# 二维波动方程的一种高精度紧致差分方法*

任军号，解丹蕊
（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

**摘 要：** 提出了一种求解二维波动方程的高精度紧致差分方法，该方法首先利用紧交替方向隐式差分格式，其截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$，分别在粗网格和细网格上对原方程进行求解，然后利用 Richardson 外推计算一次，进一步提高精度，得到了二维波动方程具有 $O(\tau^4+h^6)$ 精度的数值解。数值实验验证了该方法的可靠性、有效性和精确性。

**关键词：** 二维波动方程；高精度紧致差分格式；交替方向隐式格式
**中图分类号：** O241.82 **文献标志码：** A **文章编号：** 1001-3695(2012)06-2112-02
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.06.028

# High-order compact difference method for solving two dimensional wave equation

REN Jun-hao, XIE Dan-rui
(*College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

**Abstract:** This paper gave out a better solution to a high-order compact difference method of the two-dimensional wave equation. Firstly, this method obtained numerical results on different size meshes by using a high order alternating direction implicit (ADI) difference scheme, which were of order $O(\tau^2+h^4)$, then got an $O(\tau^4+h^6)$ accuracy solution via the Richardson extrapolation method. The numerical experiments demonstrate the high accuracy, efficiency and dependability of the method.

**Key words:** two dimensional wave equation; high-order compact scheme; alternating direction implicit scheme

## 0 引言

双曲型偏微分方程在航空、气象、海洋、水利等许多流体力学的问题中均有应用。由于物理问题本身的复杂性，其精确解往往不容易求得，因此研究其数值解法具有非常重要的意义。有限差分法是数值求解该方程的常用方法之一。在有限差分法中，交替方向隐式（ADI）方法是求解高维问题的一种非常有效的方法，传统的 P-R、Douglas 及 LOD 格式都是二阶精度的，并引起了许多学者的关注[1~3]。

近年来，高精度紧致差分格式由于具有不需要对相邻节点进行特殊处理、省时、整体精度高、对高频波有更好的分辨率等优越性，日益受到重视。文献[4]提出了求解二维非定常对流扩散方程的高精度 ADI 格式。文献[5]提出了二维常系数反映扩散方程的紧交替方向隐式差分格式，其精度为 $O(\tau^2+h^4)$，然后利用 Richardson 外推法，外推一次得到具有 $O(\tau^4+h^6)$ 阶精度的数值解。孙志忠[5]提出了求解二维波动方程的高精度交替方向隐式方法，并且是无条件稳定的。有关这方面最新的一些工作可参见文献[6~8]。本文在此工作基础之上，利用 Richardson 外推法进一步提高计算精度，最终可得到求解该问题精度为 $O(\tau^4+h^6)$ 的数值解。

## 1 高阶紧致 ADI 格式

考虑如下二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,t) \quad (x,y,t)\in\Omega\times(0,T] \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y) \quad (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y) \quad (x,y)\in\Omega \tag{3}$$

$$u(x,y,t)=g(x,y,t) \quad (x,y)\in\Gamma \quad t\in(0,T] \tag{4}$$

其中：$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}$；$\Gamma$ 为 $\Omega$ 的边界；$u(x,y,t)$ 为待求未知量；$f(x,y,t)$ 为非齐次项；$\varphi(x,y)$、$\psi(x,y)$ 和 $g(x,y,t)$ 均为已知函数且具有充分的光滑性。用 $\tau$ 表示时间步长，空间取等距网格，步长用 $h$ 表示。由文献[5]可得式(1)的高精度紧致 ADI 格式为

$$\begin{cases}\left(A-\dfrac{\tau^2}{2}\delta_x^2\right)u_{i,j}^*=[B\delta_x^2+A\delta_y^2]u_{i,j}^n+ABf_{i,j}^n\\ \left(B-\dfrac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2u_{i,j}^n=u_{i,j}^*\end{cases} \tag{5}$$

对于过渡变量 $u_{i,j}^*$ 的边界条件，可以由 $u_{i,j}^*=\left(B-\dfrac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2g_{i,j}^n$ 给出，其中 $A=I+h^2\delta_x^2/12$，$B=I+h^2\delta_y^2/12$，$\delta_t^2$、$\delta_x^2$ 和 $\delta_y^2$ 表示二阶中心差分算子。

