

一种采用完全 Logistic 混沌的 PSO-GA 优化方法^{*}

黄为勇

(徐州工程学院 信电工程学院, 江苏 徐州 221111)

摘要: 为了提高粒子群优化算法的性能,提出了一种完全 Logistic 混沌粒子群优化与遗传算法的混合优化方法。该方法将具有伪随机性与遍历性特征的 Logistic 混沌应用到粒子群算法的粒子位置和速度初始化、惯性权重优化、随机常数以及局部最优解邻域点产生的全过程,并在粒子速度和位置更新后再与遗传算法相混合,进行选择 and 交叉操作。三种典型 Benchmark 函数的实验结果验证了所提方法的有效性,该方法具有更好的寻优能力与收敛速度。

关键词: 混沌优化; Logistic 混沌; 粒子群优化; 遗传算法

中图分类号: TP181; TP301.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)09-3236-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.09.009

Hybrid optimization method through complete Logistic chaotic particle swarm optimization and genetic algorithm

HUANG Wei-yong

(School of Information & Electrical Engineering, Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou Jiangsu 221111, China)

Abstract: In order to improve the optimization performance of particle swarm optimization, this paper proposed a new algorithm called complete Logistic chaotic particle swarm optimization combined with genetic algorithm. Logistic chaos search, which had the property of pseudo-randomness and ergodicity, was applied to the initialization of position and velocity of initial swarm, the optimization of inertia weight, the generation of random constant and the generation of the local optimum neighborhood point. After the particle velocity and position were updated, it embedded genetic algorithm in the complete Logistic chaotic particle swarm optimization, to perform the operation of selection and crossover. Experimental results with three typical Benchmark functions show that the proposed algorithm is effective, and has better search property and convergence speed.

Key words: chaotic optimization; Logistic chaos; particle swarm optimization; genetic algorithm

0 引言

粒子群优化算法 (particle swarm optimization, PSO) 是美国 Kennedy 和 Eberhart 博士受鸟类群体行为研究结果的启发而提出的一种全局优化技术,在许多领域得到了应用^[1,2]。但由于该算法存在初始化过程的随机性、粒子进化过程的随机性以及过早地收敛到局部最优等问题,大量学者在 PSO 算法的行为分析和收敛性分析方面进行了许多理论和实验研究工作。文献[3]利用差分方程理论对 PSO 算法的收敛特性进行了较为深入的研究,证明了粒子轨迹和粒子速度对算法收敛性具有重要的影响,其参数选取是影响算法性能和效率的关键因素。由于 PSO 的惯性权重 ω 对算法能否收敛具有重要作用,目前的许多研究都集中于 ω 的改进上。在最初版本的 PSO 中, ω 为常数,为使算法具有较强的全局搜索能力,文献[4]提出了随着迭代的进行线性地减小 ω 的策略。但该方法存在迭代初期局部搜索能力较弱,即使初始粒子已接近于全局最优,也往往错过;而在迭代后期,则因全局搜索能力变弱,而易陷入局

部极值的问题。文献[5]提出的非线性递减策略显然亦会存在这些问题。文献[6]采用模糊规则动态调整 ω 的方法,通过对当前最好性能评价和当前惯性权重制定相应的隶属度函数和模糊推理规则,确定惯性权重 ω 的增量。由于算法需要获取领域知识建立模糊规则,故其实现比较复杂,无法得到广泛应用。

由于混沌运动具有伪随机性、遍历性、对初始条件敏感性等特点,加之混沌信号产生机理简单,具有内在并行性的优点,采用基于混沌的搜索技术无疑更具优越性^[7]。基于此,文献[8]提出了利用混沌运动特性进行优化搜索的方法,该方法直接采用混沌变量进行搜索,搜索过程按混沌运动自身的规律进行,不需要像随机优化方法按某种概率接受“劣化”解的方式来跳出局部最优解,使得该算法在一定的范围内具有遍历性,具有更容易跳出局部最优、结构简单以及使用方便的优点。文献[9~11]将混沌搜索应用到 PSO 粒子的位置和速度进行初始化,从而保证了初始变量随机性。但由于这些算法中的其他参数以及局部最优解邻域点的产生仍然是以普通的随机数

