

# 一种基于最大最小特征值的频谱感知改进算法

王润亮, 李浩, 黄焱, 张白愚

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

**摘要:** 针对大多数频谱感知算法在低信噪比下性能不佳的问题, 借鉴最大最小特征值算法(MME)提出一种改进算法。该算法对接收信号做差分预处理, 再求其统计协方差的最大最小特征值比; 最后用数值分析方法, 结合聂曼—皮尔逊准则(N-P准则)求出恒虚警率门限进行判决。蒙特卡洛(Monte Carlo)仿真实验对该算法与MME以及能量检测法的性能进行了比较, 在极低信噪比下该算法的性能优于MME, 而无论信噪比如何均优于能量检测法。实验表明, 改进算法适用于低信噪比下频谱感知。

**关键词:** 认知无线电; 频谱感知; 最大最小特征值; 数值分析; 聂曼—皮尔逊准则; 恒虚警率门限

**中图分类号:** TP393.04      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2012)07-2638-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.07.065

## Modified algorithm for spectrum sensing based on MME

WANG Run-liang, LI Hao, HUANG Yan, ZHANG Bai-yu

(Institute of Information Engineering, The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The detection capabilities of most spectrum sensing algorithms are badly affected by the local SNR (signal-to-noise ratio). Aiming at this problem, this paper adopted the advantages of MME algorithm, and proposed a novel algorithm based on MME. Firstly, it employed a difference operation to the received signal. Then, it took the ratio of maximum to minimum eigenvalue as test statistic. Finally, it derived the constant false alarm rate (CFAR) threshold according to numerical analysis methods and Neyman-Pearson criterion. It used all-sided Monte Carlo simulations to show the relationship between detection performance and SNR. All the simulations took MME and energy detection method as contrast. In the case of MME, the novel algorithm evidently improves the detection capability when sensors are deployed in very low SNR scenes. In another case, it's effectively improved no matter what the SNR is.

**Key words:** cognitive radio; spectrum sensing; maximum-minimum eigenvalue (MME); numerical analysis; Neyman-Pearson criterion; CFAR threshold

随着无线通信技术的飞速发展, 新的通信应用层出不穷, 特别是新兴的无线多媒体应用以其丰富多彩的服务内容拥有众多的用户和良好的市场前景, 逐渐成为无线通信领域的新贵。但在无线通信市场蓬勃发展的同时, 无线频谱资源却逐渐耗尽, 有陷入“无米之炊”窘境的风险<sup>[1]</sup>。1999年Mitola博士首次提出了认知无线电的概念, 之后, Haykin博士、美国联邦通信委员会(Federal Communication Commission, FCC)等学者和机构从系统化、工程化的角度对认知无线电进行了重新定义。这种技术采用动态频谱分配等频谱共享技术, 以二次利用的方式实现频谱的高效利用, 能够有效克服目前各国频谱分配制度固有的弊端<sup>[1]</sup>。

认知无线电技术实现频谱高效利用的前提是对空闲频段和主用户信号的感知, 即不仅要能准确感知是否存在空闲频段, 同时还应不断检测主用户信号避免对其造成干扰。因此频谱感知技术是认知无线电的基础和关键。按照经典的分类方法, 频谱感知技术分为三种, 即基于接收机的感知、基于发射机的感知与合作感知(一些文献也称协作感知)。目前对基于发射机的感知研究较为深入, 比较经典的方法有匹配滤波器检测、循环平稳特征检测和能量检测<sup>[2]</sup>。匹配滤波器检测和循

环平稳特征检测具有较高的检测准确率, 并且能够克服噪声不确定性的影响, 但这两种算法都需要已知主用户信号的先验知识, 因此不能用于信号的盲检测<sup>[3-5]</sup>。能量检测法是一种非相关的次优检测算法, 具有计算简单、实现灵活、无须先验知识等优点, 但它易受衰落信道和噪声不确定性的影响, 并且在低信噪比环境下性能急剧下降<sup>[3]</sup>。2008年Zeng等人<sup>[6]</sup>以接收信号采样协方差矩阵的最大和最小特征值之比为检验统计量, 结合随机矩阵理论实现频谱感知。这种算法无须任何先验知识, 并且能够有效地克服噪声不确定性对检测造成的不利影响。本文借鉴文献<sup>[6]</sup>, 结合数值分析方法提出了一种基于最大最小特征值的频谱感知改进算法。