紧致差分格式(5)的截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$，即空间为四阶精度、时间为二阶精度，并且是无条件稳定的，因为格式是三层的。即每一次时间推进都需要知道前两个时间步的值，第 0 层值由式(2)精确给出，与式(5)相匹配的第一个时间步的离散格式为

$$u_{i,j}^1=\varphi(x_i,y_j)+\tau\psi(x_i,y_j) \tag{6}$$

**收稿日期：** 2011-11-10；**修回日期：** 2011-12-19 **基金项目：** 国家自然科学基金资助项目(61001156)

**作者简介：** 任军号(1963-)，男，陕西周至人，教授，博士，主要研究方向为智能计算、城市系统仿真等(renjunhao@nwpu.edu.cn)；解丹蕊(1981-)，女，陕西户县人，博士，主要研究方向为智能计算.

## 2 Richardson 外推算法

选取正整数 $M$ 和计算所需到达时刻 $T$,并令 $h=1/M, N=T/\tau$。式(5)的截断误差为

$$R_{i,j}^n=\frac{\tau^2}{12}AB\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,y_j,t_n)-\frac{\tau^2}{2}\times$$
$$[B\delta_x^2\delta_t^2 u(x_i,y_j,t_n)+A\delta_y^2\delta_t^2 u(x_i,y_j,t_n)]+$$
$$\frac{h^4}{240}\left[B\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i,y_j,t_n)+A\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x_i,y_j,t_n)\right]+O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \quad (7)$$

假设 $u(x_i,y_j,t_n)$ 为定解问题式(1)~(4)的解,$u_{i,j}^n(h,\tau)$ 为差分格式(5)的解,其中 $0\leqslant i,j\leqslant M, 0\leqslant n\leqslant N$,记 $e_{i,j}^n=u(x_i,y_j,t_n)-u_{i,j}^n$,则得到误差方程

$$\begin{cases}\left(A-\frac{\tau^2}{2}\delta_x^2\right)\left(B-\frac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2 e_{i,j}^n=(B\delta_x^2+A\delta_y^2)\times \\ e_{i,j}^n+R_{i,j}^n \qquad 0\leqslant i,j\leqslant M-1, 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ e_{i,j}^0=0 \qquad 0\leqslant i,j\leqslant M-1 \\ \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{i,j}^0=0 \qquad 0\leqslant i,j\leqslant M-1 \\ e_{i,j}^n=0 \qquad i,j\in\partial\Omega_h, 0\leqslant n\leqslant N\end{cases} \quad (8)$$

假设 $p(x,y,t)$ 和 $q(x,y,t)$ 满足二维波动方程的初边值问题,$r_1(x,y,t)$,$r_2(x,y,t)$ 分别为其非齐次项,且分别存在光滑解 $p(x,y,t)$ 和 $q(x,y,t)$,其中

$$r_1(x,y,t)=\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,y,t)-$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x,y,t)+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial t^2}(x,y,t)\right]$$
$$r_2(x,y,t)=\frac{1}{240}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x,y,t)+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x,y,t)\right]$$

则 $p=\{p_{i,j}^n(h,\tau)\mid 0\leqslant i,j\leqslant M, 0\leqslant n\leqslant N\}$,$q=\{q_{i,j}^n(h,\tau)\mid 0\leqslant i,j\leqslant M, 0\leqslant n\leqslant N\}$ 分别为紧致差分格式

$$\left(A-\frac{\tau^2}{2}\delta_x^2\right)\left(B-\frac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2 p_{i,j}^n=(B\delta_x^2+A\delta_y^2)p_{i,j}^n+AB(r_1)_{i,j}^n \quad (9)$$

和

$$\left(A-\frac{\tau^2}{2}\delta_x^2\right)\left(B-\frac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2 q_{i,j}^n=$$
$$(B\delta_x^2+A\delta_y^2)q_{i,j}^n+AB(r_2)_{i,j}^n \quad (10)$$

的解,且

$$p(x_i,y_j,t_n)=p_{i,j}^n(h,\tau)+O(\tau^2+h^4)$$
$$q(x_i,y_j,t_n)=q_{i,j}^n(h,\tau)+O(\tau^2+h^4)$$