收稿日期: 2012-02-15; 修回日期: 2012-03-30 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50534050); 江苏省高校自然科学基金研究计划资助项目(06KJD460174)

作者简介: 黄为勇(1963-),男,江苏江都人,副教授,博士,主要研究方向为计算机测控与智能信息处理技术(h_weiyoung@163.com)。

的形式出现,并不能从根本上保证算法的种群多样性和解空间上优化的遍历性,本质上是一种不完全的混沌优化方法。

本文将 Logistic 混沌搜索嵌入到 PSO 算法的初始种群产生,惯性权重 ω 优化,随机常数 r_1, r_2 , 以及局部最优解邻域点产生的全过程,在此基础上提出了一种完全 Logistic 混沌粒子群优化算法 (CLCPSO)。该算法利用混沌特性提高种群的多样性和粒子搜索的遍历性,将混沌状态引入到优化变量使粒子获得持续搜索的能力,改善粒子群优化算法摆脱局部极值点的能力,以克服 PSO 算法的早熟、易陷入局部极值等固有缺陷,提高算法的精度。进一步的研究表明,某些状态的混沌搜索优化时间比较长,为此本文又将 CLCPSO 算法与另一种智能优化算法——遗传算法 (GA) 进行融合,提出了一种基于完全 Logistic 混沌的粒子群与遗传算法的混合优化算法 (CLCPSO-GA)。实验结果表明,该算法能充分利用混沌搜索的多样性和遍历性,以及粒子群优化算法和遗传算法的互补特性,使算法不仅具有持续、精细的局部搜索能力,而且具有良好的全局寻优能力和较高的收敛速度。

1 基本粒子群优化算法

假设在一个 d 维的目标搜索空间中,由 m 个代表潜在问题解的粒子组成一个种群 $S = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, 其中 $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 表示第 i 个粒子在 d 维解空间的一个矢量点。将 X_i 代入一个与求解问题相关的目标函数可以计算出相应的适应值。用 $P_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{id}\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 记录第 i 个粒子自身搜索到适应值为最小的最好点 (pbest), 用 $P_g = \{p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gd}\}$ 记录整个种群中的粒子的适应值为最小的最好点 (gbest), 其中 g 为编号, $g \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。用 $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{id}\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 表示第 i 个粒子的速度,则基本粒子群优化算法的主要计算流程描述如下:

a) 初始化,设定加速常数 c_1, c_2 , 最大进化代数 $T_{\max}$, 将当前进化代数置为 $k = 1$, 在定义空间 R^n 中随机产生 m 个粒子 $S = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, 组成初始种群 $S(k)$, 并随机产生各粒子初始速度和位置。

b) 计算每个粒子在每一维空间的适应值。

c) 比较粒子的适应值和自身最优值 pbest。如果当前值比 pbest 更优,则置 pbest 为当前值,并设 pbest 位置为 n 维空间中的当前位置。

d) 比较粒子的适应值与种群最优值 gbest。如果当前值比 gbest 更优,则重置 gbest 的编号。

e) 采用下面的公式:

$$V_i^{k+1} = \omega V_i^k + c_1 r_1 (P_i^k - X_i^k) + c_2 r_2 (P_g^k - X_i^k) \quad (1)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1} \quad (2)$$

更新粒子的速度和位置,产生新种群 $S(k+1)$ 。

f) 检查结束条件,若满足,则结束寻优;否则, $k = k + 1$, 转至 b)。结束条件为寻优达到最大进化代数 $T_{\max}$ 或足够好的适应值。

由于上述算法中所涉及的参数较少,公式也比较简单,可将此称为基本粒子群优化算法 (basic particle swarm optimization, BPSO)^[12]。

