

一种新颖的混合响应面优化方法

林玉锋¹, 陈璟¹, 陈少飞¹, 贾志勇²

(1. 国防科学技术大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073; 2. 中国人民解放军 95859 部队, 甘肃 武威 735018)

摘要: 为减少黑箱优化过程中的评估次数, 提出了一种新颖的混合响应面优化方法(HRSO), 利用混合响应面建立高精度的近似模型作为代理模型, 通过迭代更新响应面不断接近真实模型, 从而完成优化。以 Dixon-Szego 函数类作为测试函数, 以评估次数为方法性能优劣的评价指标, 实验结果表明, 与 Gutmann-RBF、CORS-RBF 两种方法相比, HRSO 能够在较少的评估次数内满足相同的收敛条件, 且向全局快速收敛, 是一种适合求解黑箱优化问题的方法。

关键词: 黑箱函数; 混合响应面; 全局优化; 对称拉丁超立方设计

中图分类号: TP311 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)06-2180-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.06.047

Novel hybrid response surface optimization method

LIN Yu-feng¹, CHEN Jing¹, CHEN Shao-fei¹, JIA Zhi-yong²

(1. College of Mechatronic Engineering & Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. PLA 95859, Wuwei Gansu 735018, China)

Abstract: This paper presented a novel method, called hybrid response surface optimization (HRSO) to reduce the number of evaluations in the process of optimization of black-box functions. The proposed method used hybrid response surface to build high accuracy black-box approximate models as surrogate-models. Then it updated the approximate model by circles of iteration. This paper applied the method on the Dixon-Szego test functions and estimated the performance by the number of function evaluations, when a run satisfied the convergence criteria. The results indicate that HRSO meets the same convergence by less evaluation comparing to Gutmann-RBF and CORS-RBF. And it can converge to global optimum quickly. It is a suitable method for solving expensive black-box problem.

Key words: black-box function; hybrid response surface; global optimization; symmetric Latin hypercube design

黑箱问题一般没有确切的或可表达的解析函数形式, 当需要得到一个输入的响应时, 只能通过实际系统进行, 而这个评估过程的代价往往是昂贵和耗时的。在优化黑箱问题时, 一般需要建立实际系统的代理模型参与优化过程, 目的是为了减小评估代价。响应面方法可以根据样本简捷快速建立模型的特点, 使得响应面优化方法在全局优化领域得到较大的发展, 本文将这种优化方法称为响应面优化方法。很多学者对其展开研究并提出了许多优化的方法, 其中具有代表性的是 Gutmann 和 Regis。

Gutmann^[1,2] 提出了一个适合径向基函数近似模型的度量 bumpy 的方法, 并以此定义了一个目标函数最小化的等价函数, 在不断逼近猜测目标值的过程中达到全局优化的目的, 这种方法称为 Gutmann-RBF。Regis 等人^[3] 提出了 CORS-RBF 方法, 在该方法中定义了搜索模式和极大极小距离两个概念, 它们引导求解子优化问题的优化算法向全局搜索, 且在数学理论上证明了方法的收敛性: 在满足一定的条件下任意响应面模型和任意样本初始化都将收敛至全局最小值。相比之下, 国内在响应面优化方法方面的研究较少, 已经发表的研究工作主要集

中在响应面方法在食物、化学、工业等应用层面^[5]。

本文从研究响应面优化方法着手, 将径向基函数和多项式混合作为响应面近似函数, 采用对称拉丁超立方设计 (symmetric Latin hypercube design, SyLHD) 方法生成训练样本, 以此建立混合响应面, 结合周期动态约束 (circle dynamic constraint, CDC) 策略和重启模式, 提出了一种新颖的混合响应面优化方法。

1 问题模型

1.1 黑箱优化问题

优化问题就是确定一组决策变量在满足约束条件下寻求极小化近似模型的最优, 具有决策变量、约束条件和目标函数三个基本元素。黑箱优化问题是其中较为特殊的一类。假设决策变量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 约束条件写成集约束为

$$S = \{x | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m; h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, l\}$$

那么黑箱优化问题可表述成如下形式:

$$\begin{cases} \text{minimize } f(x) \\ \text{s. t. } x \in S \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2011-10-30; 修回日期: 2011-11-28

