

基于分布估计算法的喷涂机器人路径组合优化*

樊帅权^{a,b}, 周波^{a,b}, 孟正大^{a,b}, 戴先中^{a,b}

(东南大学 a. 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室; b. 自动化学院, 南京 210096)

摘要: 针对喷涂机器人离线轨迹规划系统中路径顺序与喷涂方向同时影响喷涂效率的特点,将喷涂路径的组合与排序问题建模成开环式广义旅行商问题,并建立了相应的代价矩阵与优化目标;提出了一种基于分布式估计的路径组合优化算法,该算法在遗传算法中引入统计学习的手段,采用基于概率的模型学习和采样算法实现更好的进化效率,从而能够更加有效地获得全局最优解。通过多组数据的仿真,验证了该算法解决路径组合问题的有效性与可行性。

关键词: 喷涂机器人; 路径组合; 广义旅行商问题; 分布估计

中图分类号: TP13; TP24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)08-2935-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.08.035

Path sorting optimization of painting robots using estimation of distribution algorithms

FAN Shuai-quan^{a,b}, ZHOU Bo^{a,b}, MENG Zheng-da^{a,b}, DAI Xian-zhong^{a,b}

(a. Key Laboratory of Measurement & Control of CSE, Ministry of Education, b. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Considered the characteristics of the path sorting and integration problem in off-line trajectory planning system of spray painting robots, it modeled the integration problem as an open generalized traveling salesman problem (GTSP), and established the corresponding cost matrix and optimization objective. In order to solve the problem, this paper proposed an optimization algorithm based on distributed estimation. The algorithm introduced statistical learning into genetic algorithm, and used learning based on the probability model and sampling algorithm to replace the crossover and mutation in genetic algorithm to achieve the evolution of population. So it can get the global optimum effectively. Results of simulations verify the effectiveness and feasibility of this method.

Key words: painting robot; path sorting; generalized traveling salesman problem (GTSP); distribution estimation

0 引言

随着制造业的快速发展,喷涂机器人在生产中获得了越来越广泛的应用,但传统的喷涂机器人作业主要采用“示教—再现”的方式进行,这种工作方法对工人的经验依赖严重,工作周期较长,并且示教期间机器人不能用于生产,造成生产成本较高,操作工人处在有害的工作环境之中,严重制约了喷涂作业的生产效率和产品质量的提高。为解决这些不足,学者们开始研究喷涂机器人离线编程技术^[1]。该技术利用计算机自动完成机器人的路径规划,并对相关路径进行仿真验证,有效克服了上述缺陷。由于喷涂工件表面的复杂性,目前的离线路径规划方法大多是通过将喷涂空间进行分割来对路径规划的,而如何对不同子空间中的喷涂路径进行排序和组合是一个非常关键的问题^[2]。

喷涂路径组合问题可以归结为特定条件下的组合优化问题,对于此类问题,目前的研究大多将其建模为经典的旅行商问题(TSP)^[3,4]来进行求解。TSP是一个NP-hard问题,直接采

用穷举搜索算法将会导致计算的时间和空间复杂度随问题维度的增长而呈指数型增长,故在实际应用中多采用启发式搜索算法,如遗传算法^[5]、蚁群算法^[6,7]、模拟退火算法、贪婪算法等,不同算法各有其优缺点。本文引入分布估计算法^[8-11],该算法在遗传算法的基础上,将交叉变异替换为基于概率的模型学习和采样算法,从而实现更好的进化效率和全局搜索能力。

喷涂机器人的路径组合和优化有其特殊性,在相同的路径下行进方向的不同往往也会导致代价不同,故传统的TSP模型不能很好地解决这个问题。本文采用改进的开环式广义旅行商模型^[12-14]对喷涂路径组合优化问题进行建模,该优化模型可同时考虑路径的行进方向和顺序,有效克服了传统旅行商对于该问题的缺陷。

1 路径组合优化问题建模

1.1 任务建模

喷涂机器人的路径排序和组合问题可采用如图1所示的图形 $G = (V, E, E_1, \omega: E \rightarrow Z^+)$ 来表示。

收稿日期: 2012-01-12; **修回日期:** 2012-02-15 **基金项目:** 国家重大科技专项基金资助项目(2010ZX04008-041)

