可交易瓶颈许可证的交通网络对偶均衡模型*

何胜学
(上海理工大学 管理学院, 200093)

摘 要: 为了能实际求解可交易瓶颈许可证(TBP)均衡系统,利用网络对偶均衡理论建立了 TBP 的交通网络对偶均衡模型。以路段和节点的均衡条件代替路径均衡条件,并放松了节点流量的平衡条件和分时 OD 流量与总需求的平衡条件,从而得到了 TBP 的互补问题方程。利用互补问题与变分不等式基本等价定理,得到动态交通网络变分不等式模型。建构等价的非线性优化问题,说明新模型的有效性,并给出了基于时空网络的模型解的存在性判别方法。算例的求解验证了模型的可行性。

关键词: 交通工程; 可交易瓶颈许可证; 交通流分配; 变分不等式; 均衡
中图分类号: TP301.6 **文献标志码**: A **文章编号**: 1001-3695(2012)07-2438-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.07.010

Traffic network dual equilibrium model with tradable bottleneck permits

HE Sheng-xue
(*School of Business*, *University of Shanghai for Science & Technology*, *Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: The dual equilibrium traffic network model of TBP proposed by using network dual equilibrium theorem can solve the equilibrium systems of tradable bottleneck permits(TBP). Through using equilibrium conditions on links and nodes instead of on paths and relaxing the flow conservation conditions on nodes and equilibrium condition between total demand and time-specified OD flow, this paper constructed the complementarity problems (CP) of TBP systems. The corresponding VI model made use of the basic equivalence theory between CP and Variational Inequalities(VI). Then gave out an equivalent nolinear programming model to show the effectiveness of the new model and also gave out the method of judging the existence of solution based on temporal-spacial network. A numerical example was given to show the validity of the VI model.

Key words: traffic engineering; tradable bottleneck permits(TBP); traffic assignment; variational inequalities(VI); equilibrium

如何缓解交通拥挤是交通领域的核心问题之一。随着信息通信技术的发展,许多新的交通拥堵解决方法应运而生。2006 年 Akamatsu 等人[1]提出了定量式的可交易瓶颈许可证管理模式。与以前的众多方法相比,可交易瓶颈许可证系统实施方便,操作性强,具有兼顾社会公平和系统效益的特征。但是要将该理论付诸实施,仍有许多理论与实践问题亟待解决,如已知的基于一般交通网络的可交易瓶颈许可证均衡模型还没有有效的求解方法。目前国际上交通领域的相关研究很少,国内还没有相关的研究发表。本文将从网络对偶均衡理论角度出发,扩展已有模型的假设,并给出问题的有效解法。

Akamatsu 等人[1]提出了可交易瓶颈许可证(TBP)理念,并对 TBP 在单路段的简单网络上实施的有效性进行了分析。文中证明了实施 TBP 的系统在均衡态时等价于一个系统最优的动态容量限制流量分配模型。随后 2007 年 Akamatsu[2]对 TBP 理论在一般路网上加以扩展,给出了单 OD 对(origin and destination pair)条件下,TBP 系统应用于一般路网的均衡模型,并给出了对应的系统最优动态交通流分配非线性规划模型和模型有解的最小费用流算法。通过对比,Akamatsu 得出 TBP 在完全信息条件下等价于拥挤收费(congestion pricing,CP),而在不完全信息条件下 TBP 系统有显著优势。Kikuchi 等人[3]和 Wada 等人[4]利用多智能体理论对 TBP 系统的运行加以分析,说明该系统能较好地收敛于系统最优状态,但大量的假设参数妨碍了该方法的实用性。2009 年 Nagae 等人[5]提出了可退还的交易瓶颈许可证(refundable-tradable bottleneck permits,RT-BP)概念,并基于单路段的简单路网对 RTBP 的实施进行了理论分析,得出 RTBP 系统能更好地描述具有随机出行需求的交通网络系统,提高系统的整体经济效益。

尽管 Akamatsu[2]对多 OD 对的一般网络模型也作了简单说明,但对一般情况模型是否有解,以及如何求解系统的均衡状态均未给出说明。本文将利用网络对偶均衡理论(network dual equilibrium theorem,NDET)[6~8],对一般的 TBP 系统均衡模型约束加以放松,从而得到适应性更强、易于求解的 TBP 系统变分不等式模型(variational inequalities model,VIM)。同时利用超级网络添加虚拟路段和虚拟节点方法[9~11],给出模型有解的时空网络验证方法。

1 交通网络中的可交易瓶颈许可证系统

1.1 一般交通网络

考虑一般交通网络 $G(N,L)$ 的动态交通流分配问题。N

收稿日期: 2011-12-14; **修回日期**: 2012-01-17 **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(70672110);上海市教委科技创新项目(10YS105)

作者简介:何胜学(1976-),男,陕西三原人,副教授,博士,主要研究方向为超网络、交通网络建模、信息网络优化(lovellhe@126.com).