## 1 数值分析

数值分析也称计算数学, 是数学科学的一个分支, 它研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现。近几十年来由于计算机的迅速发展, 求解各种数学问题的数值计算方法也愈来愈多地应用于科学技术各领域。科学计算从一门工具性、方法性、边缘性的学科, 成为与理论研究和科学实验并重的现代科学研究三种主要手段之一<sup>[7]</sup>。

收稿日期: 2011-10-25; 修回日期: 2011-11-29

**作者简介:** 王润亮(1984-), 男, 陕西西安人, 硕士研究生, 主要研究方向为信号与信息处理(wrl\_084@sina.com); 李浩(1986-), 男, 河北衡水人, 硕士研究生, 主要研究方向为信源信道联合译码、译码解调联合处理; 黄焱(1964-), 男, 江西南昌人, 教授, 主要研究方向为通信信号的分析与处理; 张白愚(1967-), 男, 河南郑州人, 副教授, 主要研究方向为通信信号的分析与处理。

### 1.1 插值法

许多实际问题都用函数来表示某种内在规律的数量关系,其中相当一部分函数由于计算复杂、使用不方便等原因,通常只根据其中部分自变量给出函数表。为了研究函数的变化规律,往往要求出不在函数表上的函数值。因此,本文希望根据给定的函数表做一个既能反映函数  $f(x)$  的特性,又便于计算的简单函数  $P(x)$ ,用  $P(x)$  去近似  $f(x)$ 。这样得到的函数  $P(x)$  就是本文希望的插值函数,这种方法就是插值法<sup>[7]</sup>。

**定义 1** 设函数  $y=f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义,且已知在点  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  上的值  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ,若存在一个简单函数  $P(x)$ ,使

$$P(x_i) = y_i, i=0, 1, \dots, n \quad (1)$$

成立,就称  $P(x)$  为  $f(x)$  的插值函数,点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  称为插值节点,包含插值节点的区间  $[a, b]$  称为插值区间,求插值函数  $P(x)$  的方法称为插值法。

常见的插值法包括拉格朗日插值、牛顿插值、埃尔米特差值、分段低次插值和三次样条插值等方法。拉格朗日插值是比较基础的方法,较容易实现,且具有不错的效果。本文采用拉格朗日插值法求解检验统计量的分布函数,并给出其函数表。

### 1.2 拉格朗日插值

拉格朗日插值实际上是线性插值和抛物线插值的推广,其几何意义是通过  $n+1$  个点的  $n$  次插值多项式  $L_n(x)$ <sup>[7]</sup>。

**定义 2** 若  $n$  次多项式  $l_j(x) (j=0, 1, \dots, n)$  在  $n+1$  个节点  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  上满足条件

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases} j, k=0, 1, \dots, n \quad (2)$$

就称这  $n+1$  个  $n$  次多项式  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  为节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的  $n$  次插值基函数。

可以得到  $n$  次插值基函数为

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)} \quad (3)$$

满足式(3)的插值多项式  $L_n(x)$  可表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) \quad (4)$$

称式(4)为拉格朗日插值多项式。

需要注意的是,插值法具有“龙格现象”,即在某些情况下插值多项式的次数越高效果反而越差。为了避免出现该现象,本文采用分段低次插值的方式对统计量分布函数进行逼近。

## 2 基于最大最小特征值的频谱感知改进算法

文献[6]算法较能量检测算法在检测概率方面有了很大提高,并且能够克服噪声不确定性带来的不利影响,是一种较为理想的信号盲检测算法。但经过实验验证,在极低信噪比环境下上述算法的效果仍然不够理想。针对该问题本文对上述算法进行改进,引入差分预处理。经过差分运算构造出的采样协方差矩阵在其特征向量张成的空间中有更大的尺度,即采样协方差矩阵有更大的特征值。同时,可以验证较差分前最大特征值的增量大于最小特征值的增量。这样,通过检验统计量  $T = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$  就能更好地判断主用户信号是否出现,其中  $\lambda_{\max}$  和  $\lambda_{\min}$  分别代表最大特征值和最小特征值。