2 完全 Logistic 混沌粒子群优化算法

分析 BPSO 算法,可以发现该算法存在如下不足:

a) 初始化过程是随机的,随机过程不能完全保证初始种群分布均匀,不能保证个体的质量,种群中有一部分远离最优解。

b) 式(1)中的 r_1, r_2 是均匀分布于 $[0, 1]$ 间的两个随机数,导致粒子进化过程的随机性,使 pbest 和 gbest 的更新带有一定的盲目性,影响了进化过程的收敛。

c) 存在早熟收敛问题。利用式(1)(2)更新自己的速度和位置,其本质是利用粒子本身、个体极值和全局极值三种信息来指导粒子下一步迭代位置,当某些粒子的位置及其 pbest 接近群体的 gbest 时,其速度更新由 ωV_i^k 决定。当 $\omega < 1$ 时,粒子的运行速度越来越小,接近于零,粒子运行出现惰性。随着进化的进行,其他粒子将很快聚集到这些惰性粒子的周围,使进化过早地收敛到局部最优值。

混沌是存在于非线性系统中的一种较为普遍的现象,是由确定性规则导致的对初始条件非常敏感的无固定周期的长期行为,是存在着精致内在结构的一类现象。混沌运动具有遍历性、伪随机性、规律性等特点,能在一定范围内按其自身的规律不重复地遍历所有状态^[13];加之混沌信号产生机理简单,具有内在并行性的优点,采用混沌的搜索技术无疑会比其他随机搜索更具优越性。

对于求解 d 维最优化问题,相当于在 d 维空间中确定一个使目标函数值最小的点,为此需要用 d 个独立的混沌变量序列来产生该空间中点的 d 个坐标分量。因为每一坐标分量都能在 $[0, 1]$ 中稠密,所以这样产生的点将能在 d 维单位超立方体中稠密,即这些点的序列能够以任意精度逼近超立方体中所有点,当然也能以任意精度逼近超立方体中的全局最优解^[8]。通过产生一组与优化变量相同数目的混沌变量,用类似载波的方式将混沌引入优化变量使其呈现混沌状态,并把混沌运动的遍历范围放大到优化变量的取值范围,然后直接利用混沌变量搜索,以使解跳出局部极值区间,同时有利提高搜索精度。

产生混沌的数学模型有多种,本文采用 Logistic 方程构造混沌序列:

$$x(t+1) = \mu x(t)(1-x(t)) \quad t=0, 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

其中: μ 是控制参数; t 是迭代次数。

当 $0 < x(0) < 1, \mu = 4$ 时, Logistic 方程处于完全混沌状态,此时 $x(t)$ 的轨迹是混沌轨迹且在 $(0, 1)$ 之间遍历。由任意初值 $x(0) \in [0, 1]$ 可迭代出一个确定的时间序列 $x(1), x(2), x(3), \dots, x(n+1)$ 。

根据混沌优化的思想,本文提出了 CLCPSO 算法,其基本思想体现在如下几个方面:

a) 采用混沌系列初始化粒子的位置和速度,既利用混沌特征提高了种群的多样性和粒子搜索的遍历性,又不改变粒子群优化算法初始化时所具有的随机性本质。

b) 为了能够有效地平衡全局和局部搜索,改善算法寻优性能,使得收敛速度进一步加快,将混沌状态引入到惯性权重 ω 优化,使粒子获得持续搜索的能力。本文采用下式进行 ω 的

混沌化,再将惯性权值映射至 (α, β) 区间。

$$\omega(i+1) = 4.0\omega(i)(1-\omega(i)) \quad (4)$$

$$\omega(i) = \alpha + (\beta - \alpha)\omega(i) \quad (5)$$

其中: $i=1, 2, \dots, T_m$, T_m 为最大迭代次数;惯性权值范围取 $\alpha=0.4, \beta=0.9$ 。

c) 为克服随机取值带来的效率低下的不足,提高收敛性,将混沌引入到随机常数 r_1, r_2 中,按 Logistic 映射动态更新:

$$r_i(t+1) = 4.0r_i(t)(1-r_i(t)) \quad (6)$$

其中: $r_i(t) \in (0, 1), i=1, 2$ 。

d) 以当前整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为基础产生混沌序列,用产生的混沌序列中的最优位置粒子替代当前粒子群中的一个粒子的位置。引入混沌序列的搜索算法可在迭代中产生局部最优解的许多邻域点,以此帮助惰性粒子逃离局部极小点,并快速搜寻到最优解。