是网络节点集合,其中的一个节点用 i 表示;L 是路段集合,其中的一条路段用(i,j)表示,i 和 j 分别是路段的起点和终点。为了表述简单又不失一般性,设网络中只有一对 OD 对(o,d),o 和 d 分别是 OD 对的起点和终点。出行者将在给定的时间段 $I=[0,T]$之间完成出行。OD 对(o,d)间总的出行需求给定为 Q。假设任一路段(i,j)均由两部分组成,一部分是具有固定行程时间 t_{ij}的自由通行段;另一部分是具有最大通行能力 μ_{ij}的瓶颈点排队段。对任一路段而言,t_{ij}和 μ_{ij}已知且不随时间变化。这里对路段的假设具有通用性,如实际路段有多个瓶颈时,可将其分为多个路段;而当路段无瓶颈限制时,可假设对应的最大通行能力为无限大。

1.2　TBP 交易市场和管理信息平台

所谓的 TBP 指的是允许该许可证持有者在特定时间通过特定路段通行瓶颈的一种权利[1~5]。实施 TBP 系统的目的就是缓解并消除城市交通拥堵,实现社会效益最大化[2]。已有的 TBP 研究均假设网络中存在一个系统管理者和众多的路网使用者。管理者基于社会效益最大化对路网瓶颈的通行权加以管理,具体体现为向路网使用者投放适量的 TBP, 并保证 TBP 系统在路网上的顺利实施。而路网使用者则需要事先决策抵达目的地时间和出行路线,购得相应路段的瓶颈通行许可证。

出行者购得相应 TBP 后,具体出行途中可通过交通专用短程通信(dedicated short range communication,DSRC)系统获准在特定时间通过特定瓶颈。管理者可通过路网瓶颈利用情况调整 TBP 的投放量。出行者通过基于网络信息平台的 TBP 拍卖市场购买 TBP。已有研究均假设相应的 TBP 拍卖市场处于完全竞争状态,能有效地分派 TBP 资源,平衡市场供需。

但是现实中,要求出行者事先选择合理出行路线和到达目的地时间并不可行;同时,如果所选路线涉及大量的路段 TBP 购买时,期望出行者能通过相关 TBP 市场购得合理价格的瓶颈通行许可证也不现实。因此除了提供开放灵活的 TBP 交易平台,管理者还应当为出行者提供基本的出行路线相关信息、针对具体 TBP 设定一个市场参考价以及其他的相关服务。同时由于交通网络流的动态特征,管理者也应对网络的意外情况加以合理处置,从而减少出行者的不确定性损失。基于上述认识,在原有 TBP 系统中增加一个管理信息平台就很有必要。一个有效的管理信息平台必须具有关于路网的基本状态和出行者特征的必要知识,同时能处理相关变化信息,为出行者提供路线选择、路线通行时间以及 TBP 价格等信息。

只有在 TBP 交易市场和管理信息平台的共同作用下,TBP 系统才更好地付诸实施,相关的社会效益才能得以有效实现。建立 TBP 系统的管理信息平台表明有效求解已有 TBP 系统的均衡模型的紧迫性和重要性,这也正是本文研究的意义所在。

2　可交易许可证系统的对偶均衡模型

2.1　节点流量均衡条件

在网络中任意节点 i 处,在时刻 $t\in I$ 进入该点的流量应当大于从该点流出的流量。同时对应 OD 对,节点 i 存在一个从 OD 对起点到达该点的广义费用 $\pi_i(t)$。t 表示用户达到 i 点的时刻。根据 NDET 的建模规则[6~8],在节点处有如下流量均衡条件成立:

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{k\in NI(i)} z_{ki}(t)-\sum\limits_{k\in NO(i)} y_{ik}(t)-q(t)\delta_{id}\right)\times\pi_i(t)=0\\ \sum\limits_{k\in NI(i)} z_{ki}(t)\geqslant\sum\limits_{k\in NO(i)} y_{ik}(t)+q(t)\delta_{id},\pi_i(t)\geqslant 0\end{cases}$$
$$\forall i\in N,\forall t\in I \tag{1}$$

