

轮廓结构张量的仿射不变性*

曲颖^a, 杨丹^b, 张小洪^b

(重庆大学 a. 数学与统计学院 数学系; b. 软件工程学院, 重庆 401331)

摘要: 通过研究轮廓结构张量行列式的代数性质, 论证了轮廓结构张量代数结构的仿射不变性; 轮廓结构张量的行列式在仿射变换下所描述的极值点在数量和位置上不改变, 并且轮廓各点处的响应强度仅受尺度变换的影响, 与平移和旋转变换无关。最后, 在基于重复率准则的实验中将其与经典轮廓角点检测算法对比, 表明了算法具有较高的稳定性。

关键词: 轮廓结构张量; 角点; 角点检测; 仿射不变性; 几何稳定性; 仿射变换

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)06-2336-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.06.089

Affine invariability of contour structure tensor

QU Ying^a, YANG Dan^b, ZHANG Xiao-hong^b

(a. Dept. of Mathematics, School of Mathematics & Statistics, b. School of Software Engineering, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper proved the affine invariability of contour structure tensor by studying the algebraic properties of its determinant; the extreme points described by the determinant of the contour structure tensor under the affine transform remain no change. It only influenced the response of each point on the contour by scale transform and independent of translation and rotation transform. Finally, experiment results verify the high stability of the algorithm based on contour structure tensor by comparing its repeatability with some classical contour corner detection algorithms.

Key words: contour structure tensor; corner; corner detection; affine invariant; geometrical stability; affine transform

角点作为图像的重要特征信息, 已被广泛应用于光流计算、形状表示、相机标定、图像配准、目标跟踪和识别等领域。因此, 图像的角点检测对于计算机视觉任务是非常重要的工作。

真实条件下获取的图像受到噪声和背景的影响, 同时也发生尺度、平移、旋转和仿射等几何变化。因此, 角点检测算法的性能将直接影响后续计算机视觉工作的效率和精度。为了使角点检测能够达到较为理想的特征检测效果, 人们提出了众多角点检测算法^[1-8]。其中, 基于结构张量^[9-12]的角点检测算法是十分经典的一类。Harris 等人^[1]首次提出将描述图像局部梯度信息的结构张量应用于角点检测, 仅计算结构张量矩阵的特征值, 就能够判断局部图像是否存在角点或边缘。性能评估实验表明, 该算法具有较好的检测效果和一定的稳定性, 因此被广泛应用于各种场合。后人通过对其原理的分析和性能的研究, 又发展出许多重要的特征点检测算法, 如 Laplace-Harris、Affine-Harris、Scale-Harris 等, 极大地丰富了特征检测的理论和方法。

Zhang 等人^[3]受到 Harris-Stephens 角点检测器的启发, 又将结构张量应用在轮廓上, 构造了新的轮廓角点检测器。利用轮廓梯度向量的分布特征, 导出反映局部轮廓方向变化特征的轮廓结构张量; 将轮廓结构张量的行列式定义为角点响应函数, 并基于准确性和定位误差验证了算法具有良好的检测性能

和定位性能。然而, Zhang 等人却未针对算法的稳定性进行研究, 而稳定性又是角点检测算法性能评估中的重要方面。角点检测算法的稳定性是指, 算法在相同场景的多幅图像中检测出角点的位置不随场景的几何位置、光照条件或视角的不同而不同。算法具有良好的检测性能和定位性能并不能保证其具有同样良好的稳定性。

在 Zhang 等人^[3]研究的基础上, 本文尝试通过分析轮廓结构张量的代数性质来研究它的稳定性, 证明了轮廓结构张量的行列式具有仿射不变性, 即在仿射变换下, 轮廓结构张量的行列式所描述的极值点在数量和位置上没有发生变化, 在轮廓各点处的响应强度仅受尺度变换的影响, 与平移和旋转变换无关。

1 轮廓结构张量角点检测器

首先回顾一下轮廓结构张量角点检测器的相关内容^[3]。平面上任意一条轮廓曲线可以表示为

$$C(t) = (x(t), y(t))$$

其中: $x(t)$ 、 $y(t)$ 为坐标函数, t 为参数。从而, 这条轮廓曲线上的梯度向量可以写做

$$C'(t) = (x'(t), y'(t)) = (dx, dy)$$

定义轮廓结构张量为

收稿日期: 2011-10-26; **修回日期:** 2011-11-30 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(60975015); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTS2010BB2061); 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJXS11100029); 中央高校基本科研业务费科研重点专项资助项目(CDJZR11095501)

