

基于 Shearlet 框架的多尺度去噪算法*

王晓明¹, 冯鑫¹, 党建武²

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050; 2. 兰州交通大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050)

摘要:目前的经典多尺度系统 Curverlet、Contourlet 存在的主要缺点之一是它们无法将连续性与数字世界进行统一处理,而 Shearlet 系统是目前多尺度领域内唯一满足这一性质同时还提供对图像的最优稀疏表示的多尺度系统。提出一种用限制频带的 Shearlet 变换来进行多尺度分析,其主要通过对图像进行快速 PPFT 变换,以及加权和加窗处理得到 Shearlet 系数,通过 SURE-LET 变换进行噪声估计优化分解系数,最后进行 Shearlet 重构得到去噪图像。实验结果表明,相比于目前的去噪算法,在 PSNR、SSIM 和时间上,该算法都有一定的优势。

关键词: 图像去噪; Shearlet 变换; 稀疏表示; SURE-LET 变换; 快速 PPFT

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)07-2733-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.07.091

Multiscale denoising algorithm based on Shearlet frame

WANG Xiao-ming¹, FENG Xin¹, DANG Jian-wu²

(1. College of Electrical & Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. College of Electrical & Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730050, China)

Abstract: One of the most common shortcomings of the frameworks of the system Curverlet and Contourlet is lack of providing a unified treatment of the continuum and digital world. Now Shearlet systems are the only systems which satisfy this property, yet still deliver optimally sparse approximations of images. This paper presented a band-limited Shearlet for multi-scale analysis. It used fast PPFT transformation to images, weighted and windowing treatment to get Shearlet coefficient, then optimized the decomposed coefficient of the image noise through the SURE-LET, and finally obtained the denoised image by inverse Shearlet transform. The experimental results show that, compared with the current denoising algorithm, the algorithm takes the certain advantages in the PSNR, SSIM and time.

Key words: image denoising; Shearlet transform; sparse representation; SURE-LET transform; fast PPFT

0 引言

小波因具有良好的时频局域性、多分辨率特性以及能对点奇异的分段光滑函数进行最优逼近,而被广泛运用于图像处理^[1,2]。Donoho^[3]于1995年开创性地提出了基于小波的软阈值去噪方法,并且取得了比较好的视觉效果。此后 Sendur 等人^[4]利用尺度间小波系数的依赖关系提出基于双变量收缩函数的去噪方法,实验表明该方法去噪效果较好。但是,由于小波只具有有限的方向,不能很好地表示图像中的方向信息,这就为后面多尺度分析的出现埋下了伏笔。多尺度分析典型的代表有曲波变换(curverlet transform)^[5]、轮廓波变换(contourlet transform)^[6]。由于它们都具有各向异性和方向性等特点,所以能够对图像中有很高各向异性的边缘和纹理等信息给出接近最优的表示^[7]。文献[8]利用隐马尔科夫树模型(hidden Markov tree, HMT)对系数间的关系进行建模,提出了基于轮廓波的去噪方法(contourlet-HMT),该方法对纹理图像有较好的效果。

在频率空间中曲波和轮廓波是隔层细分的,这在一定程度上影响了其稀疏表示。2007年,Guo 等人^[9]通过特殊形式的具有合成膨胀的仿射系统构造了一种接近最优的多维函数稀

疏表示法——Shearlet 变换。Shearlet 变换不仅具有与曲线波和轮廓波相同的非线性误差逼近阶,而且在频率空间中是逐层细分的,所以具有更好的表示性能。与此同时,Shearlet 变换的数学结构比较简单,它通过对一个函数进行伸缩、平移、旋转来生成基函数,该特点与小波类似,却正是曲波和轮廓波所缺少的,所以 Shearlet 变换非常适合用于图像去噪。2008年, Easley 等人^[10]通过阈值函数对 Shearlet 变换系数进行处理,提出了基于 Shearlet 变换的去噪方法(Shearlet-ST)。Shearlet 框架与 Curverlet、Contourlet 框架的主要区别是具备连续介质和数字世界的统一性。要满足统一性则必须具备以下性质:a) parseval 框架性质;b)空间和频率局部性;c)剪切不变性;d)变换算法的复杂性应低于 $O(N^2 \log N)$;e)变换应保留几何特性;f)鲁棒性。为了进一步改进算法在去噪上的性能,本文提出一种限制频带的 Shearlet 变换(FDST)。