其中:Z_{ki}和 Y_{ik}分别表示在时刻 t 流入和流出节点 i 的流率;$NI(i)$表示以 i 为终点的路段的起点集合;$NO(i)$表示以 i 为起点的路段的终点集合。当 i 也是 OD 对终点时,G_{id}取 1;否则 O_{id}取 0 值。$q(t)$表示 t 时刻达到 OD 终点的流率。

2.2　路径选择均衡条件

对于 t 时刻进入路段(i,j)的用户,设定其利用路段(i,j)的广义行程费用 $c_{ij}(t)$为对应行程时间 t_{ij}的时间价值 αt_{ij}和购买该路段 TBP 的费用 $P_{ij}(t)$之和。α 表示时间与费用的转换系数。根据 NDET 的建模规则[6~8],在路段处有如下路径均衡条件成立:

$$\begin{cases}(\pi_i(t)+c_{ij}(t)-\pi_j(t+t_{ij}))\times y_{ij}(t)=0\\ c_{ij}(t)+\pi_i(t)\geqslant\pi_j(t+t_{ij}),y_{ij}(t)\geqslant 0\end{cases}$$
$$\forall(i,j)\in L,\forall t\in I \tag{2}$$

式(2)等价于在到达目的地时刻确定条件下,用户选择具有最小费用的路径出行的路径选择条件[2]。

假设对任意路段(i,j)而言,网络流量满足先进先出原则(first-in-first-out,FIFO),即

$$A_{ij}(t)=D_{ij}(t+t_{ij}(t)) \tag{3}$$

这里 $A_{ij}(t)$和 $D_{ij}(t)$分别表示 t 时刻累积进入和离开路段(i,j)的流量。相应的流率形式为

$$y_{ij}(t)=z_{ij}(t+t_{ij}(t))\cdot(1+dt_{ij}(t)/dt) \tag{4}$$

其中:$t_{ij}(t)$表示 t 时刻进入路段(i,j)的用户在路段(i,j)上的行程时间。在 TBP 系统下,$t_{ij}(t)$为定值,因此式(3)简化为

$$y_{ij}(t)=z_{ij}(t+t_{ij}(t)) \tag{5}$$

2.3　分时 OD 流率与 OD 总需求的均衡条件

根据 NDET 的建模规则[6~8],分时 OD 流率与 OD 总需求存在如下关系:

$$\begin{cases}\left(\int_0^T q(u)\,\mathrm{d}u-Q\right)\times\rho=0\\ \int_0^T q(u)\,\mathrm{d}u\geqslant Q,\rho\geqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

其中:ρ 表示 OD 对间最小的广义行程费用。

2.4　目的地到达时刻的选择条件

对于选择 t 时刻到达 OD 终点的用户而言,实际达到的时间 t 与期望到达的时间可能存在差异。由这种差异导致的费用称为计划费用(schedule cost)[2],用 $w(t)$来表示。用户在对目的地到达时间的选择时,需考虑相应的广义网络行程费用和计划费用。在相互博弈下,目的地到达时间的选择需满足

$$\begin{cases}(\pi_d(t)+w(t)-\rho)\times q(t)=0\\ \pi_d(t)+w(t)\geqslant\rho,q(t)\geqslant 0\end{cases}\quad\forall t\in I \tag{7}$$

2.5　TBP 价格的决定条件

路段(i,j)上 t 时刻的 TBP 价格由 TBP 的供需情况决定。而对路段(i,j)而言,t 时刻 TBP 的供给量是一个定值,等于对应瓶颈的最大通行能力 μ_{ij}。当对 TBP 的需求大于供给时,对应路段对应时刻的 TBP 价格为 0;而当需求大于供给时,通过网上拍卖市场会产生一个相应的 TBP 价格。具体的 TBP 价格均衡条件如下:

$$\begin{cases}(\mu_{ij}-y_{ij}(t))\times p_{ij}(t)=0\\ \mu_{ij}\geqslant y_{ij}(t),p_{ij}(t)\geqslant 0\end{cases}\quad \forall(i,j)\in L,\forall t\in I \tag{8}$$

2.6 TBP 的 VIM

将流量项 y、q 与费用项 π、ρ、p 看做系统状态变量 X,在互补均衡条件式(1)(2)及式(6)~(8)中与之互补的式子构成状态函数。根据互补问题与变分不等式的基本定理,可以得到对应上述互补均衡条件式的 VIM 为 $F(X^*)\times(X-X^*)\geqslant 0$, $\forall X\geqslant 0$。