作者简介: 樊帅权(1987-),男,河南平顶山人,硕士,主要研究方向为工业机器人(mrfanshq@qq.com);周波(1981-),男,讲师,博士,主要研究方向为工业机器人、移动机器人等;孟正大,教授,硕导,主要研究方向为机器人运动控制、机器人智能控制等;戴先中(1954-),教授,博导,博士,主要研究方向为机器人控制、神经网络软测量与控制等。

图 1 中给出了 n 条离散的喷涂任务路径 $e_1, e_2, \dots, e_n \in E_1$, 各路径的端点分别为 A_i 与 B_i , 路径之间的连接采用虚线表示, 则顶点集合为 $V = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n\}$, 而各顶点连线构成的边集合为 $E = \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$, 由此可知 $E_1 \subseteq E$; $\omega(v_i, v_j)$ 表示 E 中任意一条边 (v_i, v_j) 的权值。由图 1 可知, 由于两条工作路径之间的连接可按照不同的行进方向而形成四种不同的方式, 连接方式可为 $A_i B_i A_j B_j$ 、 $B_i A_i A_j B_j$ 、 $A_i B_i B_j A_j$ 和 $B_i A_i B_j A_j$ 。

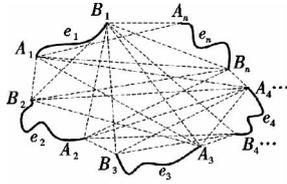


图1 喷涂路径组合任务

采取如下两个转换, 将其转换为哈密顿图:

- a) 对于所有的 $e_j \in E_1$, 定义节点 $v_i^H \in V^H$ 。为了表示简化, 直接用 e_i 表示 v_i^H 。
- b) 对于所有的 $e_i, e_j \in V^H (i \neq j)$, 定义边 $(e_i, e_j) \in E^H$, 则可将图 1 进一步简化为如图 2 所示 $G^H = (V^H, E^H, \omega_1^H: V^H \rightarrow Z^+, \omega^H: E^H \rightarrow Z^+)$ 。

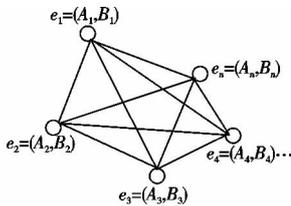


图2 多路径规划的哈密顿图转换

采用两个映射 ω_1^H 和 ω^H 分别表示图中各条喷涂路径和不同路径连接方式对应的权值, 即有

$$\omega_1^H(e_i) = \omega(A_i, B_i) \tag{1}$$

$$\omega^H(e_i, e_j) = \begin{cases} \omega(A_i, B_j), B_i A_i B_j A_j \\ \omega(A_i, A_j), B_i A_i A_j B_j \\ \omega(B_i, B_j), A_i B_i B_j A_j \\ \omega(B_i, A_j), A_i B_i A_j B_j \end{cases} \tag{2}$$

其中, 各边对应的权值 ω^H 的赋值取决于任务规划中每条路径的行进顺序和方向。

由于上述喷涂任务需要同时考虑喷涂路径顺序和行进方法, 因此无法采用点到点排序的 TSP 模型求解。由此本文引入了开环式广义 TSP(open GTSP) 的框架对多路径组合优化问题进行建模和求解。与 TSP 相比, GTSP 中的顶点集元素不再为单一的顶点, 而是若干个点的集合, 从而将顶点集 V 转换为 n 个点群的并集, 即 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ 。其中 $V_i = \{A_i, B_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$, 即将图中的任务路径集合 E_1 对应的 e_i 转为采用其端点集合(点群) $\{A_i, B_i\}$ 来表示。在开环 GTSP 框架下可将多路径组合优化任务描述为寻找一条能够遍历 n 个点群, 且每个点群仅仅针对其中的任意一个点访问一次的最优哈密顿通路, 其中每个点群中被访问的点可视为该点群对应的任务路径的访问起始点, 由此定义了该喷涂路径的行进方向。

