

基于贝叶斯匹配追踪的 SAR 图像重构^{*}

徐建平, 皮亦鸣

(电子科技大学 电子工程学院, 成都 611733)

摘要: 结合稀疏贝叶斯学习和压缩感知(CS)理论, 提出了一种基于贝叶斯匹配追踪的 SAR 图像重构的新方法。该方法将 SAR 图像的重构过程看做是一个线性回归问题, 而待重建的图像是该回归模型中的未知权值参数。利用高斯混合参数对未知权值参数赋予确定的先验条件概率分布, 用于限制权值参数的稀疏性。该方法能够得到重建图像所需要的一组具有较高后验概率密度的模型, 从而实现图像在最小均方误差(MMSE)意义下的重构; 对于高斯混合模型中参数未知的情况, 可以采用基于 EM 的最大似然估计方法估计。实验结果表明, 基于贝叶斯匹配追踪的 SAR 图像重构方法能够获得精确的重建图像, 并且能够有效地保持图像的细节特征。

关键词: 压缩感知; SAR 图像; 高斯混合参数; 贝叶斯; EM

中图分类号: TN95 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)07-2722-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.07.088

SAR image reconstruction based on Bayesian matching pursuit

XU Jian-ping, PI Yi-ming

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu 611733, China)

Abstract: Based on sparse learning and CS theory, this paper proposed a new SAR image reconstruction method. The process of image reconstruction was treated as a linear regression problem and the image to reconstruction was the unknown parameters of the regression model. It used Gaussian mixture parameters to predefine the prior conditional density of the unknown parameters in order to confine the sparsity. A set of model could be achieved that could be used to reconstruct the image in sense of MMSE. When the hyperparameters were unknown, the method based on EM could be used to estimate. Simulation results indicate that the Bayesian matching pursuit based method can get a precisely reconstructed image and the details can be preserved.

Key words: compressive sensing(CS); SAR image; Gaussian mixture parameter; Bayesian; EM

0 引言

SAR 图像在军事和民事领域有着广泛的应用。随着图像分辨率提高等因素, SAR 图像的存储和传输成为 SAR 系统的一个关键问题。高效的数据压缩方法成为发展先进 SAR 系统的一个重要方向。然而, 由于 SAR 图像自身的一些特性, 如相干斑噪声、数据动态范围广、既有细节纹理信息又有大量均匀区域等, 传统的适用于光学图像的压缩方法并不一定是最优的, 甚至根本不合适。

压缩感知(CS)理论指出, 对于稀疏信号或可压缩信号, 可以用远低于 Nyquist 采样定理所要求的样本数实现信号的精确重构^[1-4]。由于 SAR 图像中存在各种各样的目标, 丰富的互信息以及相干斑噪声等, 其变换系数并不具有严格意义上的稀疏性。为了实现 SAR 图像的精确重构, 需要较多的 CS 样本数。然而在实际中所采用的 CS 样本数通常少于精确重建所需要的样本数。为了能够用较少的样本数实现 SAR 图像高质量的重构, 必须采用有效的 CS 重建算法。

本文结合稀疏贝叶斯学习^[5-7]和 CS 理论, 提出了一种基于贝叶斯匹配追踪(BMP)的 SAR 图像重构方法。SAR 图像小波变换的能量主要集中在低频部分, 而高频部分主要体现其细

节特征。为了既能达到较好的重建效果又能保持图像的细节特征, 本文采用文献[8]的分层 CS 模型, 在小波系数的低频部分采用线性采样, 仅在高频系数部分采用 CS 采样的方法, 然后通过采样数据获得高频部分小波系数的估计。利用高斯混合参数对未知权值参数赋予确定的先验条件概率分布, 用于限制权值参数的稀疏性。与传统的基于贝叶斯压缩感知理论(BCS)的图像重构方法^[9]得到图像 MAP 意义下的重构不同, 基于 BMP 的 SAR 图像重构方法能够得到一组重建图像所需要的具有较高后验概率密度的模型, 从而实现 SAR 图像 MMSE 意义下的重构。