作者简介: 曲颖(1985-), 男, 河南唐河人, 硕士研究生, 主要研究方向为图像处理、模式识别与人工智能(yqu212@gmail.com); 杨丹(1962-), 男, 教授, 博导, 博士, 主要研究方向为图像处理、模式识别与人工智能; 张小洪(1973-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为图像处理、模式识别与人工智能。

$$M(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dy} \\ \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle d^2x \rangle & \langle dx dy \rangle \\ \langle dx dy \rangle & \langle d^2y \rangle \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中:

$$\langle * \rangle = \int_{t-W}^{t+W} * ds \quad (2)$$

表示在以 t 点为中心、半径为 W 的支撑区域上的积分。

在观察曲线上任意一点的支撑区域中的梯度向量分布之后可以发现,这些梯度向量的分布特征与曲线的局部几何结构直接相关:如果该处具有角点结构,支撑区域中的梯度向量将散布在某个梯度向量的周围;否则将集中在某个梯度向量上。根据这一假设,可以利用最小二乘法和拉格朗日乘数法构造式(1)中定义的轮廓结构张量。研究表明^[3],轮廓结构张量的特征值与特征向量直接反映了轮廓的局部几何结构。首先,轮廓结构张量具有两个非负特征值,较小的特征值直接反映了局部曲线方向的变化特征:它的值越小,说明该处曲线段的方向变化越小,具有角点的可能性越低。其次,轮廓结构张量的特征向量具有几何意义,分别是支撑域中心处轮廓的法向量和切向量。基于角点模型对轮廓结构张量行列式极值行为的分析显示,轮廓结构张量的行列式在角点处具有唯一的局部极值点。因此,可以采用轮廓结构张量 $M(t)$ 的行列式来描述平面曲线的局部几何结构特征,从而构造角点检测算子

$$\det(M(t)) = \langle d^2x \rangle \langle d^2y \rangle - \langle dx dy \rangle^2 \quad (3)$$

并将它的极大值点作为候选角点。基于准确性和定位误差的性能评估实验证明了该算法具有良好的检测和定位性能。

2 轮廓结构张量的代数性质

良好的检测和定位性能并不能保证算法的稳定性。作为评判算法性能优劣的重要方面,Zhang 等人并未就角点检测算法的稳定性给予讨论。本文将在其基础上研究轮廓结构张量在几何变换下的稳定性。

仿射变换是二维图像处理领域中遇到的最一般的几何变换。因此,通过研究轮廓结构张量在仿射变换下的稳定性得到的结论具有一般性。在研究轮廓结构张量在几何变换下的稳定性之前,先讨论一下它的代数性质,以此作为基础可以轻松获得轮廓结构张量行列式在仿射变换下稳定的结论。

用 $R[t-W, t+W]$ 表示定义在区间 $[t-W, t+W]$ 上的所有实变实值函数的集合,它构成了一个线性空间。显然,轮廓 $C(t)$ 的梯度分量 dx 和 dy 属于这个线性空间,并且容易验证式(2)是定义在这个线性空间上的内积。带有内积式(2)的线性空间 $R[t-W, t+W]$ 是一个无限维欧氏空间。因此,式(3)中定义的响应函数实际上是由欧氏空间 $R[t-W, t+W]$ 上的内积构成,其代数性质与欧氏空间上的内积相同。可以借助内积的性质来推导几何变换后的轮廓结构张量。

附带指出,在欧氏空间中柯西—许瓦兹不等式成立

$$\langle d^2x \rangle \langle d^2y \rangle \geq \langle dx dy \rangle^2 \quad (4)$$

对比式(3)和(4)可以发现,式(3)中定义的响应函数正是柯西—许瓦兹不等式两端的差,它必然具有非负响应。这又从线性空间的角度证明了轮廓结构张量的行列式作为角点响应函数的可行性。

3 轮廓结构张量在几何变换下的稳定性

下面利用上述性质,研究基于轮廓结构张量的角点检测算

子在几何变换下的稳定性。本文选取二维图像处理中最一般的仿射变换作为研究对象。

仿射变换可以表示为

$$T(x', y') = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

其中: $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ 称为线性变换矩阵,其行列式非零; $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 表示

平移量。原曲线 $C(t)$ 经过仿射变换记为

$$\tilde{C}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

其中:

$$\tilde{x}(t) = m_{11}x + m_{12}y + a$$

$$\tilde{y}(t) = m_{21}x + m_{22}y + b$$

下面计算曲线 $\tilde{C}(t)$ 的轮廓结构张量。首先由微分的基本性质可知,仿射变换前后的梯度向量线性相关,即

$$d\tilde{x} = m_{11}dx + m_{12}dy$$

$$d\tilde{y} = m_{21}dx + m_{22}dy$$

由此,借助内积的线性性质

$$\langle d^2\tilde{x} \rangle = m_{11}^2 \langle d^2x \rangle + 2m_{11}m_{12} \langle dx dy \rangle + m_{12}^2 \langle d^2y \rangle$$

$$\langle d^2\tilde{y} \rangle = m_{21}^2 \langle d^2x \rangle + 2m_{21}m_{22} \langle dx dy \rangle + m_{22}^2 \langle d^2y \rangle$$

$$\langle d\tilde{x}d\tilde{y} \rangle = m_{11}m_{21} \langle d^2x \rangle + (m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21}) \langle dx dy \rangle + m_{12}m_{22} \langle d^2y \rangle$$