1.2 优化建模

在求解上述 GTSP 之前, 需要根据任务背景和实际生产需要确立相应的代价矩阵和优化目标。定义任务路径排列变量

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, 其中 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示排在第 i 位的任务路径。同时考虑到任务路径的有向性, 构建二值方向指示数列 $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, 当路径行进方向为 $A_i B_i$ 时, l_i 取值为 1; 否则为 0。由此可建立相应的代价矩阵如下:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & \omega_{1,2}^H(e_1, e_2) & \dots & \omega_{1,n}^H(e_1, e_n) \\ \omega_{2,1}^H(e_2, e_1) & \infty & \dots & \omega_{2,n}^H(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n,1}^H(e_n, e_1) & \omega_{n,2}^H(e_n, e_2) & \dots & \infty \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中: $\omega_{ij}^H(e_i, e_j) (i \neq j)$ 表示从第 i 条任务路径 e_i (访问方向为 l_i) 到第 j 条任务路径 e_j (访问方向为 l_j) 所对应的边的权值, 可根据式(2)唯一确定。由此可定义全路径的总代价为

$$T(s, l) = T_1(s, l) + T_2(s) = \sum_{i=1}^n \omega_1^H(s_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{s_i, l_{s_i+1}}^H(s_i, s_{i+1}) \tag{4}$$

其中: T_1 和 T_2 分别表示各条任务路径本身与它们之间的连接路径的总代价, 由式(1)和(2)确定。注意: 由于各条任务路径的代价为定值(路径长度), 从而 T_1 为常数。由此多路径组合优化问题的优化目标可选取为

$$J = \arg \min_{s,l} T(s, l) = \arg \min_{s,l} T_2(s, l) \tag{5}$$

2 分布估计算法

2.1 分布估计算法介绍

分布估计算法(estimation of distribution algorithms, EDA) 是新兴的基于统计学习的随机优化搜索算法。它是遗传算法与统计学习的结合, 通过统计学习的手段建立解空间内个体分布的概率模型, 然后对概率模型随机采样产生新的群体, 从而实现群体的进化。分布估计算法具有丰富多样的概率模型, 如双变量边际分布链式结构模型, 代表算法有 BMDA、MIMIC、COMIC 算法等; 采用贝叶斯网络结构的多变量边际分布模型, 代表算法有 BOA、EBNA、FDA 算法等; 还有就是极其复杂的级联分布模型。本文采用的是 MIMIC(mutual information maximization for input clustering) 算法。

2.2 分布估计算法编码方案

分布估计算法与遗传算法一样需要对问题进行编码。为同时考虑路径组合和行进方向的影响, 这里采用多染色体结构来解决路径组合的广义旅行商问题。对路径采用十进制进行编码的染色体编码方案, 对行进方向采用二进制编码方案。编码示例如下:

Edge:365142;Side:101101。

可以简单地表示为 3(1)—6(0)—5(1)—1(1)—4(0)—3(1)—2(0), 即表示一个遍历六条边的求解方案; Edge 表示边长的排列顺序; Side 表示边的两端, 0 表示首点, 1 表示末点。其表达的意思是: 从边 3 的末点出发, 沿着边 3 到达首点, 沿直线再到边 6 的首点, ……

2.3 分布估计算法的优化方案

2.3.1 建立概率模型

进行分布估计首先是要建立概率模型, 这里使用的是 MIMIC 算法, 假设问题为 n 维问题, 即 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 直接求取 n 个变量的联合概率分布模型计算复杂。为简化计算, 假设给定两两变量的条件概率 $p(x_i | x_j)$ 和非条件概率 $p(x_i)$, 可以得出近似联合概率分布为

$$p(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) = p(x_{i1} | x_{i2}, \dots, x_{in}) p(x_{i2} | x_{i3}, \dots, x_{in}) \dots p(x_{in-1} | x_{in}) p(x_{in}) \quad (6)$$

下面给出建立模型的具体步骤:

a) 建立边分布矩阵与方向分布矩阵。统计选择的优势种群 M 中所有路径上 n 个边变量中两两之间邻接的次数, 构造边分布矩阵 $C_{n \times n}$ 。

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & \dots & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & C_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中: C_{ij} 表示第 i 个边之后是第 j 个边的次数 (从边 i 到边 j), 当 $i=j$ 时, $C_{ij}=0$ 。

在边分布矩阵建立的同时, 对与 Edge 染色体对应的 Side 染色体的 n 个基因片段出现 1 的次数进行统计, 生成方向分布矩阵 $S_{n \times n}$ 。

$$S_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & \dots & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & S_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中: S_{ij} 表示第 i 个边之后连接的是第 j 个边末点的次数, 必有 $S_{ij} \leq C_{ij}$, 当 $i=j$ 时, 有 $S_{ij}=0$ 。

b) 构造概率模型

(a) 构造路径起始边分布的向量组, 即统计 M 个方案, 在 Edge 染色体上第一个位置是边 i 的击中次数, $P = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, c_i 表示在 M 个求解方案中, 第 i 条边被选中为首点的次数。接着更新概率分布 $P = \{c_1/M, c_2/M, \dots, c_n/M\}$, M 为优势种群的个体数;