1 信号模型

由于 SAR 图像自身的特性, 其小波域的系数并不具有严格意义上的稀疏性。为了既能达到较好的重建效果又能保持图像的细节特征, 本文仅在小波系数的高频部分采用压缩采样的方法。假设 $x \in \mathbb{R}^N$ (将系数向量化), 则噪声条件下的压缩采样过程可以表示为

$$y = \Phi x + w \quad (1)$$

其中: $y \in \mathbb{R}^M$ ($M \ll N$); Φ 为采样矩阵; w 为加性噪声, 且 $w \sim N(0, \sigma^2 I_M)$ 。

收稿日期: 2011-08-19; **修回日期:** 2011-10-15 **基金项目:** 中央高校基础研究基金资助项目(ZYGX2009Z005); 国家自然科学基金资助项目(60772143)

作者简介: 徐建平(1982-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为 SAR 成像技术、SAR 图像处理(xujianping1982@hotmail.com); 皮亦鸣(1968-), 男, 教授, 主要研究方向为 SAR 成像技术。

为了限制系数向量的稀疏性,假设 x 由高斯混合密度函数产生,则 x 的先验分布为

$$P(x|\mathbf{s}) \sim N(0, R(\mathbf{s})) \quad (2)$$

其中:协方差矩阵 $R(\mathbf{s})$ 由高斯混合参数构成的随机向量 $\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]^T$ 确定。为了计算的方便,假设 $\{x_n | s_n\}_{n=0}^{N-1}$ 相互独立且 $P(x_n | s_n) \sim N(0, \sigma_{s_n}^2)$, 混合参数 $\{s_n\}_{n=0}^{N-1}$ 服从 $P(s_n = 1) = p_1$ 的贝努力分布,则 $R(\mathbf{s})$ 为对角阵,且 $[R(\mathbf{s})]_{n,n} = \sigma_{s_n}^2$ 。为了限制其稀疏性,设 $\sigma_0^2 = 0$, 且 $p_1 < 1$, 则当 $s_n = 0, x_n = 0$; $s_n = 1, x_n \neq 0$ 。

由式(1)和(2)可知,测量数据 y 、未知系数 x 服从联合条件高斯分布,即

$$P\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} | \mathbf{s}\right) \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A(\mathbf{s}) & \Phi R(\mathbf{s}) \\ R(\mathbf{s}) \Phi^T & R(\mathbf{s}) \end{bmatrix}\right) \quad (3)$$

其中:

$$A(\mathbf{s}) = \Phi R(\mathbf{s}) \Phi^T + \sigma^2 I_M \quad (4)$$

2 模型选择与系数估计

2.1 MMSE 系数估计

由式(1)可知,在已知 y 的情况下,系数 x 的 MMSE 估计为

$$\hat{x}_{\text{mmse}} \triangleq E(x|y) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} P(\mathbf{s}|y) E\{x|y, \mathbf{s}\} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{S}$ 表示所有可能的模型构成的集合。由式(3)可得

$$E\{x|y, \mathbf{s}\} = R(\mathbf{s}) \Phi^T A(\mathbf{s})^{-1} y \quad (6)$$

当 N 较大时, $\mathbf{S}$ 的取值很大,通常只选择其中几个具有主要作用的模型。则系数 x 的近似 MMSE 估计可以表示为

$$\hat{x}_{\text{ammse}} \triangleq \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}_*} P(\mathbf{s}|y) E\{x|y, \mathbf{s}\} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{S}_*$ 表示具有主要作用的模型构成的集合。

同理,系数 x 的条件协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \text{cov}\{x|y\} &\approx \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}_*} P(\mathbf{s}|y) [\text{cov}\{x|y, \mathbf{s}\} + \\ &(\hat{x}_{\text{ammse}} - E\{x|y, \mathbf{s}\})(\hat{x}_{\text{ammse}} - E\{x|y, \mathbf{s}\})^T] \\ \text{cov}\{x|y, \mathbf{s}\} &= R(\mathbf{s}) - R(\mathbf{s}) \Phi^T A(\mathbf{s})^{-1} \Phi R(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (8)$$

系数 x 的 MMSE 估计误差可以由 x 的协方差矩阵的迹确定,即

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{cov}\{x|y\}) &\approx \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}_*} P(\mathbf{s}|y) [\text{Tr}(\text{cov}\{x|y, \mathbf{s}\}) + \\ &|\hat{x}_{\text{ammse}} - E\{x|y, \mathbf{s}\}|^2] \end{aligned} \quad (9)$$