1 Shearlet 原理

多尺度框架是由一组在希尔伯特空间 H 上的向量 $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma}$ 组成的,如果存在两个正常数 A 和 B ,使得每个 $f \in H$,可以得到

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

在 $A = B$ 的情况下, 框架为紧框架。在此将所有 $d \times d$ 的可逆矩阵表示为 $GL_d(\mathbb{R})$ 。最后, 因为 $q \in (\frac{1}{2}, 1]$ 且 $a > 1$, 可以定义

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha^q & 0 \\ 0 & \alpha^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \alpha^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \alpha^q \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 Shearlet 框架为

$$\psi^0 = \{ \psi_{ijk}^i : j, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2, i = 1, \dots, L \} \quad (2)$$

$$\psi = \{ T_{cm} \varphi : m \in \mathbb{Z}^2 \} \cup \{ \tilde{\psi}_{ijk}^i : j \geq 0, -s_j \leq k \leq s_j, m \in \mathbb{Z}^2, i = 1, \dots, L \} \cup \{ \tilde{\psi}_{ijk}^i : j \geq 0, -s_j \leq k \leq s_j, m \in \mathbb{Z}^2, i = 1, \dots, L \} \quad (3)$$

其中: $\psi_{ijk}^i = D_{A_0^i} T_{cm} \varphi_0^i$, $\tilde{\psi}_{ijk}^i = D_{A_1^i} T_{cm} \varphi_1^i$ 。当 ψ (或者 ψ^0) 为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的框架时, 称函数 ψ_{ijk}^i 和 $\tilde{\psi}_{ijk}^i$ 为系统 ψ (或者 ψ^0) 的 Shearlets。

在 ψ (或者 ψ^0) 框架内, 应用对抽样常数 C 的平移, 然后应用各向异性的缩放矩阵 A_j^i 和剪切矩阵 B_j^i 来固定地产生函数 φ_0^i 和 φ_1^i , 以获得 Shearlets。缩放矩阵 A_j^i 和剪切矩阵 B_j^i 使窗口能以任意方向延伸, 并且能够有效地表示和分析图像中的集合结构的奇异点。所以, 可以使用 Shearlets 对拥有 C^2 奇异点的平滑函数进行接近最优逼近率的逼近; 此外, Shearlets 能够彻底地对分段平滑图像奇异结构进行平滑。Shearlet 频率如图 1 所示。

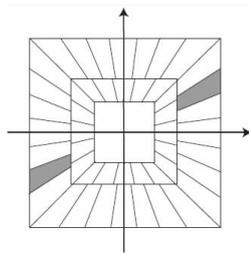


图1 Shearlet频率

2 FDST

FDST 主要由快速 PPFT (fast pseudo-polar Fourier transform)、权重、数字 Shearlet 窗口三部分构成。变换的重构可以由两个过程组成, 分别为伴随矩阵 FDST 变换和 IFDST 变换。本文依靠是否使用伴随矩阵进行重建和迭代以及是否要求更高精度这两者间的权重来进行 CG (共轭梯度) 的选择。其结构如图 2 所示。

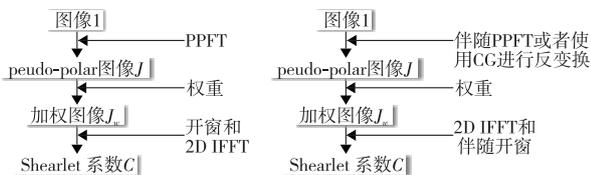


图2 FDST与IFDST的流程

FDST 算法步骤为:

a) 设 N 和 R 为正整数, Ω_R 为伪极栅格。对于一张 $N \times N$ 图像 $I := \{ I(u, v) : -\frac{N}{2} \leq u, v \leq \frac{N}{2} - 1 \}$, 应用 fast PPFT 后获得函数 J 。

$$\hat{I}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{u, v = -N/2}^{N/2-1} I(u, v) e^{-\frac{2\pi i}{m_0}(u\omega_1 + v\omega_2)} \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_R \quad (4)$$