经过计算,得到仿射变换后的响应函数

$$\det(\tilde{M}(t)) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}^2 \det(M(t))$$

上式说明曲线经过仿射变换后,其轮廓结构张量角点检测器的响应仅在强度上有变化,而它描述的极大值点没有发生变化。其检测出的角点数量和位置不会因为仿射变换而增减或偏移。因此,轮廓结构张量具有仿射不变性,即轮廓结构张量在仿射变换下是稳定的。

下面限定仿射变换的参数,观察常见平面几何变换对响应强度的影响。旋转—尺度—平移(rotation-scale-translation, RST)变换是较为典型的平面几何变换,可以表示为

$$T(x', y') = r \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

于是只需将仿射变换中的线性变换矩阵替换为 $r \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$,这样仿射变换就变成了 RST 变换。简单计算得到此时轮廓的响应为

$$\det(\tilde{M}(t)) = r^4 \det(M(t))$$

由此可见,只有尺度变换影响角点的响应强度,平移变换、旋转变换对响应强度并没有影响。然而,尽管尺度变换影响响应强度,它并不改变极大值点的数量和位置。这就解释了为什么结构张量的行列式具有良好的旋转和尺度不变性^[3]。

在实际应用中,面对的轮廓是离散的。相应地,轮廓的结构张量也将是离散的。离散的轮廓结构张量^[3]定义为

$$M(k) = \sum_{i=-W}^W \begin{bmatrix} \Delta x_{ki} \Delta x_{ki} & \Delta x_{ki} \Delta y_{ki} \\ \Delta x_{ki} \Delta y_{ki} & \Delta y_{ki} \Delta y_{ki} \end{bmatrix}$$

其中: $k=1, \dots, n$ 表示第 k 个轮廓点, n 是轮廓上点的总数目; W 是支撑区域的半径; $(\Delta x_{ki}, \Delta y_{ki})$ 是第 k 个轮廓点的支撑区域中第 i 个点处的差分向量。显然,由该矩阵的行列式导出的角点响应函数仍然可以看做欧氏空间 R^n 中的内积。同理有:在离散情形下,轮廓结构张量也具有仿射不变性。

4 重复率实验

前文在理论上证明了轮廓结构张量具有仿射不变性。下面将在实验中验证这一点。

为了评估角点检测算法的稳定性, Schmid 等人^[13]提出了重复率的评价标准: $R_i = \frac{m_i}{\min(n_1, n_2)}$ 。其中: R_i 为重复率; m_i 为原始图像与变换图像中重复的角点个数; n_1 为原始图像的角点个数; n_2 表示变换图像的角点个数。 R_i 越大说明该算法的稳定性越好。

本实验采用的原始图像包括 flower、leaf、gear、key、fish、shark、plane 等。在 CPU 3.0 GHz、Windows XP 和 MATLAB 7.6 的实验环境下, 本文将基于轮廓结构张量的角点检测算法 (GCM)^[3] 与 CSS、eigenvalues of covariance matrices、wavelet transform 和 eigenvectors of covariance matrices 等几种典型的边缘角点检测算法进行比较。实验过程如下:

实验1 旋转变换。检测并记录原始图像的角点位置和数量, 再对将原始图像作旋转变换, 旋转角度为 $[-80^\circ, +80^\circ]$, 检测并记录所有变换图像的角点位置和数量。

实验2 一致尺度变换。将实验1中的旋转变换替换为 x 和 y 方向变化一致的尺度变换, 尺度变换因子在 $0.5 \sim 2$ 之间。

实验3 非一致尺度变换。该实验中, 将实验2中的一致尺度变换替换为非一致尺度变换, x 和 y 方向的尺度变换因子均在 $0.5 \sim 2$ 之间。

实验4 仿射变换。在实验1的基础上添加 x 或 y 方向的尺度变换。其中, 旋转角度为 $[-50^\circ, +80^\circ]$, x 和 y 方向的尺度变换因子均在 $0.5 \sim 1.8$ 之间。

实验结果如图1~6所示, 除 y 尺度方向变换外, 基于轮廓结构张量的角点检测算法在旋转变换、一致尺度变换、 x 尺度方向变换和仿射变换下重复率均最高。这一结果与前文论证的轮廓结构张量具有仿射不变性的结论是一致的。

