给定费用下单设施点灾民优化安置模型*

杨建芳[1,2], 高　岩[1], 党亚峥[1]
(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 杭州电子科技大学 运筹与控制研究所, 杭州 310018)

摘　要: 在地震、洪灾等自然灾害过后,需要及时合理地转移灾民,如何在给定费用下合理安置灾民是救灾工作的重要组成部分。考虑了给定费用下单设施点的灾民安置问题,假设城市道路交通稳定的情况下转换成最短路树来处理,结合反向定位的思想给出数学模型,以最低费用安置所有的灾民。在此基础上以最小费用改善最大距离贪婪的原则来调整解,使得被安置的灾民离原有设施点的距离加权和尽可能小。通过算例验证了该算法的有效性和可行性。

关键词: 灾民安置; 单设施点; 最短路树; 贪婪算法
中图分类号: TP391　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1001-3695(2012)09-3229-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.09.007

Single facility model of victims optimal placement under given budget

YANG Jian-fang[1,2], GAO Yan[1], DANG Ya-zheng[1]
(1. *School of Business*, *University of Shanghai for Science & Technology*, *Shanghai* 200093, *China*; 2. *Institute of Operational Research & Cybemetics*, *Hangzhou Dianzi University*, *Hangzhou* 310018, *China*)

Abstract: After earthquakes、floods and other natural disasters, it must transfer victims in time. How to place victims reasonably is an important part of disaster relief work. This paper considered a single facility model of victims optimal placement under the given budget. It supposed the traffic network of the city was stable, so it transformed the city net into a shortest path tree. This paper presented a mathematical model based on reverse location problem, and gave the worst placement. It adjusted the solution of the worst placement by greedy algorithm step by step, until the reasonable placement was obtained. Finally, it set an example to verify the feasibility of this algorithm.

Key words: victims placement; single facility; shortest path tree; greedy algorithm

0　引言

近几年灾害事故频发,如 2008 年的汶川大地震、2009—2010 年的西南地区干旱、西北雪灾、全国大范围的洪灾等,使得应急管理的作用在社会上日显突出,众多专家学者基于不同的实际背景采用不同方法进行了这方面的研究,并取得了大量的研究成果。刘春林等人[1~4]采用区间数和模糊学的相关知识对不同应急情况进行研究。韩强[5]利用双层规划把多出救点多应急点之间的单资源物资调度问题转换为带限制的运输问题来处理。Wang 等人[6]考虑了在单资源连续消耗的情况下,利用迭代算法来安排资源的有效调度。闫妍等人[7]研究了网络正常运行和有单一节点失效情况下供应链的应急调度问题。而潘郁等人[8]则利用粒子群算法对连续消耗资源的调度进行了研究。陈岳明等人[9]研究了以应急时间最短为优化目标的应急系统车辆调度,并采用下降方向搜索法(即凸组合算法)设计了对目标行数进行求解的算法。根据实际情况,有时不仅需要考虑费用问题,而且还需要考虑应急产生的效应。方磊[10]从应急资源投入产出的整体相对效率考虑,提出了新的资源优化配置的非参数 DEA 模型,对应急资源总体利用情况进行了评价。Beraldi 等人[11]给出了应急车辆定位的一个统计模型,根据其不确定性的特点采用随机处理方式给出了有效启发式解决方案。

上述研究在模型的建立和算法研究上都能很好地对应急资源进行调度,但考虑的都是灾害发生以后如何合理进行资源调度和及时进行有效救援。而灾后需要及时合理地转移灾民也是救灾工作的重要组成部分。不少文献讨论了与灾后移民相关的文化、社会及经济各方面的整合问题[12~16],但当前文献中却没有从优化的角度讨论灾民的安置问题,即考虑如何利用现有预算合理安置灾民,使得已有公共设施发挥更好的效益,也即设施点已经固定,如何利用给定的预算来改善网络结构使得解尽可能优化。这类问题称为反向定位问题。