这是一个以约束集为变量的非负空间的基本 VIM。对于这类问题存在许多有效的求解算法,其中文献[8]给出了分阶段阶梯式梯度投影算法,可以有效地求解上述 VIM。

3 等价动态系统最优分配模型

3.1 动态系统最优分配模型

考虑下面的优化模型($P-1$):

$$\min_{(q,y)\geqslant 0} F_p(q,y)\equiv\int_0^T q(t)w(t)\mathrm{d}t+\alpha\sum_{(i,j)\in L}\int_0^T y_{ij}(t)t_{id}\mathrm{d}t \tag{9}$$

约束:

$$\int_0^T q(u)\mathrm{d}u\geqslant Q \tag{10}$$

$$y_{ij}(t)\leqslant\mu_{ij}\quad\forall(i,j)\in L,\forall t\in I \tag{11}$$

$$\sum_{k\in M(i)}y_{ki}(t-t_{ki})\geqslant\sum_{k\in NO(i)}y_{ik}(t)+q(t)\delta_{id}\quad\forall i\in N,\forall t\in I \tag{12}$$

在文献[2]中,上面的约束式(10)和(12)是等式。考虑到目标函数是使得网络中用户总费用最小,因此在均衡态条件下,不等式(10)和(12)必取等号。因此这里的模型 $P-1$ 与文献[2]中相应模型等价。文献[2]证明了其给出的动态系统优化模型与 TBP 系统均衡模型等价。因此,只需证明模型 $P-1$ 与本文第 2 章的互补均衡条件等价,即说明对应 VIM 模型合理表征了 TBP 系统均衡状态。

设 ρ、$\{p(t)\}$ 和 $\{\pi(t)\}$ 是分别对应约束式(10)~(12)的拉格朗日乘子。得到问题 $P-1$ 的拉格朗日函数 L 为:

$$\begin{aligned}L(q,y,\rho,\pi,p)\equiv{}&F_p(q,y)+\rho\{Q-\int_0^T q(t)\mathrm{d}t\}+\\&\sum_{(i,j)\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\{y_{ij}(t)-\mu_{ij}\}\mathrm{d}t+\sum_{i\in N}\int_0^T\pi_i(t)\{\sum_{k\in NO(i)}y_{ik}(t)+\\&q(t)\delta_{id}-\sum_{k\in M(i)}y_{ki}(t-t_{ki})\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{13}$$

利用 L 的 Kuhn-Tucker 条件,问题 $P-1$ 的最优解的充分必要条件为

$$\begin{cases}\partial L/\partial q^*(t)=0 & \text{if } q^*(t)>0\\ \partial L/\partial q^*(t)\geqslant 0 & \text{if } q^*(t)=0\end{cases}\quad\forall t\in I \tag{14}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial y_{ij}^*(t)=0 & \text{if } y_{ij}^*(t)>0\\ \partial L/\partial y_{ij}^*(t)\geqslant 0 & \text{if } y_{ij}^*(t)=0\end{cases}\quad\forall(i,j)\in L,\forall t\in I \tag{15}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial\rho^*=0 & \text{if } \rho^*>0\\ \partial L/\partial\rho^*\geqslant 0 & \text{if } \rho^*=0\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial p_{ij}^*(t)=0 & \text{if } p_{ij}^*(t)>0\\ \partial L/\partial p_{ij}^*(t)\leqslant 0 & \text{if } p_{ij}^*(t)=0\end{cases}\quad\forall(i,j)\in L,\forall t\in I \tag{17}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial\pi_i^*(t)=0 & \text{if } \pi_i^*(t)>0\\ \partial L/\partial\pi_i^*(t)\leqslant 0 & \text{if } \pi_i^*(t)=0\end{cases}\quad\forall i\in N,\forall t\in I \tag{18}$$

对式(14)~(18)加以计算,易知其等价于第 2 章的互补均衡条件。至此证明了问题 $P-1$ 与 TBP 的 VIM 的等价性。当然求解 TBP 的 VIM 不仅可以得到网络的流量项,也可得到相关的费用项。文献[7]证明了利用对偶问题的部分解可以加速基本 VIM 的求解速度,因此,若能迅速求解问题 $P-1$,可加速 TBP 的 VIM 的求解算法收敛。