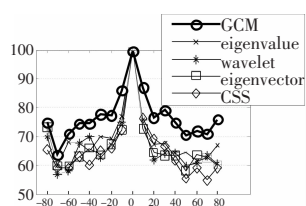


图1 旋转变换的重复率

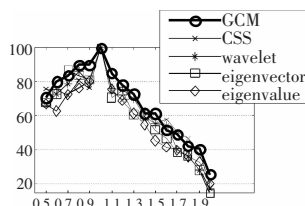


图2 一致尺度变换的重复率

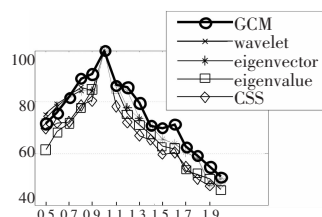


图3 x 尺度方向变换的重复率

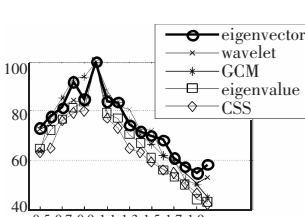


图4 y 尺度方向变换的重复率

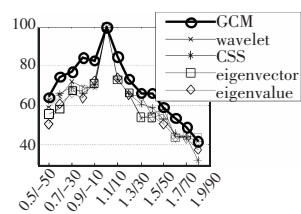


图5 x 尺度方向和旋转($^\circ$)一起变换的重复率

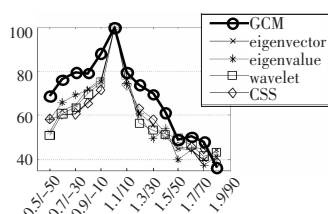


图6 y 尺度方向和旋转($^\circ$)一起变换的重复率

5 结束语

本文通过分析图像的轮廓结构张量的代数性质, 得出基于轮廓结构张量的角点检测算子具有仿射不变性, 即几何稳定性的结论。算子描述的极值点位置不受几何变换的影响, 仅在响应强度上有变化。同时还发现平移、旋转对响应强度没有影响, 只有尺度变换对响应强度有影响。最后, 基于重复率准则的对比实验表明, 与经典轮廓角点检测算法相比, 基于轮廓结构张量的角点检测算法具有最高的重复率。这说明基于轮廓结构张量的角点检测算法具有较高的稳定性。

参考文献:

- [1] HARRIS C, STEPHENS M. A combined corner and edge detector [C]//Proc of the 4th Alvey Vision Conference. 1988:147-152.
- [2] ZHANG Xiao-hong, WANG Hong-xing, HONG Ming-jian, et al. Robust image corner detection based on scale evolution difference of planar curves[J]. Pattern Recognition Letters, 2009, 30(4): 449-455.
- [3] ZHANG Xiao-hong, WANG Hong-xing, SMITH A, et al. Corner detection based on gradient correlation matrices of planar curves[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4): 1207-1223.
- [4] ZHONG Bao-jiang, LI Chang. Robust image corner detection using curvature product in direct curvature scale space[J]. Applied Mechanics and Materials, 2010, 20-23: 725-730.
- [5] ROSTEN E, PORTER R, DRUMMOND T. Faster and better: a machine learning approach to corner detection [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(1): 105-119.
- [6] NGUYEN T P, DEBLED-RENNESON I. A discrete geometry approach for dominant point detection[J]. Pattern Recognition, 2011, 44(1): 32-44.
- [7] ZHANG Lin, ZHANG Lei, ZHANG D. A multi-scale bilateral structure tensor based corner detector [C]//Proc of the 9th Asian Conference on Computer Vision-Volume part II. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 618-627.
- [8] 闫卫杰, 杨丹, 王洪星, 等. 轮廓结构张量B-样条多尺度表示的角点检测[J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(4): 80-83.
- [9] KENNEY C S, MANJUNATH B S, ZULIANI M, et al. A condition number for point matching with application to registration and post-registration error estimation [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(11): 1437-1454.
- [10] ESFANDARANI H T, KARIMI N, SAMAVI S, et al. Multi-layered image compression using structure tensor for texture identification [C]//Proc of IEEE International Conference on Multimedia and Expo. 2010: 1120-1123.
- [11] 郑钰辉, 潘瑜, 王平安, 等. 基于迹的非线性结构张量[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2008, 20(2): 259-266.
- [12] 片兆宇, 高立群, 郭丽. 基于结构张量与随机游走的图像分割算法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2009, 30(8): 1095-1098.
- [13] SCHMID C, MOHR R, BAUCKHAGE C. Evaluation of interest point detectors[J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 37(2): 151-172.