由式(5)和(6)可知,为了得到系数 x 的 MMSE 估计,需要计算 $P(\mathbf{s}|y)$ 、 $A(\mathbf{s})^{-1}$ 以及 $\mathbf{S}_*$ 的确定。

2.2 模型选择

称 $\mathbf{s}$ 为模型向量,则所有的模型向量组成的集合可以表示为 $\mathbf{S} \triangleq \{0, 1\}^N$ 。系数 x 的 MMSE 估计就是从 $\mathbf{S}$ 中选出具有主要作用的一组模型向量 $\mathbf{S}_*$, 以及确定 $\{P(\mathbf{s}|y)\}_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}_*}$ 。

由贝叶斯定理可知,模型向量 $\mathbf{s}$ 的后验概率密度可表示为

$$P(\mathbf{s}|y) = \frac{P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s})}{\sum_{\mathbf{s}' \in \mathbf{S}} P(y|\mathbf{s}')P(\mathbf{s}')} \quad (10)$$

当 $\mathbf{S}_*$ 确定时, $\mathbf{s}$ 的后验概率密度可以近似表示为

$$P(\mathbf{s}|y) \approx \frac{P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s})}{\sum_{\mathbf{s}' \in \mathbf{S}_*} P(y|\mathbf{s}')P(\mathbf{s}')} \quad (11)$$

由式(10)(11)可知, $P(\mathbf{s}|y)$ 与 $P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s})$ 成正比,因此模型向量组合 $\mathbf{S}_*$ 的选择等价于选择 $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, 使得 $P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s})$ 取较大值。为了计算方便,将 $P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s})$ 取对数,得到模型

向量的选择标准为

$$\begin{aligned} v(\mathbf{s}, y) &= \ln P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s}) = \ln P(y|\mathbf{s}) + \ln P(\mathbf{s}) = \\ &= -\frac{1}{2}y^T A(\mathbf{s})^{-1}y - \frac{1}{2}\ln \det(A(\mathbf{s})) - \frac{1}{2}M \ln 2\pi + \sum_{n=0}^{N-1} \ln P(s_n) = \\ &= -\frac{1}{2}y^T A(\mathbf{s})^{-1}y - \frac{1}{2}\ln \det(A(\mathbf{s})) - \frac{1}{2}M \ln 2\pi + \\ &\quad \|\mathbf{s}\|_0 \ln \frac{p_1}{1-p_1} + N \ln(1-p_1) \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $\|\mathbf{s}\|_0$ 表示 $\mathbf{s}$ 中非 0 元素的个数。

由于 $P(y|\mathbf{s})P(\mathbf{s}) = P(y, \mathbf{s})$ 及 $P(y, \mathbf{s}) = e^{v(\mathbf{s}, y)}$, 因此 $P(y, \mathbf{s})$ 的较大值与 $v(\mathbf{s}, y)$ 的较大值对应。 $\mathbf{S}_*$ 就是由与 $v(\mathbf{s}, y)$ 较大值对应的模型向量 $\mathbf{s}$ 组成的集合。由于当 N 较大时,计算全部 2^N 个模型向量是不切实际的,因此本文采用一种树型搜索方法快速寻找 $\mathbf{S}_*$ ——贝叶斯匹配追踪(BMP)。首先,假定 $\mathbf{s} = 0$, 只将其中一个混合参数由 0 变为 1, 产生 N 个模型向量, 记为 $\mathbf{S}^{(1)}$; 由式(12)计算 $\mathbf{S}^{(1)}$ 中所有模型向量的 $v(\mathbf{s}, y)$, 并选择其中 D 个具有最大 $v(\mathbf{s}, y)$ 值的模型向量, 记为 $\mathbf{S}_*^{(1)}$ 。然后, 将 $\mathbf{S}_*^{(1)}$ 中向量的一个混合参数由 0 变为 1, 将得到的模型向量记为 $\mathbf{S}^{(2)}$, 由式(12)计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 中所有向量的 $v(\mathbf{s}, y)$ 值, 并选择其中 D 个具有最大 $v(\mathbf{s}, y)$ 值的模型向量, 记为 $\mathbf{S}_*^{(2)}$ 。以此类推, 直到满足停止迭代的条件, 比如 $P(\|\mathbf{s}\|_0 > T)$ 足够小, T 为迭代次数, 则 $\mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^{(T)}$ 。