(b) 与此同时, 统计 M 个方案第 i 个边的方向起点是末点 (是编码 1) 的击中次数, 即 $P_{side} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, 然后进行更新概率分布 $P_{side} = \{s_1/c_1, s_2/c_2, \dots, s_n/c_n\}$, $c_i \neq 0, c_i = 0$ 时将 i 位置 0;

(c) 根据边分布矩阵 $C_{n \times n}$, 构造路径概率分布矩阵 $C_{ij} = C_{ij}/M$;

(d) 对方向分布矩阵 $S_{n \times n}$, 更新方向概率分布矩阵 $S_{ij} = S_{ij}/C_{ij}$, $C_{ij} \neq 0$; 对 $C_{ij} = 0$; 将 S_{ij} 置 0 即可。这样一个带有两张分布表的概率模型已经建立起来了。

c) 修正概率模型。上面建立的概率分布矩阵存在严重的问题, 要尽量地避免 0 和 1 概率的出现, 因此要根据修正因子进行修正。

(a) 对起始点边分布概率向量组 P , 根据修正原则, 统计 $p_i = 0 (0 < i \leq n)$ 的个数记为 t , $p_i = 0$ 时, $p_i = a/t$; $p_i \neq 0$ 时, $p_i = (1-a) \times p_i$; a 表示修正因子, p_i 表示第 i 个边在路径中处于首位置的概率;

(b) 对起始点方向分布概率向量组 P_{side} , 修正原则是: 若 $ps_i = 0$ 且 $p_i = 0$ 时, $ps_i = 0.5$; 若 $ps_i = 0$ 且 $p_i \neq 0$ 时, $ps_i = 0.1$; 若 $ps_i = 1$ 时, $ps_i = 0.9$ 。 ps_i 表示第 i 个边在路径中处于首位置时的方向起点是末点 (染色体 Side 第一个编码为 1) 的概率, p_i 表示未修正的第 i 个边在路径中处于首位置的概率;

(c) 对边分布矩阵 $C_{n \times n}$, 统计 $C_{ij} = 0 (0 < i \leq n, i \neq j)$ 的个数, 总次数记为 t ; 当 $C_{ij} = 0 (i \neq j)$ 时, $C_{ij} = a/t$; 当 $C_{ij} \neq 0$ 时,

$$C_{ij} = (1-a) \times C_{ij};$$

(d) 关于方向分布矩阵 $S_{n \times n}$, 若 $S_{ij} = 0$ 且 $S_{ij} \neq 0$ 时, $S_{ij} = 0.1$; 若 $S_{ij} = 0$ 且 $C_{ij} = 0$ 时, $S_{ij} = 0.5$; 若 $S_{ij} = 1$ 时, $S_{ij} = 0.9$ 。这里的 C_{ij} 是未经过修正的边分布概率。

2.3.2 随机采样

前面已经建立完整的概率分布模型, 接下来需要做的是对该概率模型进行随机取样。由于变量之间存在链式依赖关系, 也就是说, 只有相邻节点之间存在关系。具体的 MIMIC 算法的随机采样过程如下:

a) 根据起始点边分布概率向量组 P 采样第一个边 edge1。

b) 根据起始点方向分布概率向量组 P_{side} 采样边 edge1 的方向 side1。

c) 根据边分布矩阵 $C_{n \times n}$ 采样余下的边, 首先利用边 edge1 的条件概率 $C_{edge1j} (0 < j \leq n)$, 采样第 2 个边 edge2。注意: edge2 不能为出现过边, 具体办法是提取 $C_{edge1j} (0 < j \leq n)$ 行向量 C_{edge1} , 对出现过的边置 0, 接着对该数组所有元素进行求和 Nu, 然后得到新的 $C_{edge1} = C_{edge1}/Nu$, 使用轮盘赌算法采样 edge2, 而 edge2 采样结束后再利用 edge2 的条件概率产生下一个边。依此类推, 直至整条路径采样完毕。

d) 过程 c) 中的 edge2 采样结束后, 根据方向分布矩阵 $S_{n \times n}$ 中的 $S_{edge1edge2}$ 采样编码 0 或 1。依此类推, 新的 edge 采样结束后, 立即对新的 side 进行采样, 直至采样结束。