### 2.1 信道模型

假设在一个认知无线网络中有  $K$  个认知用户,接收信

号的模型为

$$y_k(n) = \begin{cases} \eta_k(n) & H_0 \\ h_k(n)s(n) + \eta_k(n) & H_1 \end{cases} (n=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

其中:  $y_k(n)$  为第  $k$  个认知用户接收到的信号;  $h_k(n)$  为信道增益;  $s(n)$  为主用户信号;  $\eta_k(n)$  为零均值高斯白噪声,其方差为  $\sigma_\eta^2$ ;  $H_0$  和  $H_1$  分别代表没有主用户信号和有主用户信号两种假设。为方便分析,本文进一步假设在检测周期内  $h_k(n)$  保持恒定。据此可以得到由  $K$  个认知用户接收信号组成的  $K \times N$  接收信号矩阵:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \dots & y_1(N) \\ y_2(1) & y_2(2) & \dots & y_2(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_K(1) & y_K(2) & \dots & y_K(N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

定义接收信号矩阵的采样协方差矩阵为

$$R(N_s) = \frac{1}{N} Y Y^H \quad (7)$$

其中:  $Y^H$  表示  $Y$  的共轭转置矩阵<sup>[8]</sup>。

### 2.2 判决门限的设置

文献[6]采用恒虚警率法求判决门限,即假定在  $H_0$  条件下系统认为有主用户信号出现,根据该事件发生的概率(虚警概率)和该事件的概率密度函数求出判决门限的方法。这时接收信号矩阵的采样协方差矩阵为  $R_{\eta}(N_s)$ ,当  $N$  趋于无穷时其最大特征值和最小特征值的线性变换以概率 1 趋近一阶 Tracy-Widom 分布。系统虚警概率的表达式如下:

$$P_{fa} = P(\lambda_{\max} > \gamma_1 \lambda_{\min}) = 1 - F_1\left(\frac{\gamma_1(\sqrt{N}-\sqrt{K})^2 - \mu}{v}\right) \quad (8)$$

其中,  $\mu = (\sqrt{N-1} + \sqrt{K})^2$ ,  $v = (\sqrt{N-1} + \sqrt{K}) \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} + \frac{1}{\sqrt{K}}\right)^{1/3}$ 。根据式(8),可以得到判决门限的表达式

$$\gamma_1 = \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{K})^2}{(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2} \left(1 + \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{K})^{-2/3}}{(NK)^{1/6}} F_1^{-1}(1 - P_{fa})\right) \quad (9)$$

由于本文对接收信号作了差分预处理,所以改变了原算法中最大特征值和最小特征值的分布,原判决门限不再适用。为求新的判决门限,假设检验统计量  $T$  的分布函数为  $F(x)$ ,则式(8)可改写为

$$P_{fa} = P(T > \gamma) = 1 - F(\gamma) \quad (10)$$

判决门限的表达式为

$$\gamma = F^{-1}(1 - P_{fa}) \quad (11)$$

对统计量  $T$  作大量独立实验,再利用 MATLAB 统计其概率分布可建立出插值区间  $[x_0, x_n]$  内若干插值点对应的概率密度函数值。通过求和计算可以进一步得出插值区间内若干插值点对应的分布函数值。此时,已经得到了  $1 - P_{fa}$  和  $F(\gamma)$  间的对应关系。根据恒虚警率方法,已知虚警概率  $P_{fa}$  (即函数值),要求判决门限  $\gamma$  (即函数自变量)。采用拉格朗日插值可得出指定虚警率下的判决门限。表 1 总结了采样点数  $N = 2000$  时,经过 100 000 次独立实验求出的部分判决门限平均值。其中,  $P_{fa} = 1 - F(\gamma)$  是指定的虚警概率。

表 1 统计量分布函数部分取值

$\gamma$	1.2487	1.2686	1.2830	1.3008	1.3355
$1 - F(\gamma)$	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5
$\gamma$	1.3595	1.3845	1.4067	1.4494	
$1 - F(\gamma)$	0.7	0.9	0.95	0.99	

### 2.3 算法流程

实现本文算法的流程(图 1)。

a) 对接收信号作差分运算, 得到  $\bar{y}_k(n) = y_k(n+1) - y_k(n)$ , 组成新的接收信号矩阵  $\bar{Y}$ ;

b) 求采样协方差矩阵,  $R(N_s) = \frac{1}{N} \bar{Y} \bar{Y}^H$ ;

c) 求检验统计量,  $T = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ ;

d) 查表得出判决门限,  $\gamma = F^{-1}(1 - P_{fa})$ ;

e) 按如下规则判决

$$\begin{cases} T = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} < \gamma & H_0 \\ \text{else} & H_1 \end{cases}$$