2.3 快速算法

提高模型选择效率的关键是模型向量选择标准的快速更新。本节介绍一种选择标准的快速更新算法。假设 $\mathbf{s}_n$ 与 $\mathbf{s}$ 相同, 除了第 n 个元素由 0 变为 1 之外。

由式(12)可知, 由于 $A(0) = \sigma^2 I_M$, 则

$$\begin{aligned} v(0, y) &= -\frac{1}{2}M \ln 2\pi - \frac{1}{2}M \ln \sigma^2 - \\ &\quad \frac{1}{2\sigma^2} \|y\|_2^2 + N \ln(1-p_1) \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $\mathbf{s}_n$ 与 $\mathbf{s}$ 只是第 n 个元素不同, 并且 $[\mathbf{s}_n]_n = 1, [\mathbf{s}]_n = 0$, 则

$$A(\mathbf{s}_n) = A(\mathbf{s}) + \sigma_1^2 \varphi_n \varphi_n^T \quad (14)$$

其中: φ_n 为 Φ 的列向量。由矩阵求逆定理可知:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{s}_n)^{-1} &= A(\mathbf{s})^{-1} - \sigma_1^2 \beta_n b_n b_n^T \\ b_n &= A(\mathbf{s})^{-1} \varphi_n \\ \beta_n &= (1 + \sigma_1^2 \varphi_n^T b_n)^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

由式(14)和(15)可知:

$$\begin{aligned} y^T A(\mathbf{s}_n)^{-1} y &= y^T (A(\mathbf{s})^{-1} - \sigma_1^2 \beta_n b_n b_n^T) y = \\ &= y^T A(\mathbf{s})^{-1} y - \sigma_1^2 \beta_n (y^T b_n)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \ln \det(A(\mathbf{s}_n)) &= \ln \det(A(\mathbf{s}) + \sigma_1^2 \varphi_n \varphi_n^T) = \\ &= \ln \det(A(\mathbf{s})) - \ln \beta_n \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_n\|_0 \ln \frac{p_1}{1-p_1} &= (\|\mathbf{s}\|_0 + 1) \ln \frac{p_1}{1-p_1} = \\ &= \|\mathbf{s}\|_0 \ln \frac{p_1}{1-p_1} + \ln \frac{p_1}{1-p_1} \end{aligned} \quad (18)$$

由式(16)~(18)可知:

$$v(\mathbf{s}_n, y) = v(\mathbf{s}, y) + \frac{1}{2} \ln \beta_n + \frac{\sigma_1^2}{2} \beta_n (y^T b_n)^2 + \ln \frac{p_1}{1-p_1} \quad (19)$$

3 EM 参数估计

在前面的分析中, 假设参数 $\theta = \{p_1, \sigma^2, \sigma_1^2\}$ 已知。然而

实际应用中,参数 $\theta = \{p_1, \sigma^2, \sigma_1^2\}$ 通常都是未知的,必须对其进行估计。本章介绍一种基于 EM 方法的参数估计方法^[10]。

由式(2)可知:

$$P(x|s, \sigma_1^2) \sim N(0, \sigma_1^2 D(s)) \quad (20)$$

其中: $D(s)$ 是由 s 构成的对角阵。

由式(1)可知:

$$P(y|s, \sigma_1^2, \sigma^2) \sim N(0, \sigma_1^2 \Phi D(s) \Phi^T + \sigma^2 I_M) \quad (21)$$

设 $\alpha = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}$, 且 Φ_s 是由 Φ 与 s 中非 0 元素相对应的列向量构成的矩阵, 则

$$P(y|s, \sigma_1^2, \sigma^2) \sim N(0, \sigma_1^2 (\Phi_s \Phi_s^T + \alpha I_M)) \quad (22)$$

由式(5)可得, 基于 EM 的参数估计方法可以表示为

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \arg \max_{\theta} \sum_{s \in S_*} P(s|y, \hat{\theta}^{(i)}) \ln P(y, s|\hat{\theta}^{(i)}) \quad (23)$$

其中: $\ln P(y, s|\hat{\theta}) = \ln P(y|s, \sigma_1^2, \alpha) + \ln P(s|\lambda)$, $\lambda = 1 - p_1$ 。