3.2 具有多对一形式 OD 对的模型解的存在性

文献[2]给出了单 OD 条件下相应优化模型的求解方法。下面将该方法推广到多起点单终点的情况。首先将时间段 I 分为 M 等份,每一等份时长为 Δt。其中的时间分界点表示为 $t=m\Delta t(m=0,1,2,\cdots,M)$。并假设任意路段$(i,j)$的行程时间 t_{ij} 均为 Δt 的倍数,即存在整数 n_{ij} 使 $t_{ij}=n_{ij}\Delta t$ 成立。设共有 R 个 OD 起点。下面建立原网络的时空网络,步骤如下:

a)生成原网络 $G(N,L)$ 中所有节点的 $M+1$ 个拷贝。对任意节点 i,用 $i(m)$ 表示它的第 m 个拷贝,代表时空网络中,节点 i 在时刻 $m\Delta t$ 的位置。

b)对任一 OD 起点 O_r 生成对应的一个虚拟起点 O_r^*,并生成一个总的虚拟 OD 起点 O^* 和一个虚拟的 OD 终点 d^*。

c)对所有的 m,如果存在路段(i,j),生成一个连接 $i(m)$ 和 $j(m+n_{ij})$ 的时空路段。新的时空路段具有与原路段相同的 t_{ij} 和 u_{ij}。

d)对所有 r,连接 O_r^* 与所有对应的 $o_r(m)$,生成行程时间为 0、无最大通行能力限制的新时空路段。连接 O^* 与所有的 O_r^*,生成行程时间为 0、最大通行能力限制等于 OD 需求 Q_{o_rd} 的新时空路段。连接所有的 d_m 与 d^*,生成行程时间为 $w(m\Delta t)$、无最大通行能力限制的新时空路段。

在上述生成的时空网络 $G(N^*,L^*)$ 中,以 O^* 为起点、d^* 为终点,求解相应的最小费用最大流问题,对应多起点单终点的优化问题 $P-1$。观察连接 O^* 与所有的 O_r^* 的时空路段是否达到了其最大通行能力,可以判断对应优化问题是否有解。

与上述方法相似,可以方便地处理单起点多终点的优化问题。但是对于多对多的情况,为了利用上述方法判断模型解的存在性,首先需要引入网络出行者的一个行为原则——优先出牌原则[12]。这一原则指具有不同起讫点的出行者,当其实际出行距离或时间越大时,会越早做出路线选择决策,且做出决定后,越不易改变原定方案。基于上述原则,可通过三个步骤判断模型解的存在性:a)不考虑瓶颈收费,对所有 OD 对按照最小行程时间的大小从大到小排序;b)按照上面建构时空网络的方法,建构多 OD 的时空网络;c)按照一定的比例,如 2:2:2:2:1:1,依 OD 的排序将相应的 OD 流量逐步依据当前最优路径加载上网,加载不断剔除已经达到路段通行能力的时空网络路段。如果按上述方法所有流量可以顺利加载上网,说明模型的解存在;否则,解不存在。

4 数值算例

图 1 是一个有 11 条路段的简单网络,其中包含两个 OD 对:OD 对(1,5)的需求量为 30;OD 对(2,6)的交通需求量为 20。考虑时段 $I=[0,14]$,离散化后 $\Delta t=1$。设对应 OD 对(1,5)和(2,6)的计划费用函数分别为 $w(t)=2|t-8|+3$ 和 $w(t)=2|t-9|+4$。各路段的固定行程时间 t_{ij} 和 Δt 时段内的最大通行量 μ_{ij} 如表 1 所示。设行程时间与费用的转换系数 $\alpha=1$。

表 1 路段的行程时间 t_{ij} 和最大通行量 μ_{ij}

路段标号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_{ij}	3	4	2	5	3	2	2	3	5	4	4
μ_{ij}	10	8	5	7	9	4	4	11	7	6	4

利用文献[8]提供的算法,经编程计算可得 $\rho_{(1,5)}=11$, $\rho_{(2,6)}=15$,非零的 TBP 价格项有 $p_1(2)=1.953$, $p_3(2)=2.051$, $p_3(3)=3.857$, $p_3(4)=5.872$, $p_{11}(5)=1.93$。这里 ρ 的下标是 OD 对,p 的下标是路段的标号。相关的非零路段流量如表 2 所示。