设寻优问题的目标函数为

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, \dots, x_d) \\ \text{s.t. } a_i \leq x_i \leq b_i \quad i=1, 2, \dots, d \end{aligned} \quad (7)$$

完全的 Logistic 混沌粒子群优化算法可描述如下:

a) 初始化设置最大允许迭代次数或适应度误差限,以及算法的学习因子 c_1 和 c_2 。

b) 混沌初始化粒子位置和速度。

(a) 随机产生一个 d 维每个分量数值在 $0 \sim 1$ 之间的向量, d 为目标函数中的变量个数,根据式(3)得到 N 个向量。

(b) 将各个分量载波到对应变量的取值区间。

(c) 计算粒子群的适应值,并从 N 个初始群体中选择性能较好的 M 个解作为初始解,随机产生 M 个初始速度。

c) 如果粒子适应度优于个体极值 p_{best} ,则将 p_{best} 设置为新位置。

d) 如果粒子适应度优于全局极值 g_{best} ,则将 g_{best} 设置为新位置。

e) 根据混沌后的式(1)(2)更新粒子的速度和位置。

f) 对最优位置 $P_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gd})$ 进行混沌优化。

(a) 将 $P_{gi}(i=1, 2, \dots, d)$ 映射到式(3)Logistic 方程的定义域 $[0, 1]$ 得

$$z_i = (P_{gi} - a_i) / (b_i - a_i) \quad i=1, 2, \dots, d \quad (8)$$

(b) 用 Logistic 方程进行迭代产生混沌变量序列 $z_i^m(m=1, 2, \dots)$ 。

(c) 把产生的混沌变量序列通过逆映射 $P_i^{(m)} = (P_1^{(m)}, P_2^{(m)}, \dots, P_d^{(m)}) (m=1, 2, \dots)$ 返回到原解空间,得

$$P_g^{(m)} = (P_{g1}^{(m)}, P_{g2}^{(m)}, \dots, P_{gd}^{(m)}) \quad m=1, 2, \dots \quad (9)$$

g) 在原解空间对混沌变量经历的每一个可行解 $P_g^{(m)}$ 计算其适应值,得到性能最好的可行解 p^* ,用 p^* 取代当前群体中任意一个粒子的位置。

h) 若满足停止条件,则搜索停止,输出全局最优位置;否则返回步骤c)。

3 完全 Logistic 混沌粒子群—遗传算法

Logistic 混沌粒子群优化算法在一定的范围内具有遍历性、具有更容易跳出局部最优优点的优点。研究表明,某些状态

需要较长时间才能到达,若最优状态恰好在这些状态上,则搜索优化的时间势必会很长。针对这一不足,本文将该算法与遗传算法进行集成,提出了一种完全 Logistic 混沌的粒子群—遗传优化算法(CLCPSO-GA),以降低其搜索时间。

遗传算法^[14](genetic algorithm, GA)是由 Holland 提出来的,一种基于模仿自然界生物进化思想的,在目标空间内进行有导向的智能随机全局优化算法。遗传算法就是从初始种群出发,通过对种群执行选择、交叉和变异等操作,实现新一代种群,在这种不断进化的机制中,种群的适应度得到提高,进而获得优化问题的全局最优解。粒子群算法和遗传算法两者目标相近,而方法相异,在许多方面具有互补之处,本文将上述完全混沌粒子群优化与遗传算法进行集成,提出了一种完全 Logistic 混沌的粒子群—遗传算法集成的混合优化算法(CLCPSO-GA),该算法流程可描述如下:

a) 参数初始化。

b) 调用第2章的完全 Logistic 混沌粒子群优化算法,得到在原解空间对混沌变量经历的每一个可行解 $P_g^{(m)}$,并计算其适应度值。

c) 根据适应度值,执行遗传算法的选择、交叉操作,生成新一代种群。

d) 判断是否满足算法的停止条件(误差小于设定值或达到最大迭代次数),若满足,算法结束,输出最优解;否则返回步骤b)。

上述优化算法中采用实数编码方法,这不仅使算法具有精度高、搜索空间较大的特点,而且有利于两种优化方法的集成。

4 仿真算例及算法性能分析

针对函数优化问题,从文献[15]中选取了如下三个典型函数标准测试函数进行分析,以验证 CLCPSO-GA 算法的有效性和优化性能。

1) 测试函数 I (六峰驼背函数)