记 $s_{i,j}^n=e_{i,j}^n-\tau^2p_{i,j}^n-h^4q_{i,j}^n$,用(8)-(9)$\times\tau^2$-(10)$\times h^4$ 可得

$$\begin{cases}\left(A-\frac{\tau^2}{2}\delta_x^2\right)\left(B-\frac{\tau^2}{2}\delta_y^2\right)\delta_t^2 s_{i,j}^n=(B\delta_x^2+A\delta_y^2)s_{i,j}^n+ \\ (r_3)_{i,j}^n \quad 0\leqslant i,j\leqslant M-1, 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ s_{i,j}^0=0 \quad 1\leqslant i,j\leqslant M-1 \\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{i,j}^0=0 \quad 1\leqslant i,j\leqslant M-1 \\ s_{i,j}^n=0 \quad i,j\in\partial\Omega_h, 0\leqslant n\leqslant N\end{cases}$$

其中:$(r_3)_{i,j}^n=R_{i,j}^n-AB[\tau^2(r_1)_{i,j}^n+h^4(r_2)_{i,j}^n]=O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6)$,则

$$u(x_i,y_j,t_n)-[u_{i,j}^n(h,\tau)+\tau^2p(x_i,y_j,t_n)+$$
$$h^4q(x_i,y_j,t_n)]=O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \quad (11)$$

同理,有

$$u(x_i,y_j,t_n)-[u_{2i,2j}^{4n}(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4})+(\frac{\tau}{4})^2p(x_i,y_j,t_n)+$$
$$\left(\frac{h}{2}\right)^4q(x_i,y_j,t_n)]=O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \quad (12)$$

用16/15乘以式(12),1/15乘以式(11),将所得结果相减可得

$$u(x_i,y_j,t_n)-\left[\frac{16}{15}u_{2i,2j}^{4n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\right)-\frac{1}{15}u_{i,j}^n(h,\tau)\right]=O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6)$$

即分别在区域 $\Omega_h$ 和 $\Omega_{\frac{h}{2}}$ 上得到解 $u_{i,j}^n(0\leqslant i,j\leqslant M)$ 和 $u_{i,j}^{4n}(0\leqslant i,j\leqslant 2M)$。用 Richardson 外推法,可得到式(1)在 $\Omega_h$ 上的截断误差为 $O(\tau^4+h^6)$ 的近似值,即

$$u_{i,j}^n=\frac{16}{15}u_{2i,2j}^{4n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\right)-\frac{1}{15}u_{i,j}^n(h,\tau)$$
$$(0\leqslant i,j\leqslant M, 0\leqslant n\leqslant N)$$

## 3 数值验证

对于式(1)~(4),令 $\psi(x,y)=\sqrt{2}\pi\sin(\pi x)\sin(\pi y)$,$\varphi(x,y)=0$,$g(x,y,t)=0$,则问题的精确解为 $u(x,y,t)=\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$。数值实验计算是用 Fortran 77 语言进行编程且在 Pentium Ⅲ1000 PC 机上双精度制下进行的。

用 $\tau$ 表示时间步长,$h$ 表示空间步长,表1给出了当 $\tau=4h^2$,$t=1$ 时刻,本文格式在不同网格步长下误差的 $L_\infty$、$L_2$、$H_1$ 范数,以及与四阶 ADI 格式[5]计算结果的比较。$L_2$ 范数定义为 $\|E\|_{L_2}=\sqrt{h^2\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}(e_{i,j})^2}$,$H_1$ 范数定义为 $\|E\|_{H_1}=\sqrt{h^2\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}(\delta_x e_{i+\frac{1}{2},j})^2+h^2\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\delta_y e_{i,j+\frac{1}{2}})^2}$,可以看出本文方法对于提高计算精度,效果是非常显著的。

表2给出了对应于不同的网格步长 $h$,所给问题在 $t=0.125$ 时刻,当 $\tau=h$ 时二阶 ADI 格式[5]和 $\tau=4h^2$ 时四阶 ADI 格式[5]、本文格式的数值计算结果的 $L_\infty$ 范数和收敛阶 rate $=\ln(E_1/E_2)/\ln2$ ($E_1$ 和 $E_2$ 分别为粗网格及相邻的细网格上误差的 $L_\infty$ 范数)。结果表明,三种格式均达到了各自的精度,并且本文方法的计算结果要比文献[5]提出的其他两种格式精确得多。