反向定位问题是定位问题新兴的一个分支。Berman 等人[17,18]讨论了极小化极大值和极小化加权和的反向定位问题,并指出在一般网络图中该类问题是 NP 难题。Zhang 等

收稿日期: 2012-02-09; **修回日期**: 2012-03-23　**基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(11171221,11071219);国家自然科学天元基金资助项目(11026107);上海市重点学科建设项目(S30501);浙江省自然科学基金资助项目(Y6090080,Y1090465);浙江省教育厅基金资助项目(Y201016901)

作者简介: 杨建芳(1978-),女,讲师,博士研究生,主要研究方向为系统分析与集成(jianfangyang@126.com);高岩(1962-),男,教授,博导,博士,主要研究方向为非光滑优化、非线性系统和混杂系统的稳定性与生存性, 系统分析与集成;党亚峥(1974-),女,博士,主要研究方向为系统分析与集成.

人[19]利用最小割的算法讨论了树状网络上只有一个设施点的极小化极大值的反向定位问题。Burkard 等人[20,21]研究了圈图中只有一个实施点以及树状网络上两个设施点对应的极小化加权和的反向定位问题。

以上研究的反向定位问题都是考虑如何改善网络中的边使得原有解尽可能优化,但在实际中存在另一种情形,如前面提到的灾民安置问题,考虑的则是如何改变节点的权重。本文结合这一实际背景,提出改变节点权重的反向定位问题,即研究如何在给定预算下增加节点的权重,使得这些新增的用户到原有设施的距离加权和最小化。

1 问题描述及模型建立

地震、洪灾等自然灾害过后,必然导致有些地方不再适合人类居住,这样就需要重新安置灾区的民众,政府往往需要拨付一定的救助款项来解决该问题。该问题通常可以通过重建城市或者把这些灾民安置在已有的城市加以解决。由于这些现存城市本身有容量的限制以及安置费用的限制,就需要考虑如何合理有效地安置灾民,使得城市原有的公共设施尽可能发挥更好的效用。城市是由众多居民小区和一些特殊部门组成的,如果将它们看成网络中的节点,居民小区居住的人数看成节点的权重,连接它们的道路看成网络中的弧,那么整个城市就可以看成一个无向赋权图。若把城市中心看成一个设施点,考虑在给定费用下如何在该城市中安置迁移来的灾民,使得灾民的生活尽可能便利,也就是使得大家离市中心地带距离加权和尽可能小。

给定一个无向网络 $G=(V,E,D;u,w,c;L,B)$。其中,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为 G 的节点集,表示城市中有 n 个可供安置灾民的居民小区;$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为连接 G 中各个节点间的弧集;$D=\{d_{ij}\}$ 表示连接节点 i 与 j 弧的长度;u_i 和 w_i 分别表示节点 v_i 能够接收灾民的最小和最大安置量;c_i 表示在节点 v_i 每安置单位灾民的费用;L 表示必须要安置灾民的总数量;B 表示政府给出的安置费用。设节点 s 是城市中心,可以理解为公共设施点所在的位置,不妨假设整个城市的道路交通状况是稳定的,则每个居民区的居民总是沿着最短路径到达设施点 s,这样就可以把一般网络转换为由设施点 s 到各个节点的最短路树上来研究,用来表示节点 v_i 到中心设施点 s 的最短路的长度,则问题可以表述为

$$(\mathrm{P})\quad \min F(x,s)=\sum_{i=1}^{n}x_i d_i$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}c_i x_i\leqslant B,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=L$$

$$u_i\leqslant x_i\leqslant w_i;i=1,2,\cdots,n$$

解决该问题就是在给定费用下确定每个居民区实际安置人数 x_i,一方面要保证所有待安置的灾民居有定所,都能够得到及时安置;另一方面要使得所有居民到设施点的距离加权和尽可能最小化,也就是使设施点尽可能提供便利服务。由于新安置的居民并不影响原住居民到设施点距离加权和,所以目标函数中只考虑新增加的居民。