b) 计算权重函数 w 的平方根, 产生 $\sqrt{w}P$ 。设 $J := I : \Omega_R \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $N \times N$ 图像 I 的 PPFT, 且 $w : \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为所有 Ω_R 上的合适的权重函数, 其值为 $w := \sum_{j=1}^{n_0} c_j w_j$ 。

$$J_w(\omega_1, \omega_2) = J(\omega_1, \omega_2) \sqrt{w(\omega_1, \omega_2)} \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_R \quad (5)$$

c) 将 Shearlet 窗口应用于函数 wPI , 然后对每个数组进行二维 IFFT, 获得以 $c_{n_0}^i, J_0, n_0, c_{j,k,m}^i$ 等参数表示的 Shearlet 系数。其中, 系数 $c_{n_0}^i = \langle J_w, \varphi_{n_0}^i \rangle_{\Omega_R}$, $c_{j,k,m}^i = \langle J_w, \sigma_{j,k,m}^i \rangle_{\Omega_R}$, 且 Shearlet $\sigma_{j,k,m}^i$ 与尺度函数 $c_{n_0}^i$ 分别为

$$\sigma_{j,k,m}^i(\omega_1, \omega_2) = \frac{C(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{R_{j,k}}} W(4^{-j}\omega_1) V^i(k + 2^j \frac{\omega_2}{\omega_1}) \times \chi_{\Omega_k}(\omega_1, \omega_2) e^{2\pi i \langle m, (4^{-j}\omega_1, 2^{\frac{2j}{n_0}} \omega_2) \rangle} \quad (6)$$

$$c_{n_0}^i(\omega_1, \omega_2) = \frac{C(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{R_{j,k}}} \varphi(\omega_1, \omega_2) \chi_{\Omega_k} \times (\omega_1, \omega_2) e^{2\pi i \langle n_0, (\frac{n}{3}, \frac{l}{n+1}) \rangle} \quad (7)$$

其中, 对于所有 $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_R^l$, Shearlet 定义于尺度 $j \in \{j_L, \dots, j_H\}$ 上, $k = [-2^j, 2^j] \cap \mathbb{Z}$, 且空间位置 $m \in R_{j,k}$ 。

3 SURE 无偏估计

图像降质模型为 $y = x + b$ 。其中: $y = (y_n)_{n \in [1, N]}$ 为噪声图像; $x = (x_n)_{n \in [1, N]}$ 为清晰图像; 而 $b = (b_n)_{n \in [1, N]}$ 为独立同分布的加性高斯白噪声, $N = 2^J, J \in \mathbb{N}$ 。设 $\hat{x} = (\hat{x}_n)_{n \in [1, N]}$ 为 x 的估计值, 则定义均方误差 MSE 为

$$\varepsilon = \text{MSE}(\hat{x}, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{x}_n - x_n|^2 \quad (8)$$

图像去噪就是找到一个函数 $\theta(\cdot)$, 并且 $\hat{x} = \theta(y)$ 为对 x 的逼近, 最终使得均方误差 MSE 最小, 即

$$\min(\varepsilon) = \min(\text{MSE}) = \min_{\theta} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\theta(y_n) - x_n|^2 \right) \quad (9)$$

由文献[11], x_n 与它的估计 $\theta(y_n)$ 之间的均方误差为

$$\varepsilon = \{ |\theta(y_n) - x_n|^2 \} = \varepsilon \{ \theta^2(y_n) \} - 2\varepsilon \{ y_n \theta(y_n) \} + 2\varepsilon \{ b_n \theta(y_n) \} + x_n^2 \quad (10)$$

其中, $\varepsilon \{ b_n \theta(y_n) \}$ 用高斯概率密度 $q(b_n)$ 满足 $b_n q(b_n) = -\sigma^2 q'(b_n)$ 来估计。