表1　$\tau=4h^2$,$t=1$ 时刻,$L_2$、$H_1$ 和 $L_\infty$ 范数下的误差

| $h$ | 四阶 ADI 格式[5] | | | 本文方法 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|E\|_{L_2}$ | $\|E\|_{H_1}$ | $\|E\|_{L_\infty}$ | $\|E\|_{L_2}$ | $\|E\|_{H_1}$ | $\|E\|_{L_\infty}$ |
| 1/10 | 1.57e-3 | 6.98e-3 | 3.15e-3 | 1.47e-5 | 6.51e-5 | 2.94e-5 |
| 1/20 | 1.12e-4 | 4.99e-4 | 2.25e-4 | 5.76e-8 | 2.55e-7 | 1.15e-7 |
| 1/40 | 7.08e-6 | 3.14e-5 | 1.42e-5 | 2.25e-10 | 9.98e-10 | 4.50e-10 |
| 1/80 | 4.43e-7 | 1.97e-6 | 8.85e-7 | 9.02e-13 | 7.74e-12 | 1.95e-12 |

表2　$t=0.125$ 对应不同空间步长 $h$ 的最大误差和收敛阶

| $h$ | 二阶 ADI 格式[5] | | 四阶 ADI 格式[5] | | 本文方法 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|E\|_{L_\infty}$ | rate | $\|E\|_{L_\infty}$ | rate | $\|E\|_{L_\infty}$ | rate |
| 1/8 | 2.81e-2 | | 7.50e-3 | | 1.02e-5 | |
| 1/16 | 7.57e-3 | 1.89 | 4.78e-4 | 3.97 | 4.01e-8 | 7.99 |
| 1/32 | 1.93e-3 | 1.97 | 2.99e-5 | 4.00 | 1.57e-10 | 8.00 |
| 1/64 | 4.83e-4 | 1.99 | 1.87e-6 | 4.00 | 6.20e-13 | 7.98 |

## 4 结束语

本文利用二维波动方程的紧交替方向隐式差分格式,其精度为 $O(\tau^2+h^4)$。首先在粗网格和细网格上对原方程进行求解,然后利用 Richardson 外推一次,得到了二维波动方程具有 $O(\tau^4+h^6)$ 精度的数值解,并对不同网格步长下误差的 $L_\infty$、$L_2$、$H_1$ 范数进行比较,最后对该方法的精确性及有效性通过数值实验进行了验证,证明该方法有效可行。

**参考文献:**

[1] 程爱杰. 平面热传导方程 Douglas 交替方向隐格式的稳定性和收敛性[J]. 高校计算数学学报,1998,20(2):265-272.

(下转第2116页)

（上接第 2113 页）
[2] 张洪伟,王同科.二维双曲型方程非齐次边值问题的推广型 LOD 有限差分格式[J].天津师范大学学报,2007,27(1):53-56.

[3] LIAO Hong-lin, SUN Zhi-zhong. Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations [J]. Methods Partial Differential Equations,2010,26(1):37-60.

[4] KARAA S, ZHANG Jun. High order ADI method for solving unsteady convection-diffusion problem[J]. Journal of Computational Physic,2004,198(1):1-9.

[5] 孙志忠.偏微分方程数值解法[M]. 北京:科学出版社, 2005:28-35.

[6] 陆金甫,关冶.偏微分方程数值解法[M]. 北京:清华大学出版社, 1987:165-171.

[7] LI Ji-chun, MIGUEL R V. High-order compact schemes for nonlinear dispersive waves[J]. Journal of Scientific Computing,2006,26(1):1-23.

[8] TIAN Zhen-fu, GE Yong-bin. A fourth-order compact ADI method for solving two-dimensional unsteady convection-diffusion problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2007,198(1):268-286.

[9] WANG Yin, ZHANG Jun. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D Poisson equation [J]. Journal of Computational Physics,2009,228(1):137-146.

[10] 李肯立,彭俊杰,周仕勇.基于 CUDA 的 Kirchhoff 叠前时间偏移算法设计与实现[J].计算机应用研究,2009,26(12):4474-4477.