值得一提的是, 该算法仅增加了差分运算, 因此整体复杂度没有明显提高。

### 3 仿真分析

仿真实验以 MATLAB 为平台, 通过 1 000 次蒙特卡洛实验(下文不特别声明的话, 均采用此仿真次数)来验证本文算法的有效性。实验 3.2、3.3、3.4 分别考察了虚警概率、信噪比和采样点数对判决门限的影响。所有仿真信号均采用 BPSK 基带信号, 码元速率 1 kHz, 采样速率等于码元速率, 采用矩形成形。认知网络节点个数  $K = 10$ 。定义检测概率  $P_d = M_d/M$ , 其中  $M$  为实验总次数,  $M_d$  为正确检测次数。

#### 3.1 差分后与差分前检验统计量的比较

信号检测的本质是二元假设检验问题, 图 2 给出了这类问题的一般图示。  $Pr\{T < \gamma\}$  和  $Pr\{T \geq \gamma\}$  分别是判决为  $H_0$  和  $H_1$  的概率,  $Pr\{(T < \gamma)\} + Pr\{(T \geq \gamma)\} = 1$

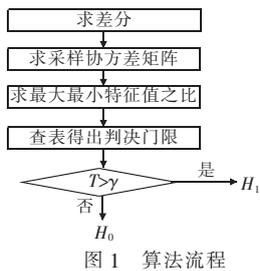


图 1 算法流程

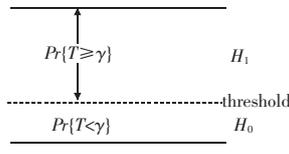


图 2 判决区域的示意图

定义欧式距离

$$D = T - \gamma \tag{12}$$

那么, 当  $D < 0$  时认为  $H_0$  成立, 反之  $H_1$  成立。由于  $\gamma$  为恒虚警判决门限, 那么在相同信噪比条件下, 如果检验统计量和判决门限的差值增大, 也即  $D$  的取值增大, 则可认为其检测性能得到提升。

在采样点数  $N = 1000$  的条件下, 信噪比为  $-16 \text{ dB} \sim 0 \text{ dB}$ , 步进为  $4 \text{ dB}$ , 虚警概率  $P_{fa} = 0.1$ 。对差分前与差分后的检验统计量作 1 000 次独立实验并取平均值, 比较  $D$  的变化情况。表 2 给出了  $H_0$ 、 $H_1$  两种假设和不同信噪比下差分前与差分后检验统计量的平均值, 可以看到随着信噪比的增加, 检验统计量的取值也在逐步增加, 与此同时判决门限几乎不受信噪比的影响(将在 3.3 节中加以验证), 因此可以推断该算法的检测性能将随着信噪比的增加而提高。

表 3 在表 2 的数据基础上对  $H_1$  假设下各信噪比对应的欧式距离进行了对比。由实验结果可知, 经差分处理后  $D' > D$ ,

说明新的检验统计量在相同信噪比环境下具有更好的区分性能, 也就是说检测性能要好于改进前。

表 2 差分前和差分后两种假设下的检验统计量平均值

检验统计量平均值/dB	-16	-12	-8	-4	0
$H_1$ (差分前)	1.536	1.956	3.072	5.917	13.021
$H_0$ (差分前)	1.400	1.401	1.406	1.399	1.399
$H_1$ (差分后)	1.635	2.072	3.259	6.292	13.887
$H_0$ (差分后)	1.513	1.511	1.512	1.512	1.513

表 3 差分前和差分后欧式距离对比

欧式距离/dB	-16	-12	-8	-4	0
差分前	0.021	0.441	1.557	4.403	11.506
差分后	0.038	0.475	1.662	4.695	12.290

#### 3.2 统计量分布函数的插值结果

在信噪比  $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$ , 采样点数  $N = 1000$  的条件下, 对统计量  $T = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  的取值作 100 000 次独立实验, 取插值节点数为 10, 以步进  $\varepsilon = 0.001$  分割插值区间, 虚警概率  $P_{fa}$  取 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99, 利用低阶拉格朗日插值分三段对插值区间进行运算。