由文献[11]可知, SURE-LET 通过使清晰图像与噪声图像之间的均方误差 MSE 最小化来进行去噪。这种方法只是对噪声图像有依赖, 而与清晰图像无关, 无须像通用去噪方法一样要求预先确定阈值, 是一种有效和可靠的估计方法, 因此在未知清晰图像的情况下很适合用于图像去噪。首先, SURE-LET 对图像进行 J 层小波变换得到小波系数 $[y^0, \dots, y^i, \dots, y^J]^T$; 然后通过 GDC (group delay compensated) 滤波器以及高斯平滑滤波器建立小波系数的预测值 $[y_p^0, \dots, y_p^i, \dots, y_p^J]^T$, 再计算预测值与实际值之间的最小均方误差来进行去噪, 如图 3 所示。

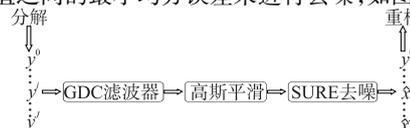


图3 SURE-LET结构

4 本文提出的 SURE-FDST 去噪算法

Shearlet 框架能稀疏地对图像进行几何结构表示,更多地保留图像的边缘和纹理等重要信息,但是在去噪过程中还是需要预先确定去噪阈值,所以去噪阈值的选择对去噪还是有很大影响。相反,SURE-LET 无须预先确定去噪阈值,但是它没有考虑图像几何结构表述。因此,本文结合 Shearlet 框架和 SURE-LET 噪声估计,既能在其频域内达到满意的局部性,又能不依赖于噪声图像,通过最小化降噪图像与清晰图像之间 MSE 来达到较好的去噪效果。根据使得均方误差 MSE 最小的 SURE-LET 法,其 $\theta(\cdot)$ 函数为

$$\theta(y_i) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k(y_i) = \sum_{k=1}^K \alpha_k y_i e^{-(k-1) \frac{y_i^2}{2T^2}} \quad (11)$$

本文算法中取 $K=2, T=\sqrt{6}\sigma, \sigma$ 为噪声方差, α_k 为系数,使均方误差 MSE 能取得最小值。对式(8)求导,并使其导数为零,即 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_k} = 0$,将式(9)(11)代入式 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_k} = 0$,可以得到

$$\underbrace{\sum_{l=1}^K \sum_{k=1}^K \varphi_k(y_i) \varphi_l(y_i) \alpha_l}_{M_{k,l}} - \underbrace{\sum_{k=1}^K (y_i \varphi_k(y_i) - \sigma^2 \varphi'_k(y_i))}_{c_k} = 0 \quad (12)$$

式中, $\varphi_k(y_i) = y_i e^{-(k-1) \frac{y_i^2}{2T^2}}$,该等式可以概括为矩阵的形式: $\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{c}$ 。其中: $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_k]^T$ 和 $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_k]^T$ 为尺寸 $K \times 1$ 的向量, $\mathbf{M} = [M_{k,l}]_{1 \leq k, l \leq K}$ 为尺寸 $K \times K$ 矩阵。设定序列 y 的预测值为 y_p ,选取使得 MSE 最小的 $\theta(\cdot)$ 函数为

$$\theta(y_i, y_{ip}) = e^{-y_{ip}^2/12\sigma^2} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-y_i^2/12\sigma^2}) y_i + (1 - e^{-y_{ip}^2/12\sigma^2}) (b_1 + b_2 e^{-y_i^2/12\sigma^2}) y_i \quad (13)$$

则 SURE-FDST 去噪算法步骤为:

a) 先对图像 I 进行 SURE-LET 分解,设 $K=2, T=\sqrt{6}\sigma, \sigma$ 为噪声方差,分解层数设置为 $J = \log_2 N - 1$;然后经过 GDC 和高斯平滑得到预测值 y_p ,最后求出所需的使得 MSE 最小的 $\theta(\cdot)$ 函数。

b) 对图像 I 进行 fast PPFT 后获得 \hat{I} 。

c) 对 \hat{I} 离线计算权重函数 w 的平方根: $\Omega_R \rightarrow \mathbb{C}$ 到 $W^* C$,产生函数 $\sqrt{w} W^* C: \Omega_R \rightarrow \mathbb{C}$ 。

d) 将 Shearlet 窗口应用到函数 wPI ,然后对每个数组进行二维 IFFT 获得以 $c_{n_0}^l, l_0, n_0$ 和 $c_{j,k,m}^l$ 表示的 Shearlet 系数。

e) 根据步骤 a) 所得结果,按照式(13)计算得到使 MSE 最小的 $\theta(y_i, y_{ip})$ 函数,对所含剪切波系数 $c_{j,k,m}^l$ 与 $c_{n_0}^l$ 进行处理,得到优化后的 Shearlet 系数。

f) 根据是否允许使用伴随矩阵进行重建和迭代与是否要求更高精度这两者间的权重来进行 CG 的选择。如果 $CG=0$,则直接进行 IFDST 变换,重构图像;如果 $CG=1$,则通过伴随矩阵(adjoint FDST)进行重建。最后得到去噪图像。