由式(23)可知:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \arg \max_{\lambda} \sum_{s \in S_*} P(s|y, \hat{\theta}^{(i)}) \ln P(s|\lambda) \quad (24)$$

由于 $\ln P(s|\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln P(s_n|\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln (\lambda + (1-2\lambda)s_n)$, 则

$$\frac{\partial \ln P(s|\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1-2s_n}{\lambda + (1-2\lambda)s_n} = \frac{K_s}{\lambda-1} + \frac{N-K_s}{\lambda} \quad (25)$$

其中: $K_s = \|s\|_0$, 则

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{s \in S_*} P(s|y, \hat{\theta}^{(i)}) K_s \quad (26)$$

同理可得

$$\hat{\alpha}^{(i+1)} = \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{s \in S_*} P(s|y, \hat{\theta}^{(i)}) \frac{1}{M-K_s} \|y\|^2 I_M - \Phi_s (\Phi_s^T \Phi_s)^{-1} \Phi_s^T \quad (27)$$

$$\hat{\sigma}_1^{2(i+1)} = \frac{1}{M} \sum_{s \in S_*} P(s|y, \hat{\theta}^{(i)}) \|y\|^2 (\Phi_s \Phi_s^T + \hat{\alpha} I_M)^{-1} \quad (28)$$

4 仿真验证

本章通过计算机仿真来验证本文方法的有效性。选择三幅 128×128 的 SAR 图像, 第一幅分辨率为 1 m, 第二幅分辨率为 3 m, 第三幅分辨率为 6 m。仿真平台为 MATLAB 7.01。同时将本文方法 BMP 与现有的几种成熟的 CS 重建算法相比较, 即 BP^[11]、BCS^[9]、StOMP^[12]、Lasso。

对原始图像进行 Harr 小波变换。采用文献[8]所提出的多层 CS 结构, 只对最高层小波系数进行 CS 采样, 采样矩阵为 Gaussian 基矩阵; 对其他层小波系数进行直接采样。归一化重建误差定义为 $\|\hat{x} - x\|_2 / \|x\|_2$ 。

图 1 为本文 BMP 算法与传统线性重建算法结果的比较。所谓线性重建算法, 就是将最高层小波系数置 0 而得到的结果。BMP 算法在最高层的 CS 采样率为 20%。由图 1 可以看出, BMP 算法的重建误差与线性方法相比有了明显的提高。SAR 图像小波变换的低层系数集中了其大部分能量, 但是高层系数与图像的细节特征相关。如果为了降低采样率而直接将高层系数置 0, 会使得图像的细节特征丢失。为了能够在重建质量和采样率这两方面折中, 采取本文所提出的 BMP 压缩采样重建方法, 能够用较少的采样数据获得图像较为精确的重建, 同时保留图像的细节特征。

图 2 为 BMP 算法与线性重建算法以及其他 CS 重建算法在不同 CS 采样率下的重建结果比较, 以归一化均方误差

(NMSE) 作为衡量重建结果的标准。由图 2 可知, 在各种不同的采样率下, 本文采用的 BMP 算法都能获得最好的重建结果。当 CS 采样率较低时, 一些 CS 方法的重建结果甚至比线性重建方法的结果更差, 如 StOMP、Lasso。这是因为 SAR 图像小波变换的系数并不具有严格意义的稀疏性, 为了获得较好的重建结果, 需要较多的 CS 样本数。当 CS 样本较少时, 没有达到重建所需样本数的要求, 因此重建结果较差。随着 CS 采样率的提高, 各种 CS 方法的结果都有明显的提高。当 CS 采样率越高时, 各种 CS 方法的重建结果越接近。与 BCS 方法相比, 本文所采用的基于 BMP 的 SAR 图像重构方法重建精度有了明显提高。这是因为 BMP 方法能够得到图像 MMSE 意义下的重构, 而 BCS 只能得到图像 MAP 意义下的重构。