由于检验统计量分布函数的解析式很难求出, 经统计得出的部分函数值又不是所需的, 所以需要插值得出给定点的函数值。图 3 给出了插值曲线的逼近效果, 其中纵轴为给定虚警概率, 横轴为对应的判决门限值。图中检验统计量的实际分布曲线由 MATLAB 对 100 000 次实验结果进行统计得出, 逼近曲线由拉格朗日插值函数计算得出。实验采用分段低次插值, 避免了“龙格现象”, 达到了很好的逼近效果。另外, 该实验进一步验证了式(11), 即判决门限是给定虚警概率的函数。

#### 3.3 信噪比对判决门限的影响

在采样点数  $N = 1000$  的条件下, 取信噪比为  $-20 \text{ dB} \sim 0 \text{ dB}$ , 步进为  $5 \text{ dB}$ , 虚警概率  $P_{fa}$  取 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99。

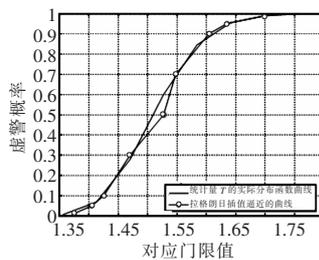


图 3 插值函数的逼近效果

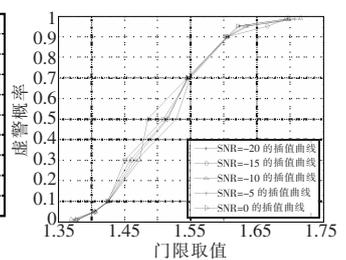


图 4 不同信噪比下的分布函数曲线

该实验通过比较不同信噪比下检验统计量的分布函数, 来考察信噪比对判决门限的影响。图 4 给出了不同信噪比下检验统计量分布函数的曲线, 曲线上各点的横坐标为给定虚警概率  $P_{fa}$  对应的判决门限值。表 4 给出了各虚警概率对应的判决门限在不同信噪比下的平均值和方差。实验表明, 各信噪比下判决门限的方差均为  $10^{-4} \sim 10^{-7}$  数量级。因此可以得出结论, 信噪比对判决门限取值的影响不大, 可采用各信噪比判决门限的平均值作为判决依据, 从而达到既简化算法又不失精确性的目的。

表 4 各虚警概率对应的判决门限在不同信噪比下的平均值和方差

$P_{fa}$	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99
mean	1.3761	1.4051	1.4247	1.4623	1.5104	1.5466	1.6052	1.6358	1.7025
var	1.42e-05	6.89e-07	2.40e-07	6.92e-05	2.52e-04	3.39e-06	7.66e-07	3.25e-04	7.78e-05

#### 3.4 采样点数对判决门限值的影响

采样点数取  $N = 100, 200, 500, 1000, 2000$ , 虚警概率  $P_{fa}$  取

0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99, 判决门限取不同信噪比下的平均值。

图5给出了在不同采样点数 $N$ (即检测持续时间)条件下的检验统计量分布函数曲线,其中各点的横坐标为给定虚警概率 $P_{fa}$ 对应的判决门限值。实验表明,判决门限受采样点数的影响较大。以恒虚警概率 $P_{fa}=0.1$ 为例,当采样点数 $N=1000$ 时,判决门限 $\gamma_{1000}=1.422$ ;当采样点数 $N=100$ 时,判决门限 $\gamma_{100}=3.093$ 。判决门限增大会导致漏警概率升高,对检测概率有较大影响。由此可以得出结论,检测持续时间对判决门限值有较大影响,在实际判决时应根据检测持续时间和能够承受的漏警率选择不同的判决门限。

### 3.5 采样点数对检测性能的影响

分别取采样点数 $N=100, 200, 500, 1000, 2000$ , 虚警概率 $P_{fa}=0.1$ , 信噪比分别从 $-20$  dB~ $0$  dB, 步进为 $1$  dB。