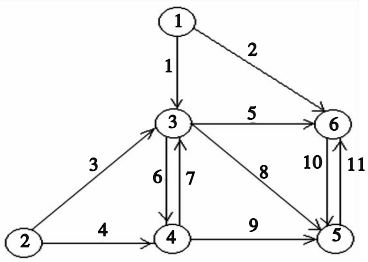

图1　有6个节点的简单网络

表 2　标明进入时刻的路段流量

路段标号(进入时刻)	流量	路段标号(进入时刻)	流量	路段标号(进入时刻)	流量
2(0)	5.012	3(4)	3.621	5(5)	4.995
1(1)	7.249	8(2)	3.908	8(6)	7.813
1(2)	9.854	8(3)	0.177	5(6)	4.283
1(3)	7.746	5(3)	0.412	7(5)	0.369
1(4)	9.266	6(3)	0.084	5(7)	0.472
3(0)	4.377	8(4)	8.083	11(5)	3.995
3(1)	0.657	5(4)	5.822	11(6)	0.357
3(2)	5.395	6(4)	0.016	10(4)	4.195
3(3)	5.008	8(5)	10.016		

对于 OD 对(2,6)而言,可以找出已经被选用的路径比较其广义的通行费用是否相等,从而判断计算结果的合理性。具体比较数据如表 3 所示。

表 3　OD 对(2,6)间部分已选用路径广义费用比较

路径路段序列	出发时刻	路径广义费用
3-5	1	15
3-5	2	$13+p_3(2)=15.051$
3-5	4	$9+p_3(4)=14.872$
3-5	3	$11+p_3(3)=14.857$
3-8-11	0	$13+p_{11}(5)=14.931$
3-6-7-5	1	15

从表 3 可以看出,OD 对(2,6)间已选用的路径的广义通行费用基本相等,这证明了结论的合理性。同理,对于 OD 对(1,5)间已选路径广义费用的分析可以得到同样的结论。

5　结束语

在原有的 TBP 系统中引入管理信息平台,可以有效提升 TBP 的实施效果,加强 TBP 市场管理。但是引入管理信息平台必然要求管理者对路网整体状态、用户特征以及相关信息技术有相当程度的把握。本文建立可以方便求解 TBP 系统对偶均衡模型,就是为 TBP 的实施工程中管理信息平台的创建提供理论技术支持。将 TBP 系统应用于实际,还有许多工作需要完成,如建立随机需求下一般网络中的 TBP 均衡模型和 TBP 系统与 CP 的融合问题。

参考文献:

[1] AKAMATSU T, SATO S, NGUYEN X L. Tradable time-of-day bottleneck permits for morning commuters[J]. JSCE Journal of Infrastructure Planning and Management,2006,62(4):605-620.

[2] AKAMATSU T. A system of tradable bottleneck permits for general networks[J]. JSCE Journal of Infrastructure Planning and Management,2007,63(3):287-301.

[3] KIKUCHI S, AKAMATSU T. Dynamics of decentralized Multi-agent systems for implementing tradable network permits[J]. Infrastructure Planning Review,2008,25(3):589-596.

[4] WADA K, AKAMATSU T, KIKUCHI S. Convergence of day-to-day traffic flow dynamics under tradable bottleneck permits[J]. Urban Transport,2008,14(3):579-588.

[5] NAGAE T, GAI N. Tradable bottleneck permits under demand uncertainty[C]//Proc of the 14th HKSTS International Conference on Transportation and Geography. 2009:771-778.

[6] HE Sheng-xue, FAN Bing-quan. Generalized wardrop principle and its application in regional transportation[J]. Trans on Research Record,2008,2085(1):49-56.

[7] 何胜学,董琼,徐福缘. 基于网络对偶均衡的交通流分配模型[J]. 公路交通科技,2010,27(9):105-110.

[8] 何胜学,董琼,徐福缘,等. 基于投影动态系统理论的网络交通演化模型[J]. 系统工程,2010,28(4):35-40.

[9] 何胜学. 基于超级网络的区域综合运输网络理论模型与算法[D]. 上海:上海理工大学,2007.

[10] 何胜学,范炳全. 城市交通网络非稳定随机均衡分析[J]. 中国公路学报,2008,21(3):101-105.

[11] 何胜学,董琼,徐福缘,等. 含目的地选择的城市交通网络非稳定均衡分析[J]. 系统工程,2010,28(1):8-13.

[12] 何胜学,何建佳,徐福缘. 基于网络对偶均衡的有边约束的交通流分配模型[J]. 交通运输系统工程与信息,2011,11(2):100-105.