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (4 - 2.1x^2 + \frac{x^4}{3})x^2 + xy + (-4 + 4y^2)y^2 \\ &- 3 \leq x \leq 3 \\ &- 2 \leq y \leq 2 \end{aligned} \quad (10)$$

求最小值。

2) 测试函数 II (DeJong 函数)

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= 100(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2 \\ &- 2.048 \leq x \leq 2.048 \\ &- 2.048 \leq y \leq 2.048 \end{aligned} \quad (11)$$

求最小值。

3) 测试函数 III (RosenBrock 函数)

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= 100(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2 \\ &- 2.048 \leq x \leq 2.048 \\ &- 2.048 \leq y \leq 2.048 \end{aligned} \quad (12)$$

求最大值。

上述三个标准测试函数具有如下特点:六峰驼背函数有六个局部极小值,一个全局最小值,可以检测算法逃离局部最优优点的能力;DeJong 函数是一个病态函数,仅有一个全局极小点,但难以进行全局最小化;RosenBrock 函数有一个全局极大

点和局部最大点,并且极易陷入局部最大点。

在实验中,最大进化代数取 500,种群规模为 50, c_1 、 c_2 取值 2,遗传交叉概率 P_c 取 0.9,选择适应度高的前 50% 个体进入下一代,计算精度为 10^{-4} 。重复进行了仿真实验 50 次,BP-PSO 和 CLCPSO 都采用实数编码,应用收敛次数和平均收敛代数来衡量和评价不同算法的性能,实验结果如表 1 所示。为了便于对比,表 1 同时也列出了基本粒子群(BPSO)算法、完全 Logistic 混沌的粒子群(CLCPSO)算法的实验结果。

由表 1 中数据可以看出:

a)与 BPSO 算法相比,本文提出的 CLCPSO 算法和 CLCPSO-GA 算法在三个测试函数上都能得到最优解,说明完全 Logistic 混沌搜索具有更强的全局和局部搜索能力,并在克服早熟收敛方面有较好的表现。

b)与 BPSO 算法相比,本文提出的 CLCPSO 算法在收敛速度上优于 BPSO 算法,平均收敛代数大幅下降。六峰值驼背函数的平均收敛代数为 86.2,比 BPSO 算法下降了 57.2%;DeJong 函数的平均收敛代数为 101.1,比 BPSO 方法下降了 57.1%;RosenBrock 函数的平均收敛代数为 75.6,比 BPSO 算法降低了 55.3%。

c)与 CLCPSO 算法相比,本文提出的 CLCPSO-GA 算法在收敛速度方面又有明显的改进和提高。六峰值驼背函数的平均收敛代数为 32.9,比 CLCPSO 算法下降了 61.83%;DeJong 函数的平均收敛代数为 43.1,比 CLCPSO 算法降低了 59.15%;RosenBrock 函数的平均收敛代数为 35.6,比 CLCPSO 算法降低了 52.91%。

表 1 不同算法的性能对比

函数	收敛次数			平均收敛代数		
	BPSO	CLCPSO	CLCPSO-GA	BPSO	CLCPSO	CLCPSO-GA
六峰值驼背函数	41	50	50	201.2	86.2	32.9
DeJong 函数	40	50	50	235.5	101.1	41.3
RosenBrock 函数	45	50	50	169.2	75.6	35.6