作者简介: 林玉锋 (1987-), 男, 福建莆田人, 硕士研究生, 主要研究方向为任务规划 (nudt_lyfeng@163.com); 陈璟 (1972-), 男, 副教授, 硕导, 主要研究方向为智能系统、任务规划; 陈少飞 (1987-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为任务规划; 贾志勇 (1986-), 男, 助理工程师, 主要研究方向为图像处理。

其中:隐式 $f(x)$ 为目标函数; $S \subset \mathbb{R}^n$ 为约束集或可行域。

1.2 响应面方法

响应面方法(response surface methodology, RSM)是一种以获取一组独立变量与系统响应之间某种近似关系的近似技术^[6]。下面简单介绍多项式和径向基函数。

1.2.1 多项式

文献里的响应面通常是指基于多项式回归的响应面模型,本文称为多项式响应面。通常多项式的阶数不超过四阶,其中最常用的是二阶响应面,也称二次响应面。 n 个变量 x_i 与二阶响应 y 的函数模型可表述为

$$y = f(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

其中共有 $k = (n^2 + 3n + 2)/2$ 个待定系数 $\alpha_0, \alpha_i, \alpha_{ii}, \alpha_{ij}$ 。

多项式响应面简单易用,确定待定系数的计算量小,但是当处理存在多个局部最优且非线性程度较高的问题时,模型的拟合精度较差。

1.2.2 径向基函数

径向基函数是一类以待测点与样本点之间的欧氏距离为自变量的函数,以径向函数为基函数,通过线性叠加构造出来的模型即为径向基函数模型。特别地,它具有任意精度的泛函逼近能力,同时具有较快的收敛速度。

径向基函数模型的基本形式为

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad (3)$$

其中: $\|x - x_i\|$ 表示 x 与中心 x_i 之间的欧氏距离; w_i 表示权重系数。径向基函数 $\varphi(\cdot)$ 一般有:线性 $\varphi(r, \gamma) = r\gamma$ 、立方 $\varphi(r, \gamma) = (r + \gamma)^3$ 、薄板样条函数 $\varphi(r, \gamma) = r^2 \log \gamma r$ 、多二次函数 $\varphi(r, \gamma) = \sqrt{r^2 + \gamma^2}$ 、高斯函数 $\varphi(r, \gamma) = \exp(-\gamma r^2)$,其中 $\gamma \geq 0$ 。 γ 值不同时 $\varphi(r)$ 随 r 变化的情况如图1所示。

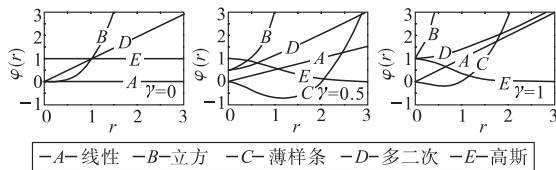


图1 不同 γ 值时的 $\varphi(r)$ 随 r 变化图

1.3 基于响应面模型的黑箱优化框架

Alexandrov等人^[7]和Jones^[8]经过深入的研究将基于代理模型的优化技术的基本框架描述为一个初始化和一个循环组成的系统。初始化采用实验设计方法生成初始样本,循环迭代过程如下:建立代理模型→求解子优化问题得到最优解→更新代理模型等,直到满足收敛条件。

结合基于代理模型的优化基本框架和本文研究的响应面近似模型,建立了一个基于响应面模型的优化框架,如图2所示。令优化问题的决策变量为 $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in \mathbb{R}^n$,其步骤描述如下:

a) 采用实验设计(design of experiment, DOE)方法生成 m 组训练样本 $x_i (i = 1, \dots, m)$,调用真实模型评估得到响应 y_i ,得到初始训练样本 $\{x_i, y_i\}$ 。

b) 根据 $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m\}$ 建立目标函数的响应面近似模型 $f_1(x)$ 。

c) 循环迭代直至满足收敛条件后结束。

(a) 将响应面近似模型的响应值最小化作为目标,结合约

束条件建立一个新的优化问题,称为辅助问题,其形式如下:

$$\begin{cases} \text{minimize } f_k(x) \\ \text{s. t. } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4)$$

其中: $f_k(x)$ 表示第 k 次迭代时的近似模型;

(b) 利用遗传算法或粒子群算法等优化算法求解辅助问题,得到的最优解其实是一个满足约束条件下响应最小的样本点,称为候选点 x_k^* ,调用真实模型评估得到 $y_k^* = f(x_k^*)$;

(c) 判断是否满足收敛条件,收敛条件一般有设定评估次数上限或某一指标满足设定阈值;