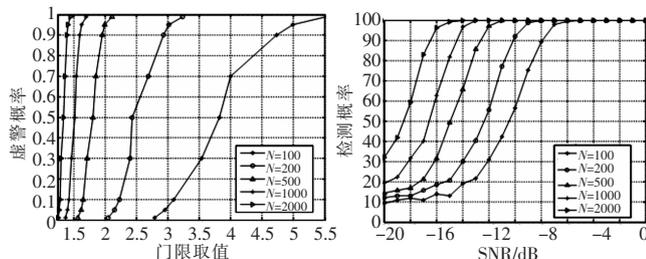


图5 不同采样点数下的分布函数曲线

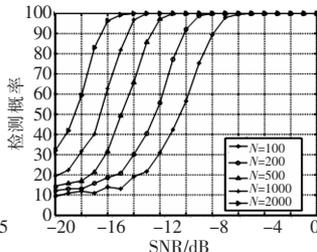


图6 不同采样点数下的检测概率

图6给出了不同采样点数对该算法检测概率的影响,可以看到检测概率与检测持续时间成正比关系,即使在最差情况下,检测概率也在 $-8$  dB时达到 $90\%$ 。当 $N=1000$ 时,在 $-14$  dB时检测概率可达到 $90\%$ 以上;当 $N=2000$ 时,在 $-16$  dB时检测概率可达到 $90\%$ 以上。由此可以得出结论,该算法非常适合在低信噪比下进行频谱感知,并且检测持续时间越长,性能越好。

### 3.6 本文算法与MME和能量检测算法的性能比较

取采样点数 $N=2000$ , 虚警概率 $P_{fa}=0.1$ , 信噪比为 $-20$  dB~ $0$  dB, 以 $1$  dB为步进。用作对比的两种算法分别是最大最小特征值算法(MME)和采用合作感知的能量检测算法。合作感知采用 $K$ 秩准则进行数据融合,当 $k \geq \lceil K/2 \rceil$ 个认知节点判决 $H_1$ 时,认为有主用户信号存在。其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。

图7给出了本文算法与MME和能量检测算法的性能比较,可以看到当信噪比高于 $-17$  dB时本文算法与MME的检测性能相当;而当信噪比低于 $-17$  dB时本文算法的检测性能明显优于MME。根据3.1节的分析可知,采用差分预处理可

以提高相同信噪比下算法的区分度,因此本文算法具有更好的检测性能。MME算法本身具有一定的抗噪性能,因此当信噪比大于一定值时,两者的检测性能相当。另外,无论信噪比如何,本文算法的性能都要明显优于能量检测算法。

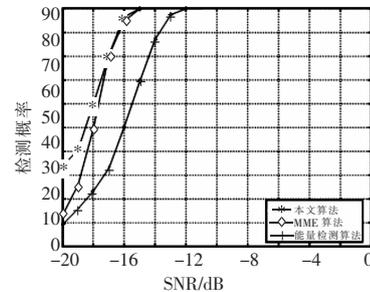


图7 本文算法与MME和能量检测算法性能比较

## 4 结束语

本文从接收信号采样协方差矩阵的最大最小特征值之比入手,借鉴文献[6]的思想提出一种基于最大最小特征值的频谱感知改进算法。该算法仅运用了差分运算,因此计算复杂度与原算法相当。仿真结果表明,该算法能够克服噪声不确定性对检测带来的不利影响,并且在低信噪比下较其他方法具有更好的检测性能。

### 参考文献:

- [1] 郭彩丽,冯春燕,曾志民. 认知无线网络技术及应用[M]. 北京:电子工业出版社,2010:1-15.
- [2] 周小飞,张宏纲. 认知无线电原理及应用[M]. 北京:北京邮电大学出版社,2007:16-25.
- [3] YUCEK T, ARSLAN H. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2009, 11(1):116-130.
- [4] 张贤达,保铮. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京:国防工业出版社,2001:355-358.
- [5] 黄知涛,周一宇,姜文利. 循环平稳信号处理与应用[M]. 北京:科学出版社,2006:80-88.
- [6] ZENG Yong-hong, LIANG Ying-chang. Eigenvalue based spectrum sensing algorithm for cognitive radio[J]. IEEE Trans on Communication, 2008, 57(6):1784-1793.
- [7] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社,2008:22-29.
- [8] CARDOSO L S, DEBBAH M, BIANCHI P. Cooperative spectrum sensing using random matrix theory[C]//Proc of the 3rd International Symposium on Wireless Pervasive Computing. [S. l.]: IEEE, 2008: 334-338.