由算法流程可以看出:

a)本文所提算法的主体是完全混沌粒子群算法,克服了传统的混沌粒子群优化方法的不彻底性,避免了传统粒子群算法的随机性和盲目性,具有精细的局部搜索能力。

b)在粒子的速度和位置更新后再进行遗传算法的选择和交叉运算,其操作相当于在粒子群算法中加入了扰动或变轨,在保证种群多样性的同时,在某种程度上可以跳出局部最优解,加快了寻优的速度。

c)该算法主要操作都集中在适应度的计算上,可用种群个体适应度计算的时间复杂度作为算法的时间量度,故该算法的时间复杂度为 $O(mdt)$ 。在相同的种群规模与维数的目标优化时,算法的运行时间却比传统 PSO 要短,上述三种典型 Benchmark 函数的仿真实验结果也验证了这一点。

d)该算法的空间复杂度由初始种群所占的空间来度量,其空间复杂度为 $O(md)$,故该算法在具有更好的寻优能力和求解效率的同时,其空间复杂度并没有增加。

5 结束语

本文提出的完全 Logistic 混沌的粒子群—遗传优化算法把 Logistic 混沌引入到基本粒子群算法的初始种群产生,惯性权重 ω 优化,随机常数 r_1 、 r_2 ,以及局部最优解邻域点的产生等全过程,并将遗传算法嵌入到 Logistic 混沌粒子群优化算法中,进行选择与交叉运算。该算法具有混沌搜索的伪随机性与遍历性的特点,克服了传统混沌粒子群优化方法的不彻底性,避免了盲目随机性,使算法具有持续、精细的局部搜索能力;另一方面也发挥了遗传算法的优势,保证了种群的多样性,使其具有不易陷入局部最优的特点;同时减少了无效迭代的次数,提高了收敛速度。通过三种典型 Benchmark 函数的对比仿真实验结果表明,所提算法具有更好的寻优能力和求解效率。需要指出的是,本文仅对完全 Logistic 混沌进行了研究,与其他形式混沌特性的对比研究有待进一步的分析与探讨。

参考文献:

- [1] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle swarm optimization[C]//Proc of IEEE International Conference on Neural Network. Piscataway: IEEE Press, 1995:1942-1948.
- [2] EBERHART R C, KENNEDY J. A new optimizer using particle swarm theory[C]//Proc of the 6th International Symposium on Micro Machine Human Science. Piscataway: IEEE Press, 1995:39-43.
- [3] 唐贤伦. 混沌粒子群优化算法理论及应用[D]. 重庆:重庆大学, 2007.
- [4] SHI Y, EBERHART R C. A modified particle swarm optimizer[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 1998:69-73.
- [5] 肖高超,王强,常荣荣,等. 一种动态惯性权重的粒子群优化算法[J]. 广西师范大学学报:自然科学版, 2008, 26(3):161-164.
- [6] SHI Yu-hui, EBERHART R C. Fuzzy adaptive particle swarm optimization[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 2001.
- [7] 王铁君, 邹月春. 基于混沌粒子群算法的物流配送路径优化[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(29):218-221.
- [8] 张国平,王正欧,袁国林. 求解一类组合优化问题的混沌搜索法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5):102-105.
- [9] 吴秋波,王允诚,赵秋亮,等. 混沌惯性权重调整策略的粒子群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(7):49-51.
- [10] 黄美灵,赵之杰,浦立娜,等. 基于自适应 Tent 混沌搜索的粒子群优化算法[J]. 计算机应用, 2011, 31(2):485-489.
- [11] 赵志刚,常成. 自适应混沌粒子群优化算法[J]. 计算机工程, 2011, 37(15):128-130.
- [12] 潘立登,李大字,马俊英. 软测量技术原理与应用[M]. 北京:中国电力出版社, 2009.
- [13] ATAEE M, LOHMANN B, KHAKI-SEDIGH A, et al. Model based method for estimating an attractor dimension from uni/multivariate chaotic time series with application to Bremen climatic dynamics[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 19(5):1131-1139.
- [14] HOLLAND J H. Adaption in nature and artificial systems[M]. Michigan: The University of Michigan Press, 1975.
- [15] 王文义,秦广军,王若雨. 基于粒子群算法的遗传算法研究[J]. 计算机科学, 2007, 34(8):145-147.