为了简化模型,不妨设 $u_i=0$,如果对于每个居民区灾民安置有最小安置量限制的话,首先在每个居民区按 u_i 安置,再对剩下的灾民进行优化安置。

2 灾民安置问题的算法设计

由于目标函数是要求各个节点到设施点 s 距离加权和最小化,所以就希望灾民尽可能被安置在靠近设施点的居民小区。如果每个居民区安置灾民的单位费用 c_i 都等于某一常数 c,则问题相对比较简单,可以采取贪婪算法求得最优安置。首先求出设施点 s 到所有节点的最短路径,并计算最短路径的长度 d_i;对所有的 d_i 按从小到大进行排序,离设施点距离最近的居民区按最大安置量 w_i 来安置灾民,依此类推,直到安置好所有灾民为止。当然这里要求 $B\geqslant cL$,否则,无论如何安置,都无法保证所有灾民能够得到安置。

但实际情况一般不是这么理想,每个居民区安置灾民的单位费用往往不一样,如房价、物价等因素必然导致繁华地段的安置成本要比偏远地段高。如果按贪婪算法尽可能在设施点附近安置灾民,可能会导致费用不够,使得另一部分灾民无法得到安置;如果采取保守的方式,先在费用低的偏远地方饱和安置灾民,便会出现没有充分利用好预算费用的情况。

这里不妨假设 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$,同时要求安置费用随着距离的增加而减少,即满足 $c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n$。首先考虑两种特殊安置方式:最低安置和最高安置。最低安置从单位安置费用最小的小区开始饱和安置,得到解 $\underline{x}=\{0,\cdots,0,L-\sum_{i=k+1}^{n}w_i,\cdots,w_{n-1},w_n\}$。其中,$k+1$ 是表示最低安置方案中由远及近遇到的最后一个得到饱和安置的居民区。最高安置是从单位安置费用最高的小区开始饱和安置,得到解 $\bar{x}=\{w_1,w_2,\cdots,L-\sum_{i=1}^{r-1}w_i,0,\cdots,0\}$。其中,$r$ 是表示最高安置方案中第一个没有得到饱和安置的居民区。要求安置的预算费用 B 必须大于等于最低安置的费用:

$$B\geqslant\underline{B}=c_k(L-\sum_{i=k+1}^{n}w_i)+\sum_{i=k+1}^{n}c_i w_i \tag{1}$$

否则该问题没有可行解,无法保证安置所有灾民,同时要限制预算费用 B 小于最高安置的费用:

$$B<\bar{B}=\sum_{i=1}^{r-1}c_i w_i+c_r(L-\sum_{i=1}^{r-1}w_i) \tag{2}$$

否则按贪婪算法就可以求得最优解。

本文将最低安置方案 $\underline{x}=\{0,\cdots,0,L-\sum_{i=k+1}^{n}w_i,\cdots,w_{n-1},w_n\}$ 作为初始解,按以最小的费用期待改善最大距离的原则逐步来调节各个居民区的人数。不妨用 Δx_{ij} 表示由节点 j 调整到节点 i 的权重($j>i$),ΔB 表示进行最低安置后剩余费用,则问题 P 可以转换为以下极大问题:

$$(\mathrm{P}')\quad \max\sum_{i<j}\Delta x_{ij}(d_j-d_i)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i<j}\Delta x_{ij}(c_i-c_j)\leqslant\Delta B$$

$$x_j-\Delta x_{ij}\geqslant 0,\ x_i+\Delta x_{ij}\leqslant w_i$$

$$\Delta x_{ij}\geqslant 0,\ \forall\, i<j$$

下面考虑如何调整每个节点的灾民数,以期望改善的距离最大化。对于节点 j 和节点 i,定义 $r_{ij}=(d_j-d_i)/(c_i-c_j)$,表示单位费用改善的距离。首先求出所有满足 $j>i$ 的 r_{ij}。