5 实验结果及分析

为了对算法的有效性进行验证,选择降质图像为人工方式产生,图像为标准测试图像 Barbara、peppers。图像大小选择 512×512 ,然后叠加均值为零、 σ 为 30 的高斯白噪声来进行实验。

选用 MATLAB 7.0 对本文算法进行验证,并与 Wavelet、Curverlet、Non-subsampled Contourlet 这几种目前比较主流的去

噪算法进行对比,设置 Wavelet、Curverlet、Non-subsampled Contourlet 均为五层变换。其中:Curverlet 变换 is_real = 1, Non-subsampled Contourlet 变换的方向滤波器组选取 dmaxflat7 滤波器,金字塔滤波器组选取 max-flat 滤波器。Wavelet 使用 Bayes 方法进行噪声估计,Curverlet 用 K-sigma 阈值方法进行去噪,以及使用 Non-subsampled Contourlet 阈值方法去噪(NSCT-ST)。

本文算法的过采样率取 $R=2$,设置尺度因子 $\beta=2$,加权基矩阵选择 choice = 1。设置当 $CG=1$ 时,CG 控制误差为 $err = 1e-5$;CG 的最大迭代次数为 10 次。根据实验经验,当为以上取值时能得到最好的去噪结果。

图 4 为 peppers 图像去噪对比,图 5 为 Barbara 图像去噪对比。

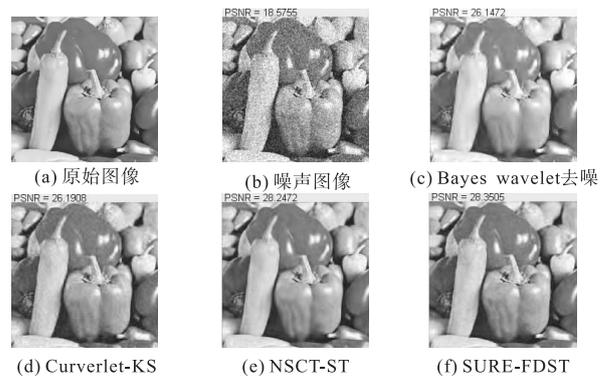


图4 Peppers图像去噪对比

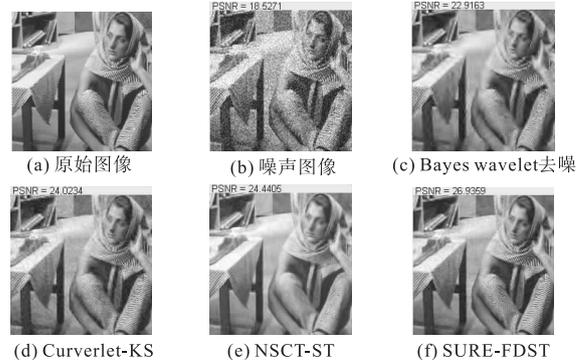


图5 Barbara图像去噪对比

为了更客观地评价去噪效果,采用量化指标对以上算法的去噪效果进行评价。量化指标选取峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)。峰值信噪比是比较常用的衡量图像主观质量的方法,其基本表达式为 $PSNR = 10 \lg(255^2/MSE)$,MSE 为图像中去噪后图像与标准图像的均方误差。结构相似度于 2002 年首次被 Wang 等人^[12]提出,是一种符合人眼视觉特性的图像质量客观评判标准,其定义为

$$SSIM = \frac{4\sigma_{xy} \bar{x} \bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) [(\bar{x}) + (\bar{y})]}$$