(d) 根据响应面更新方法以候选点对响应面近似模型等执行更新,将候选点添加到上次迭代的训练样本中,那么第 $k+1$ 次优化的近似模型 $f_{k+1}(x)$ 就由样本集

$$\{x, y\} = \{x_j \mid x_j \in x_k^*, y_j \mid y_j \in y_k^* \mid j = 1, \dots, m + k - 1\} \quad (5)$$

进行更新, m 表示初始样本点的数目。

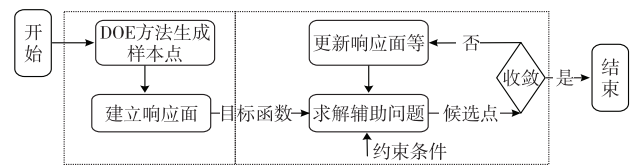


图2 基于响应面模型的优化框架示意图

2 混合响应面优化方法

2.1 混合响应面模型

将不同类型的逼近函数相结合是提升响应面模型的逼近能力的有效途径。因此,选择径向基函数和多项式混合作为响应面的近似函数,建立混合响应面(hybrid response surface, HRS)。变量 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 与输出响应 $y(x)$ 的混合响应面模型的函数形式为

$$y(x) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi(\|x - x_i\|) + \sum_{i=1}^k P_i(x) b_i \quad (6)$$

其中: w_i, b_i 是待定系数; $P_i(x)$ 是单项式,在一阶情况下, $P([x_1, x_2]) = \{1, x_1, x_2\}$ 。

已知 m 个样本点 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$,调用真实模型评估得到 m 个方程 $y_i = y(x_i)$,而该模型共包含 $m + k$ 个待定系数,为求解待定系数,还需要向等式添加 k 个约束等式:

$$\sum_{j=1}^k P_j(x) w_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

结合式(6)和(7),将 $m + k$ 个等式写成如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} [\Phi]_{m \times m} & [B]_{m \times k} \\ [B]_{k \times m}^T & [0]_{k \times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{W\}_{m \times 1} \\ \{b\}_{k \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F\}_{m \times 1} \\ \{0\}_{k \times 1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中: $W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$; $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$; $F = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$; $\Phi_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|)$, $B_{ij} = P_j(x_i)$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k$ 。

当 $\text{rank}(B) = k$ 时,矩阵 H 非奇异,式(8)有唯一解,即 $\lambda = H^{-1}Y$ 。若 $\text{rank}(B) < k$,此时式(8)具有多种可行解,采用伪逆法求得其中一种可行解,即 $\lambda = [H^T H]^{-1} H^T Y$ 。

2.2 SyLHD方法

在拉丁超立方设计方法^[9]中,训练样本由拉丁超立方设计矩阵 $[R]_{m \times n}$, m 表示样本数目, n 表示变量个数,矩阵 R 的每列都是 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的随机序列。令 r_{ij} 是矩阵中的第 i 行第 j 列元素,那么 r_{ij} 投影到决策空间 $[a, b]^n$ 代表了第 i 个样本的第

j 个坐标 x_{ij} , 其坐标值便是对区间 $[a_i, b_i]$ 进行 m 等分后对应第 r_{ij} 个, 即

$$x_{ij} = r_{ij} \times \frac{b_i - a_i}{m} \quad (9)$$

在 SyLHD 方法中, 其设计矩阵 $[R^s]_{m \times n}$ 具有如下性质: 如果 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是矩阵 R^s 中的某一行的各元素取值, 那么矩阵 R^s 中一定存在另一行其各元素取值为 $(m+1-a_1, m+1-a_2, \dots, m+1-a_n)$ 。即如果 x_i 是全部设计样本中的一个, 那么必定存在另一个样本 x_j 是 x_i 关于决策空间中心的倒影。

2.3 周期动态约束

在迭代优化过程中, 为防止响应面模型的训练样本过于密集而降低响应面模型的全局近似能力以及响应面优化方法的寻优能力, 向原优化问题添加一类距离约束, 式 (1) 的优化问题则变为

$$\begin{cases} \text{minimize } f(x) \\ \text{s. t. } \begin{cases} a \leq x_i \leq b & i=1, \dots, n \\ \|x - x_j\| \geq \beta_k \Delta_k & j=1, \dots, m+k-1 \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