算法 1 计算 r_{ij}。

a)令 $R:=\varnothing$,$i:=k$,$j:=k+1$,如果 $i\geqslant 1$,则执行步骤 b),否则转至步骤 d)。这里 k 的值由最低安置方案决定。

b)如果 $c_i-c_j\neq 0$,计算 $r_{ij}=(d_j-d_i)/(c_i-c_j)$,否则取 $r_{ij}=M$(这里 M 取足够大的数就可以),$R:=R\cup\{r_{ij}\}$。

c)$j:=j+1$,如果 $j\leqslant n$,则转至步骤 b),否则令 $k:=k-1$,转至步骤 a)。

d)输出集合 R。

利用贪婪的思想按照 r_{ij} 从大到小逐步改善解。

算法 2　求解问题 P。

a)从设施点 s 出发,利用 Warshall-Floyd 算法求出 s 到所有节点的最短路,得到一棵以 s 为根节点的树 T_s,并计算 s 到各个节点的最短路的长度 $d=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$。

b)输入 B、w、c、d、$x=\{0,\cdots,0,L-\sum_{i=k+1}^{n}w_i,\cdots,w_{n-1},w_n\}$、$R:=R$。

c)计算 $\Delta B=B-dx$,如果 $\Delta B=0$,则转至步骤 f),否则转步骤 d)。

d)选取集合 R 中最大的元素 r_{ij},同时有多个 r_{ij} 为最大值时,选择标号 j 大的作为调整对象,调整节点 j 的权重和节点 i 的权重,取 $\Delta x_{ij}=\min\{\Delta B/(c_i-c_j),x_j,w_i-x_i\}$。

e)如果 $\Delta x_{ij}=0$,则令 $R:=R-\{r_{ij}\}$,转至步骤 d);否则令 $x_j:=x_j-\Delta x_{ij}$,$x_i:=x_i+\Delta x_{ij}$,x 其他的分量保持不变,令 $x:=x$,转至步骤 c)。

f)输出 $x^*=x$,$F(x^*,s)$。

引理　任意给出三个节点 j、k、l 且满足 $l>k>j$,若有 $r_{kl}\geqslant r_{jk}$,则有 $r_{jl}\geqslant r_{jk}$;若有 $r_{jk}\geqslant r_{kl}$,则有 $r_{jl}\geqslant r_{kl}$。

证明　由问题的假设可知,当 $l>k>j$,则有 $d_l\geqslant d_k\geqslant d_j$、$c_l\leqslant c_k\leqslant c_j$ 同时成立,又由 $r_{ij}=(d_j-d_i)/(c_i-c_j)$ 的定义可知以下关系成立。

$$
\begin{gathered}
r_{kl}\geqslant r_{jk}\Leftrightarrow\frac{d_l-d_k}{c_k-c_l}\geqslant\frac{d_k-d_j}{c_j-c_k}\Leftrightarrow\\
(d_l-d_k)(c_j-c_k)\geqslant(d_k-d_j)(c_k-c_l)\Leftrightarrow\\
(d_l-d_k)(c_j-c_k)+(d_k-d_j)(c_j-c_k)\geqslant\\
(d_k-d_j)(c_k-c_l)+(d_k-d_j)(c_j-c_k)\Leftrightarrow\\
(d_l-d_k+d_k-d_j)(c_j-c_k)\geqslant\\
(d_k-d_j)(c_k-c_l+c_j-c_k)\Leftrightarrow\\
(d_l-d_j)(c_j-c_k)\geqslant(d_k-d_j)(c_j-c_l)\Leftrightarrow\\
\frac{d_l-d_j}{c_j-c_l}\geqslant\frac{d_k-d_j}{c_j-c_k}\Leftrightarrow r_{jl}\geqslant r_{jk}
\end{gathered}
$$

同理可得,当 $r_{jk}\geqslant r_{kl}$ 时,有 $r_{jl}\geqslant r_{kl}$ 成立。

定理　在算法 2 中,设 r_{ij} 是当前步骤的最大值,并且 $\Delta x_{ij}=0$,则在后面的步骤中不会再出现从节点 j 到节点 i 调整权重的情况。

