弛变量 ξ、ξ_i^* 和惩罚因子 C 用于调节超出 ε 管道的样本点。对这个不等式约束下的目标函数进行拉格朗日优化，将其转换成无约束的二次规划问题，形式如下：

$$\max_{\alpha,\alpha*,\beta,\beta*}\ \min_{\omega,b,\xi}L(\omega,b,\xi,\xi^*)\tag{1}$$

其中：

$$L(\omega,b,\xi,\xi^*)=$$

$$\frac{1}{2}\|\omega\|^2+C\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\xi_i^*)-$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[\varepsilon+\xi_i-(y_i-\langle\omega\cdot\phi(x_i)\rangle-b)]-$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*[\varepsilon+\xi_i^*-(y_i-\langle\omega\cdot\phi(x_i)\rangle-b)]-$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\xi_i+\beta_i^*\xi_i^*)$$

其中：α、α^*、β、$\beta^*(i=1,2,\cdots,n)$ 是拉格朗日乘子。

根据鞍点定理，对 $L(\omega,b,\xi,\xi^*)$ 分别求 ω、b、ξ、ξ^* 的偏导数，并分别使其为零，然后将得到的结果代入到式(1)中，就把原问题转换为其对偶问题：

$$\max_{\alpha,\alpha*,\beta,\beta*}\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(\alpha_i-\alpha_i^*)(\alpha_j-\alpha_j^*)K(x_i,x_j)]-$$

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha_i^*)+\sum_{i=1}^{n}y_i(\alpha_i+\alpha_i^*)\}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_i^*)=0,0\leqslant\alpha_i\leqslant C,0\leqslant\alpha_i^*\leqslant C$$

根据库恩—塔克(Karush-Kuhn-Tucker)条件，下面关系成立：

$$\begin{cases}\alpha_i[\varepsilon+\xi_i-(y_i-\langle\omega\cdot\phi(x_i)\rangle-b)]=0\\ \alpha_i^*[\varepsilon+\xi_i^*-(y_i-\langle\omega\cdot\phi(x_i)\rangle-b)]=0\end{cases}$$

α、α^* 中必有一个为零，或者两者均为零，称 $\alpha\neq 0$ 相对应的样本点 x_i 为支持向量(SV)。在求解过程中只针对支持向量进行，从而就得到了支持向量机的回归估计预测函数：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_i^*)\langle\phi(x_i)\cdot\phi(x)\rangle+b=$$

$$\sum_{x\in SV}(\alpha_i-\alpha_i^*)K(x_i,x)+b$$

其中：$K(x_i,x)$ 为核函数。本文选用复高斯小波核函数。

4 应用实例

给定一个非线性系统，输入/输出满足以下关系：

$$\begin{cases}y(t)=1+y^2(t-1)u_1(t)++u_2^2(t)\\ y(0)=0\end{cases}$$

系统的输入为

$$\begin{cases}u_1(t)=0.8\cos(\frac{8\pi t}{250})+0.2\cos(\frac{4\pi t}{40})\\ u_2(t)=p_1\sin(\frac{2\pi t}{250})+p_2\sin(\frac{2\pi t}{40})\end{cases}$$

输入中加入 1% 的随机白噪声，输出用 y_1 表示。

把 u_2 作为扰动输入，扰动强度通过参数 p_1 和 p_2 进行控制，它们的取值范围为[0.1,0.9]，步长为 0.001，从而获得 1 000组输入/输出关系。等时间间隔取 600 个数据用做训练数据、400 个数据用做辨识；惩罚因子 $C=36.13$，$\varepsilon=0.001$。用

学习得到的参数对测试集作测试，从而得到后 100 个数据的预测结果。数据的原始信号如图 1 所示。提取的低频特征及高频特征如图 2、3 所示。后面 10 s 获取的 100 个采样点的测量值和预测值如图 4 所示。