2.4 分布估计算法的改进

在实际的仿真过程中已经使用了两个概率分布矩阵和最优解保留策略对算法进行改进, 但仿真效果仍然没有达到预期效果。为了考虑对算法作进一步的改进, 借鉴了蚁群算法的信息素更新经验, 对统计量和统计方式上进行了特别的处理。

具体是对边分布矩阵和方向分布矩阵的建立进行如下改进:

a) 建立全局边分布矩阵 $GC_{n \times n}$ 和全局方向分布矩阵 $GS_{n \times n}$, 该矩阵目的在于记录前几代进化的所有经验。

b) 在统计边分布和方向分布矩阵时, 考虑适应值对统计过程的影响, 具体思想是, 对较高的适应度方案得到更多的统计量, 而较低的适应度方案得到少量的统计量。具体流程是统计时表示边两两相关的 C_{ij} 的统计值增加量为参数 Q 与适应度 f 的乘积。对 S_{ij} 的统计, 若对边 j 的连接点是末点, 即编码 1, 增加的统计量仍然为参数 Q 与适应度 f 的乘积 ($\Delta C = Q \times f$); 若对边 j 的连接点是首点, 即编码 0, 总的统计量为 S_{ij} 不变。

此统计方案的更改并不影响下一步的分布概率矩阵的建立与修正, 而且这样的统计方式更加科学, 可以保证更好的收敛特性和寻优能力。

3 仿真结果及分析

分布估计算法的参数设定较少, 最优种群数一般是比较固定的, 而种群数与进化代数存在重要的关系, 为考察修正因子, 种群数对仿真结果存在影响。下面针对几组不同参数进行仿真与分析。

对比图 3(a) ~ (c) 可知, 当进化代数、优势群体数、修正因子固定的情况下, 观察种群规模对求解结果的影响: 种群规模小, 分布估计概率模型反映的喷涂路径分布规律不够完整, 缺乏种群多样性; 种群规模大, 分布估计概率模型反映的喷涂路

径分布规律接近真实分布,种群多样性得到保证。根据概率模型对路径进行采样,在种群多样性得到保证的情况下,全局搜索能力增加,得到最优解或近似最优解的可靠性增加。另外可以看到种群数和收敛代数之间的关系,较大的种群数反映出快速的收敛速度。在图 3 中看到,随种群数的增加收敛代数迅速减小,与此同时,新一代的采样因为种群数太多要消耗过多的时间,所以在选择分布估计参数时一般选择较大的种群数和较小的进化代数保证算法的高效性与较强的搜索能力。