证明　因为 $\Delta x_{ij}=\min\{\Delta B/(c_i-c_j),x_j,w_i-x_i\}$,所以分以下三种情况讨论。

a)当 $\Delta B/(c_i-c_j)=0$,显然成立。

b)当 $x_j=0$ 时,不妨假设后面调整步骤中又出现节点 j 到节点 i 的调整,由于此时 $x_j=0$,所以必然存在某个节点 $k(k>j)$ 首先调整部分权重到节点 j,才能使节点 j 拥有可以转移的权重。由于 r_{ij} 是当前步骤的最大值,所以 $r_{ij}\geqslant r_{jk}$,由引理 1 可知 $r_{ik}\geqslant r_{jk}$。因此,节点 k 的权重直接转移到节点 i,而不会出现先转到节点 j,再由节点 j 转到 i 的情况。

c)当 $x_i=w_i$ 时,类似于 b)中的分析,用引理 1 中另一个结论同理可得。

由定理显然有以下推论:

推论　在算法 2 中,设 r_{ij} 是当前步骤的最大值,并且 $\Delta x_{ij}=0$,则令 $R:=R-\{r_{ij}\}$,不影响解的搜索。

如果 Δx_{ij} 要求整数解,则问题 P′是 NP 完全问题。因为对应的整数规划相当于背包问题,算法 2 仍然可以求解问题 P,只要在步骤 d)中取 $\Delta x_{ij}=\min\{\lfloor\Delta B/(c_i-c_j)\rfloor,x_j,w_i-x_i\}$。算法的终止条件则为 $\Delta B<\min_{i,j}\{|c_i-c_j|\}$ 或者 $R=\varnothing$。如果 $\Delta B=0$,可以求得该整数规划的最优解。

3　实证分析

灾后移民安置是救灾工作的一项重要组成部分,既要考虑到实际的预算费用,又要尽可能让众多移民满意,合理有效地安置移民,可以产生更好的效益。设当前有 $L=100$ 人需要在某一城市安置,预算费用为 $B=800$ 万。该城市可以安置移民的居民小区以及城市设施点所在地和交通道路状况如图 1 所示,设施点 s 到各个节点的最短路树如图 2 所示,相应的数据如表 1 所示。

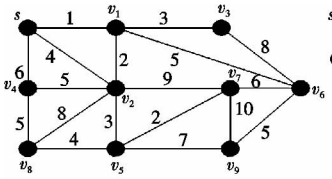

图1　城市网络图

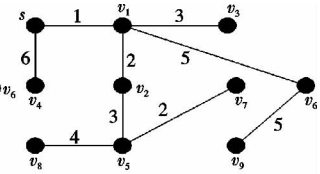

图2　设施点s到各个节点的最短路树节点的最短路树

表 1　各个节点对应的数据

节点 i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_i/km	1	3	4	6	6	6	8	10	11
c_i/万元	13	11	10	10	9	8	7	6	5
w_i	5	10	12	30	25	18	20	17	15

先按照最低安置费用来安置灾民,得到初始解 $\underline{x}=\{0,0,0,5,25,18,20,17,15\}$,由远及近遇到最后一个得到饱和安置的节点是 5,所以这里 $k=4$,已经花费的费用为 736 万元,求得 $\Delta B=64$ 万,目标函数 $F(\underline{x},s)=783$,利用算法 1 求解 R,如表 2 所示。

表 2　r_{ij} 的计算结果

r_{ij}	2	3	4	5	6	7	8	9
4				0	0	2/3	1	1
3			M	2	1	4/3	3/2	7/5
2		1	3	3/2	1	5/4	7/5	4/3
1	1	1	5/3	5/4	1	7/6	9/7	5/4

由于在实际情况中,每个设施点安置人数应该是整数,所以该实例中 $\Delta x_{ij}=\min\{\lfloor\Delta B/(c_i-c_j)\rfloor,x_j,w_i-x_i\}$,利用算法 2 可以求得最后的优化安置方案是 $x=\{5,10,12,2,8,18,20,14,11\}$,$\Delta B=0$,目标函数 $F(x,s)=672$。