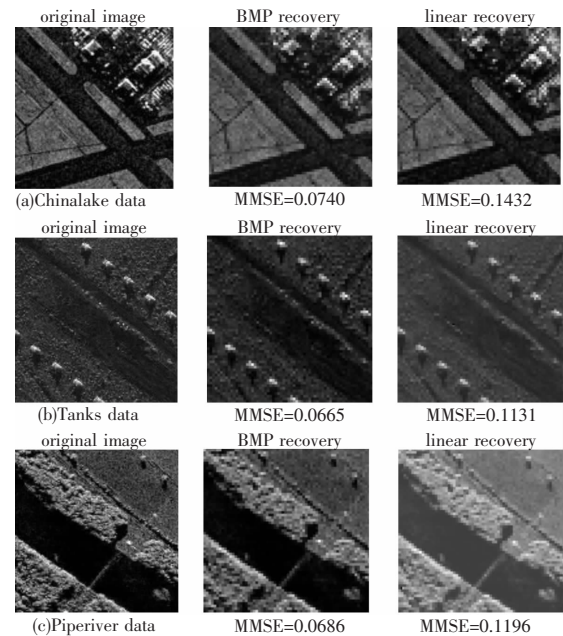


图 1 BMP 与线性重建结果比较

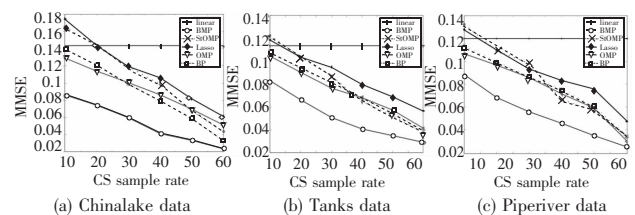


图 2 不同采样率对 CS 重建算法的影响

5 结束语

SAR 图像由于其自身的特性, 在小波变换域并不具有严格意义上的稀疏性。如果直接将高频小波系数置 0, 会使得重建图像丢失重要的细节特征。为了能够在取得较好重建效果的同时保留图像的重要细节特性, 本文采用了一种基于贝叶斯匹配追踪的 CS 重建方法。采用一种多层 CS 结构, 在低频部分直接采样, 而在高频部分利用 CS 采样。贝叶斯匹配追踪利用高斯混合参数对未知权值参数赋予确定的先验条件概率分布, 用于限制权值参数的稀疏性。采用模型平均的方法处理模型不确定性问题, 得到一组重建图像所需要的具有较高后验概率密度的模型, 从而实现 SAR 图像 MMSE 意义下的重构。实验结果表明, 基于贝叶斯压缩感知的 SAR 图像重构方法与线性重建方法和其他 CS 重建方法相比, 能够获得精确的重建图像, 并且能够有效地保持图像的细节特征。 (下转第 2736 页)

参考文献:

- [1] KUTYNIOK G. Data separation by sparse representations, compressed sensing: theory and applications [M]. [S. l.]: Cambridge University Press, 2011.
- [2] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2006, 52 (2): 489-509.
- [3] CANDES E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25 (2): 21-30.
- [4] DONOHO D L. Compressive sensing [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2006, 52 (4): 1289-1306.
- [5] WIPF D P, RAO B D. Sparse Bayesian learning for basis selection [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2004, 52 (8): 2153-2164.
- [6] LARSSON E G, SELÉN Y. Linear regression with a sparse parameter vector [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2007, 55 (2): 451-460.
- [7] ELAD M, YAVNEH I. A weighted average of sparse representations is better than the sparsest one alone [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2009, 55 (10): 4701-4714.
- [8] TSQIQ Y, DONOHO D L. Extensions of compressed sensing [J]. *Signal Processing*, 2006, 86 (3): 549-571.
- [9] 方红, 王年, 章权兵. 基于稀疏贝叶斯学习的图像重建方法 [J]. *中国图象图形学报*, 2009, 14 (6): 1502-1509.
- [10] NEAL R, HINTON G E. A view of the EM algorithm that justifies incremental, sparse, and other variants [M] // *Learning in Graphical Models*. Cambridge: MIT Press, 1999: 355-368.
- [11] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Journal of Scientific Computation*, 1999, 20 (1): 33-61.
- [12] EFRON B, HASTIE T, JOHNSTONE I, *et al.* Least angle regression [J]. *SIAM Journal of Scientific Computation*, 2004, 32 (1): 407-499.
- [13] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, *et al.* Sparse solution of underdetermined linear equations by stage wise orthogonal matching pursuit [D]. Stanford, CA: Stanford University, 2006.