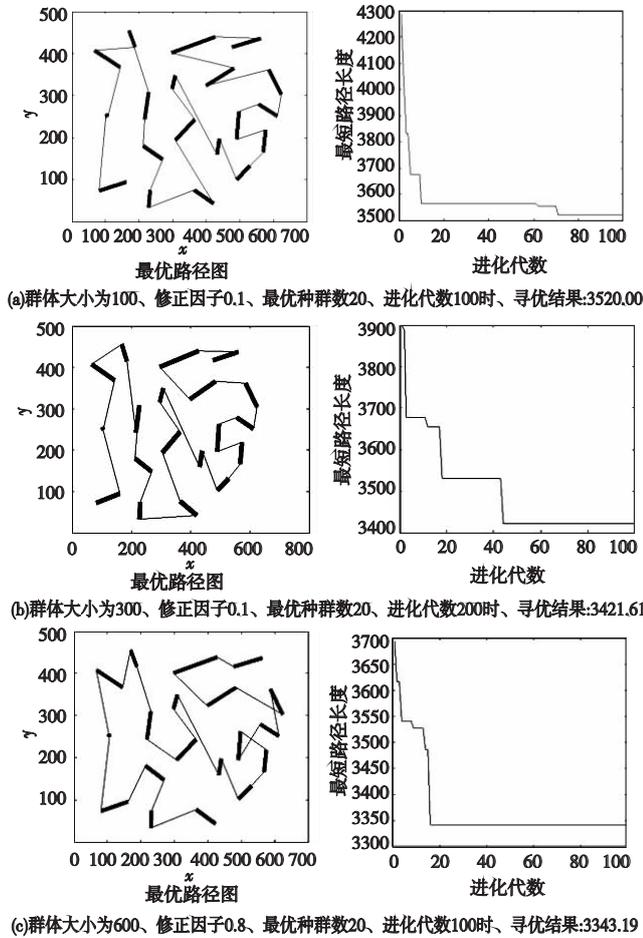


图3 种群数和修正因子与仿真结果的影响

表 1 是群体大小为 300、最优种群数 20、进化代数 100 代时,不同修正因子多次优化仿真的结果,从表中可以得出修正因子对优化结果的影响。修正因子的主要目的是修正概率采样过程中在喷涂路径的某个位置或者方向未曾取到的路径的概率,将概率为 0 的位置或者方向的概率得到修正,使得在下次采样过程中获得被采样的机会,这样可以避免零概率位置和方向永远采样不到的困境。从表 1 中可知,当种群规模、进化代数、优势群体固定的情况下,存在修正因子时的优化结果明显优于比无修正的情况(修正因子为 0);当修正因子从小到大时,分布估计概率模型反映的喷涂路径分布规律失真变大,求解效果变差。

表 1 不同修正因子的优化结果

修正因子	优化结果平均值
0	3 461.30
0.1	3 402.51
0.3	3 409.34
0.5	3 416.84
0.7	3 424.85
0.9	3 435.03

4 结束语

针对喷涂机器人离线轨迹规划系统中路径组合优化问题进行分析研究,将其建模成广义旅行商问题。在求解该问题时,提出了一种基于分布估计的算法,该算法以遗传算法为基础,加入了统计学习的方法,具有很强的全局搜索能力。仿真实验也验证了该算法对于路径组合优化问题能够求出更优的路径组合结果。

参考文献:

- [1] MILSI S, BOUZAKIS K D, MANSOUR G, *et al.* Off-line programming of an industrial robot for manufacturing[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2005, 26(3): 262-267.
- [2] SHENG Wei-hua, TEWOLDE G, CHEN He-ping. Tool path integration for spray forming processes using genetic algorithm[C]// *Proc of the 12th International Conference on Advanced Robotics*. 2005:159-164.
- [3] DUBOWSKY S, BLUBAUGH T D. Planning time-optimal robotic manipulator motions and work places for point-to-point tasks[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1989, 5(3): 377-381.
- [4] 朱献文,李福荣. 求解旅行商问题的几种智能算法[J]. *计算机与数字工程*, 2010, 38(1): 32-35.
- [5] 周波,钱来,孟正大,等. 基于改进遗传算法的工业机器人多路径组合规划[J]. *华中科技大学学报:自然科学版*, 2011, 39(11): 9-12.
- [6] MENG Zheng-da, CHEN Qin-qi. Hybrid genetic-ant colony algorithm based job scheduling method research of arc welding robot[C]// *Proc of IEEE International Conference on Information and Automation*. [S. l.]: IEEE Press, 2010: 718-722.
- [7] TEWOLDE G, SHENG Wei-hua. Ant colony optimization for tool path integration in spray forming processes[C]// *Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems*. 2006: 2394-2399.
- [8] LARRANAGA P, ETXEBERRIA R, LOZANO J A, *et al.* Optimization by learning and simulation of Bayesian and Gaussian networks, EHU-KEAA-1K-4/99[R]. [S. l.]: Dept. of Computer Science and Artificial Intelligence, University of the Basque Country, 1999.
- [9] YI Hong, ZHU Guo-pu, KWONG S, *et al.* Estimation of distribution algorithms making use of both high quality and low quality individuals [C]// *Proc of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. 2009: 1806-1813.
- [10] BROWNLEE A E I, McCALL J A W, ZHENG Qing-fu, *et al.* Approaches to selection and their effect on fitness modeling in an estimation of of distribution algorithm[C]// *Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. 2008: 2621-2628.
- [11] 张建华,曾建潮. 经验分布函数概率模型的分布估计算法[J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47(8): 33-35.
- [12] 刘淳安. 基于核分布估计的动态多目标优化进化算法[J]. *山东大学学报:工学版*, 2011, 41(2): 167-172.
- [13] 茹凡,刘海江. 白车身侧围焊点任务组合优化研究[D]. 上海: 同济大学机械工程学院, 2006.
- [14] 黄宝珠,肖菁. 改进的 MIMIC 算法求解旅行商问题[J]. *计算机工程与设计*, 2010, 31(16): 3650-3653.