其中: 周期缩放系数 $\beta_k \in [0, 1]$, 本文 β_k 的周期为 $T_\beta = 6$, 且 $\{\beta\} = \{0.9, 0.75, 0.25, 0.05, 0.03, 0\}$; 极大极小距离 Δ_k 的定义如下:

$$\Delta_k = \max_{x \in D} \min_{1 \leq i \leq m+k-1} \|\tilde{x} - x_i\| \quad (11)$$

其中: D 表示决策空间。 Δ_k 的计算可采用覆盖点近似计算, 这里不作叙述^[3]。

2.4 重启动模式

在响应面优化过程中, 当迭代次数 k 达到一定值时, 相邻两次迭代的历史最优值之差 $|y_k^* - y_{k-1}^*|$ 可能较小, 导致优化过程收敛较慢。为解决该问题, 本文在响应面优化过程引入最优值改进量度量机制, 当迭代优化间的改进量持续低于指定阈值且达到一定次数时, 则舍弃已经获得的训练样本, 采用 SyLHD 方法生成一组新的训练样本, 并基于新样本重新启动优化过程。在该模式下, 相邻两次迭代间的改进量 Δ_k^f 定义为其最优值之差 $|y_k^* - y_{k-1}^*|$, 迭代优化过程的改进量阈值 Δ^{fmin} 如下:

$$\Delta^{\text{fmin}} = (f_{\min} - f_{1/4}) \times I_{\min} \quad (12)$$

其中: $f_{\min}$ 为历代最优解集 $\{y_k^*\}$ 的最小值, 即 $f_{\min} = \min \{y_k^*\}$; $I_{\min} \in (0, 0.1]$; $f_{1/4}$ 为 $\{y_k^*\}$ 从大到小排序后处于前 1/4 位置的对应值, 如 $y_1^* < y_4^* < y_3^* < y_2^* < y_5^*$, 则 $f_{1/4} = y_4^*$ 。

若连续 δ 次迭代优化均有 $\Delta_k^f < \Delta^{\text{fmin}}$ ($k = k_1, k_1 + 1, \dots, k_1 + \delta - 1$), 则认为优化过程收敛至局部极值, 可执行优化过程的重启动。其中 δ 值为经验数据, 一般可根据问题的实际情况确定。

2.5 方法的优化过程分析

综合以上, 本文提出一种混合响应面优化方法, 其流程如图 3 所示。在该方法中, 首先进行响应面模型的初始化及相关参数设置, 采用 SyLHD 方法生成 m 组训练样本 $\{x_i, i=1, \dots, m\}$, 并调用真实模型评估相应的输出 $\{y_i\}$, 同时令迭代次数 $k=1$; 其次, 根据训练样本 $\{x_i, y_i\}$ 建立 HRS 模型; 然后, 采用 SyLHD 方法生成决策空间的覆盖点集 $\{x^{\text{cp}}\}$, 计算极大极小距离 Δ_k , 基于该模型对式 (10) 的辅助问题进行优化求解, 并记录当前最优解 $\{x_k^*, y_k^*\}$ 。当 $\beta_k = 0$ 时, 若 $x_k^* \in \{x_{k-1}^*\}$, 则令 β_k 为 0.01 重新进行本次迭代优化, 如图 3 中的虚箭头所示。根据历次迭代的 $\{x_k^*, y_k^*\}$ 计算改进量 Δ_k^f , 并采用式 (12) 计算历次

迭代改进量阈值 Δ^{fmin} 。若连续 δ 次迭代优化均有 $\Delta_k^f < \Delta^{\text{fmin}}$, 则执行优化过程的重启动; 否则, 根据相对误差 $\zeta < 1\%$ 判断优化过程是否收敛, 若满足收敛条件, 则输出当前记录的最优解作为优化结果, 否则根据式 (5) 利用 (x_k^*, y_k^*) 更新 HRS 模型, $k = k + 1$, 执行新一轮的迭代优化。