4　结束语

本文考虑了给定费用下单设施点灾民安置问题,按照最低费用改善最大距离的贪婪原则可以得到合理安置方案。正当自然灾害频繁之际,大量流离失所的灾民需要得到及时安置,在这一实际背景下,该问题的研究更具有现实意义。而灾民安置还面临着很多有待解决的问题,如一旦出现堰塞湖、山体滑坡等灾害,就需要及时把受灾群众转移到安全地方,如何合理转移灾民,使得所有灾民受到威胁尽可能小,可以转换成所有灾民到危险区的距离加权和最大化来处理。因此,灾民安置问题的研究有待进一步完善解决。

(下转第 3247 页)

(上接第 3231 页)

参考文献:

[1] 刘春林,何建敏,盛昭瀚.给定限制期条件下最小风险路径的选取算法[J].系统工程学报,1999,14(3):221-226.

[2] 刘春林,何建敏.给定限制期条件下最关键路的求取算法[J].管理工程学报,2000,14(2):22-25.

[3] 刘春林,何建敏.模糊计划网络最关键路的求取算法[J].系统工程学报,2000,15(2):136-142.

[4] 刘春林,施建军,李春雨.模糊应急系统组合优化方案选择问题的研究[J].管理工程学报,2002,16(2):25-28.

[5] 韩强.一类应急物资调度的双层规划模型及其算法[J].中国管理科学,2007,15(z1):716-719.

[6] WANG Su-sheng, WANG Yan, SUN Jian, *et al*. Selection of optimal scheme for multiple disaster places emergency systems[C]//Proc of the 14th International Conference on Management Science & Engineering. 2007:523-528.

[7] 闫妍,刘晓,庄新田. 基于节点失效的弹性供应链应急管理策略[J].控制与决策,2010,25(1):25-30.

[8] 潘郁,余佳,达庆利.基于粒子群算法的连续性消耗应急资源调度[J].系统工程学报,2007,22(5):556-560.

[9] 陈岳明,萧德云. 应急系统调度方案的最优决策算法设计[C]//中国控制与决策会议论文集.沈阳:东北大学出版社,2008:4671-4674.

[10] 方磊.基于偏好 DEA 模型的应急资源优化配置[J].系统工程理论与实践,2008,28(5):98-104.

[11] BERALDI P, BRUNI M E. A probabilistic model applied to emergency service vehicle location[J]. European Journal of Operational Research,2009,196(1):323-331.

[12] 高晓路,陈田,樊杰.汶川地震灾后重建地区的人口容量分析[J].地理学报,2010,65(2):164-176.

[13] 陈勇.对灾害与移民问题的初步探讨[J].灾害学,2009,24(2):138-143.

[14] 宋全成.地震灾区移民安置方案的选择[N].中国教育报,2008-6-13(3).

[15] HUNTER L M. Migration and environmental hazards[J]. Population and Enviroment,2005,26(4):273-302.

[16] BATE D C . Environmental refugees classifying human migration caused by environmental change [J]. Population and Environment, 2002,23(5):465-477.

[17] BERMAN O, INGCO D I, ODONI A R. Improving the location of minsum facilities through network modification[J]. Annals of Operations Research,1992,40(1):1-16.

[18] BERMAN O, INGCO D I, ODONI A R. Improving the location of minimax facilities through network modification[J]. Networks,1994,24(1):31-41.

[19] ZHANG Jian-zhong, LIU Zhen-hong, MA Zhong-fan. Some reverse location problems[J]. European Journal of Operational Research, 2000,124(1):77-88.

[20] BURKARD R E, GASSNER E, HATZL J. A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on a cycle[J]. Networks, 2006, 48(1):16-23.

[21] BURKARD R E, GASSNER E, HATZL J. Reverse 2-median problem on trees[J]. Discrete Applied Mathematics,2008,156(11):1963-1976.