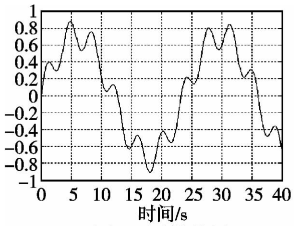

图1　原始信号

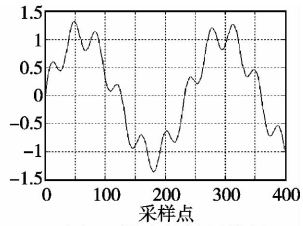

图2　提取的低频特征

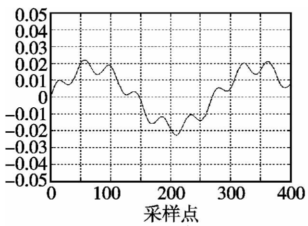

图3　提取的高频特征

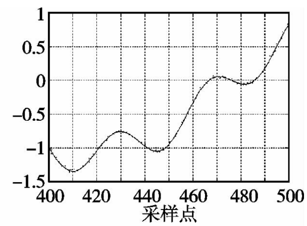

图4　预测结果

定义相对误差指标为

$$E_{rr}=[(y_F-y_R)/y_R]\times 100\%$$

后 10 s 对应的 100 个采样点的预测误差如图 5 所示。

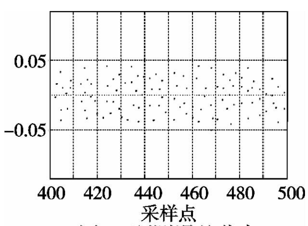

图5　预测误差分布

在同等条件下采用高斯核函数和尺度核函数与本文采用的复高斯小波核函数获得的结果对比分析如表 1 所示。

表 1　对比分析采样点分布概率　　/%

核函数类型	相对误差≤5.00%	相对误差≤3.00%
高斯核函数	99.00	91.00
尺度核函数	100.00	95.00
复高斯小波核函数	100.00	98.00

表 1 表明：对这类信号，采用复高斯小波核函数可以取得较好的预测效果。

5　结束语

本文首先对复高斯小波满足 Mercy 定理作了证明，表明其可以作为 SVM 的核函数；并且构建了基于复高斯小波核函数的支持向量机，将该支持向量机用于对非线性动态信号进行参数辨识和对未知部分的预测。从仿真结果可以看出，其预测效果好于常用的高斯核函数和尺度核函数，从而验证了复高斯小波 SVM 的有效性和优越性。基于核函数方法的 SVM 建立在结构风险最小化 SRM 准则之上，同时控制经验风险和置信范围，因此具有良好的推广能力，即使在小样本情况下也表现出了较强的推广能力。

参考文献：

[1] SOHN H, FARRAR C R. Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals[J]. Smart Materials and Structures, 2007, 10(3): 446-451.

[2] VAPNIK V N. 统计学习理论[M]. 张学工，译. 北京：清华大学出版社，2000.

[3] 李国政，王猛. 支持向量机导论[M]. 北京：电子工业出版社，2004.

[4] 李元诚，方廷健. 小波支持向量机[J]. 模式识别与人工智能，2004, 17(2): 167-172.

[5] 林继鹏，刘君华. 基于小波的支持向量机算法研究[J]. 西安交通大学学报，2005, 39(8): 816-820.

[6] 王军，彭宏，肖建. 尺度核支持向量回归的非线性系统辨识[J]. 系统仿真学报，2006, 18(9): 2429-2432.

[7] 朱家元，杨云，张恒喜，等. 支持向量机的多层动态自适应参数优化[J]. 控制与决策，2004, 19(2): 223-225.

[8] 李昆仑，黄厚宽，田盛丰. 模糊多类 SVM 模型[J]. 电子学报，2004, 32(5): 830-832.

[9] 张学工. 关于统计学习理论与支持向量机[J]. 自动化学报，2000, 26(1): 32-42.

[10] HSU C W, LIN C J. A comparison of methods for multi-class support vector machines [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2002, 13(2): 415-425.

[11] 蒋刚. 基于模糊支持向量核回归方法的短期峰值负荷预测[J]. 控制理论与应用，2007, 24(6): 986-990.

[12] 宋红宇，董敏勤. 基于支持向量机的模糊回归估计[J]. 上饶师范学院学报，2009, 29(3): 19-22.

[13] 施冬梅. 支持向量机非线性系统模型辨识的研究[J]. 太原师范学院报：自然科学版，2009, 8(2): 53-56.

[14] 边肇祺，张学工. 模式识别[M]. 北京：清华大学出版社，2000.