ζ 的计算方法如下:

$$\zeta = |f^* - f_{\text{best}}| / |f^*| \quad (13)$$

其中: f_{best} 为候选点的响应; f^* 为实际最优值, 且 $f^* \neq 0$ 。

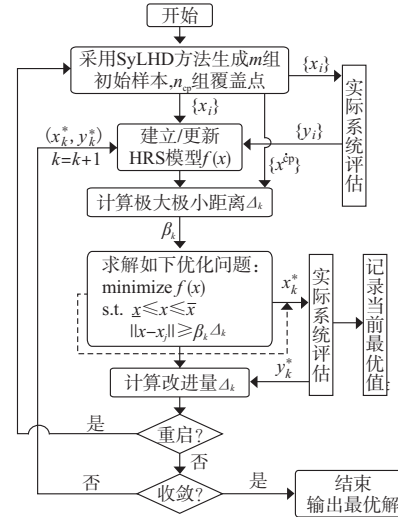


图3 HRSO流程

3 实验与分析

为了检验 HRSO 的性能, 采用全局优化的标准测试函数 Dixon-Szego 函数^[10] 进行验证, 并与 Gutmann-RBF^[1]、CORS-RBF^[3] 进行比较。响应面优化方法主要是通过减少函数评估的次数来减小评估代价从而达到提高优化效率的目的, 因此评价方法的重要标准是执行迭代优化过程中对函数的评估总次数, 即在相同条件下方法求解优化问题需要的评估次数。

表 1 给出了 Dixon-Szego 测试函数的维数、定义域、最优值等基本情况, 函数的表达形式参见文献^[10]。

表 1 Dixon-Szego 函数类

函数	维数	定义域	局部/全局极值数目	最小值
RC	2	$[-5, 10] \times [0, 15]$	3/3	0.398
GP	2	$[-2, 2]^2$	4/1	3
H _{3,4}	3	$[0, 1]^3$	4/1	-3.86
S _{4,5}	4	$[0, 10]^4$	5/1	-10.153 2
S _{4,7}	4	$[0, 10]^4$	7/1	-10.402 9
S _{4,10}	4	$[0, 10]^4$	10/1	-10.536 4
H _{6,4}	6	$[0, 1]^6$	4/1	-3.32

对于每个 Dixon-Szego 函数构成的优化问题, HRSO 独立运行 $N_t = 30$ 次, 记录每次实验收敛退出时的函数评估总次数并求其平均值 mean 及其标准误差 SE, 比较结果如表 2 所示。其中, 上标“-RM”表示方法未加入重启动模式, 括号内数字表示未收敛的次数。Mean 和 SE 的计算方法如下:

$$\text{mean} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} k_i \quad (14)$$

$$\text{SE} = \text{std} / \sqrt{N_t} \quad (15)$$

$$\text{std} = \sqrt{\frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (k_i - \text{mean})^2} \quad (16)$$

其中: k_i 表示第 i 次实验的评估次数; std 表示评估次数序列的

标准差。

表2 三种优化方法求解测试函数的实验结果比较

函数	Gutmann-RBF	CORS-RBF	HRSO-RM	HRSO	
				mean	SE
RC	40.53	43.90	46.83	47.9	2.61
GP	58.6	56.97	59.40	50.63	2.71
H _{3,4}	61.4	54.03	48.43	48.73	4.74
S _{4,5}	450.93(26)	370.13(20)	133.75(14)	79.17	5.14
S _{4,7}	424.23(23)	243.83(10)	111.29(13)	86.77	4.02
S _{4,10}	444.43(23)	206.47(9)	104.21(16)	76.97	4.38
H _{6,4}	212.70(9)	223.70(9)	119.21(1)	100.8	6.14

从表2可以看出:

a)对于RC函数,HRSO^{RM}与HRSO两种优化方法需要的平均函数评估次数基本相当,但不及Gutmann-RBF和CORS-RBF。

b)对于GP函数,HRSO^{RM}、Gutmann-RBF、CORS-RBF三者之间差距不大,而HRSO略优于其他三种方法。

c)对于Hartman家族H_{3,4}、H_{6,4}函数,优化H_{3,4}函数时HRSO^{RM}和HRSO均比另外两种方法需要较少的函数评估次数;而优化H_{6,4}函数HRSO^{RM}和HRSO与另外两种方法相比,需要的评估次数有了显著的减少。

d)对于Shekel家族S_{4,5}、S_{4,7}、S_{4,10}这三个函数,HRSO^{RM}相比Gutmann-RBF、CORS-RBF找到相对误差小于1%的近似全局最小值的概率有所提高,但都不超过56.7%;在成功的实验中,HRSO^{RM}却比这两种方法收敛得更快。

e)对于Shekel家族S_{4,5}、S_{4,7}、S_{4,10}这三个函数,HRSO相对另外三种方法来说,不论是实验成功概率还是收敛速度方面都有了质的飞跃,能保证实验搜索到最优解且收敛的性能更优越。