其中: \bar{x}, \bar{y} 分别为两幅图像的平均灰度; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 分别为两幅图像灰度的方差和协方差。采用 Bayes wavelet、Curverlet-KS、NSCT-ST、SURE-FDST 与原图像比较后的 PSNR 与 SSIM 指标如表 1 所示。

表 1 各种算法去噪结果的峰值信噪比

图像	量化指标	Bayes wavelet	Curverlet-KS	NSCT-ST	SURE-FDST
Barbara	PSNR	22.916 3	24.023 4	24.440 5	26.935 9
	SSIM	0.943 5	0.961 1	0.962 8	0.978 1
peppers	PSNR	26.147 2	26.190 8	28.247 2	28.350 5
	SSIM	0.971 7	0.9760	0.986 5	0.988 1

各种去噪算法所用时间对比如表 2 所示。

表 2 去噪时间对比 /s

图像	Bayes wavelet	Curvelet-KS	NSCT-ST	SURE-FDST
Barbara	2.168 1	15.164 2	3.831 8	3.664 0
peppers	2.144 0	14.592 5	3.812 1	3.616 8

从表 1 中可以看出, SURE-FDST 从结构相似度和峰值信噪比来说是最理想的, 无论是对 papers 图像还是 Barbara 图像来说, 峰值信噪比都是最高的。所以 Shearlet 框架能更好地在保持图像的细节信息与边缘信息的同时很好地去除噪声点。从表 2 中可以看出, SURE-FDST 在去噪速度上快于 Curvelet-KS、NSCT-ST 这两种算法, 仅次于速度最快的 Bayes wavelet, 说明其框架结构非常简单, 且仅次于小波框架。所以 SURE-FDST 能在原图像的边缘、纹理等高维奇异性或本质几何结构特征方面具有更好的稀疏表达能力, 变换后能量更加集中, 变换速度较快, 有利于进一步分析和提取图像的几何特征。

6 结束语

本文结合 FDST 与 SURE-LET 进行图像的去噪研究, 其中 FDST 能够提供有效的具有方向性的图像表示, 而 SURE-LET 无须预先确定去噪阈值, 所以 SURE-FDST 相比于目前其他多尺度去噪算法来说无论在视觉上还是在量化指标上都具有更好的效果。然而就 Shearlet 的架构而言, 与 CT 和 DWT 等多尺度变换一样, FDST 不分享基于树结构的滤波器组, 因此计算成本会随 Shearlet 运算符数目的增加而增加。再者, 因为通过选择采样常数来计算出框架边缘的比例, 这就意味着需要增加 Shearlet 框架的冗余来达到更加合理的框架界限设计。因此在今后的研究中, 笔者将重点改进 Shearlet 结构, 使其能够提供更加结构化且少冗余的 Shearlet 框架。

参考文献:

- [1] CHANG S G, YU Bin, VETTERLI M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2000, 9(9): 535-539.
- [2] SHI Fei, SELESNICK I W. An elliptically contoured exponential mixture model for wavelet based image denoising [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2007, 23(1): 131-151.
- [3] DONOHO D L. Denoising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [4] SENDUR L, SELESNICK I W. Bivariate shrinkage function for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2002, 50(11): 2744-2756.
- [5] CANDES E J, DONOHO D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of object with piecewise C2 singularities [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(2): 219-266.
- [6] CANDES E J, DEMANET L, DONOHO D L, et al. Fast discrete curvelet transforms [J]. *Multi-scale Modeling and Simulation*, 2006, 5(3): 861-899.
- [7] DO M N, VETTERLI M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [8] 焦李城, 侯彪, 王爽, 等. 图像多尺度几何分析理论与应用——后小波分析理论与应用 [M]. 西安: 西安电子科大出版社, 2008.
- [9] GUO Kang-hui, LABATE D. Optimally sparse multidimensional representation using Shearlets [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2007, 39(1): 298-318.
- [10] EASLEY G, LABATE D, LIM W Q. Sparse directional image representation using the discrete Shearlet transform [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 25(1): 25-46.
- [11] LUISIER F, BLU T, UNSER M. A new SURE approach to image denoising: inter-scale orthonormal wavelet thresholding [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2007, 16(3): 593-607.
- [12] WANG Zhou, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2004, 13(4): 600-613.