对于a)的结果,与测试函数本身的特点有关,RC函数具有三个全局最优解,而CDC策略可能导致搜索在三个点附近之间出现若干次跳跃,所以HRSO的优化效率稍差一些;对于b)来说,GP函数在最优解周围是一片平坦区域,而文献[11]采用的求解算法是基于梯度的,相比之下,HRSO则会较快地收敛;对于c)的Hartman家族函数,HRSO以混合响应面近似模型作为代理模型,它比另外两种方法使用的径向基响应面具有更高的精度,在相同条件下,将大大缩短整个优化过程,即所需要的评估次数减少许多,尤其当问题变得更复杂时,这种表现更明显;d)e)的原因在于,Shekel家族函数具有多个局部极值,一般方法容易陷入局部搜索而导致优化失败,加入重启启动模式的HRSO却能很好地克服这个问题,不仅能保证实验找到最优解,这一点从表中SE数据可知这是一种稳定的优化方法,而且能够以更快的速度收敛。根据以上分析可得:

a)HRSO比CORS-RBF、Gutmann-RBF这两种优化方法具有更快的收敛速度,即减少了优化过程中需要的函数评估次数,而且性能更稳定。其中,混合响应面模型提高了近似模型的精度,对推进优化过程起到了重要的作用;重启启动模式很好地解决了优化方法求解多局部极值问题时容易陷入局部搜索的缺点,保证了方法的稳定性。

b)对于非线性不一、复杂程度不同的测试函数,HRSO都能随着迭代的进行逐渐向最优解靠近,这表明方法具有良好的收敛能力。

c)实验设计方法SyLHD对于方法的初始化起到关键的作用,一是其保留了拉丁超立方设计的随机性保证了初始样本覆盖最优解区域的概率,二是其对称性对初始样本质量有了一定的提高。

d)周期动态约束策略为候选点与训练样本之间增加了动态距离约束,使得问题的搜索空间相对训练样本由远至近收缩,引导着响应面优化方法向整个决策空间搜索最终收敛至全局最优。可见,CDC策略对方法收敛性有着重要的影响。

综上所述,与Gutmann-RBF、CORS-RBF两种方法相比,HRSO减少了优化过程中对函数的评估次数,节省了可观的计算资源,具有更快的全局收敛能力,且是一种稳定的响应面优化方法。

4 结束语

在HRSO中,混合响应面模型提高了响应面的精度及非线性近似性能;SyLHD方法的对称性提高了生成样本的表征系统特性的能力,其随机性在一定程度上生成的样本能够引导搜索向最优解潜在区域快速收敛;距离约束防止了在优化过程中更新样本过于密集而影响搜索的效果。实验结果表明,这种混合响应面优化方法是一种新颖的适合求解黑箱优化问题的有效方法。

参考文献:

- [1] GUTMANN H M. Radial basis function methods for global optimization [D]. Cambridge: University of Cambridge, 2001.
- [2] GUTMANN H M. A radial basis function method for global optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 19(3): 201-227.
- [3] REGIS R G, SHOEMAKER C A. Constrained global optimization of expensive black box functions using radial basis functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 2005, 31(1): 153-171.
- [4] 王永菲,王成国. 响应面法的理论与应用[J]. 中央民族大学学报: 自然科学版, 2005, 14(3): 236-239.
- [5] BAS D, BOYACI T H. Modeling and optimization II: comparison of estimation capabilities of response surface methodology with artificial neural networks in a biochemical reaction[J]. *Journal of Food Engineering*, 2007, 78(3): 846-854.
- [6] McDONALD D B, GRANTHAM W J, TABOR W L, et al. Global and local optimization using radial basis function response surface model[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2007, 31(10): 2095-2110.
- [7] ALEXANDROV N, DENNIS J E, LEWIS R M, et al. A trust region framework for managing the use of approximation models in optimization[J]. *Structural Optimization*, 1998, 15(1): 16-23.
- [8] JONES D R. A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces[J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 21(14): 345-383.
- [9] YE K Q, LI W, SUDJANTO A. Algorithmic construction of optimal symmetric latin hypercube designs[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2000, 90(1): 145-159.
- [10] KAO Y T, ZAHARA E. A hybrid genetic algorithm and particle swarm optimization for multimodal functions[J]. *Applied Soft Computing*, 2008, 8(2): 849-857.
- [11] REGIS R G, SHOEMAKER C A. Improved strategies for radial basis function methods for global optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2007, 37(1): 113-135.