

基于网格的 E-占优新型 NSGA-II 算法*

周小桃, 张冬梅, 龚小胜

(中国地质大学 计算机学院, 武汉 430074)

摘要: 为了提高基于 E-占优的 NSGA-II 算法的优化效果, 针对其在保持种群的多样性和分布性上的不够完善以及变异算子性能比较弱的问题, 提出基于网格的 E-占优新型 NSGA-II 算法, 根据算法所存在的问题采用网格来保持进化种群的多样性、分布性和采用非均匀变异来改善变异算子的性能。新算法与 NSGA-II 和基于 E-占优的 NSGA-II 进行比较, 结果表明新算法性能得到了提高, 在处理多目标问题时多样性和分布性上均有了明显的改善。

关键词: 多目标优化; E-占优; NSGA-II 算法; 网格; 非均匀变异

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)06-2105-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.06.026

New NSGA-II algorithm of E-dominance based on grid

ZHOU Xiao-tao, ZHANG Dong-mei, GONG Xiao-sheng

(Institute of Computer, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: In order to improve optimization effect of NSGA-II based on E-dominate, this paper proposed a new NSGA-II based on E-dominance. It adopted grid to make better distribution and diversity, and used non-uniform mutation to enhance the performance of its mutation. Compared with NSGA-II and NSGA-II algorithm based on E-dominance, this new algorithm has a better performance in keeping distribution and diversity. It shows that the performance of new algorithm has been improved.

Key words: multi-objective optimization; E-dominance; NSGA-II algorithm; grid; non-uniform mutation

0 引言

当前工程实践与科学研究中的优化问题大多是多目标问题(multi-objectives evolutionary algorithms, MOEAs), 而演化算法能够有效地解决多目标问题, 因此演化算法迅速成为多目标优化研究的一大热点。

随着研究和应用的不断深入, 实际求解多目标问题的复杂性对算法的各种性能提出了新的挑战。特别是当多目标优化问题的目标数目增多时, 基于 Pareto 占优理论的优化算法所得的解集将会是整个可行解区域^[1], 不能给决策者提供比较有价值的信息。2005 年 Deb 等人^[2]发现当目标个数过多时, 基于 Pareto 优化理论的演化多目标算法将很难有效地收敛到 Pareto 前沿。文献[3]中指出了 Pareto 优化理论的三个缺点: 没有考虑到多目标优化问题中改进目标的个数; 没有真正考虑到多目标优化问题中解在目标空间中的各个目标值; 没有考虑到目标的偏好。因此众多研究者都在试图寻找一种能够提供更加公平和合理的占优理论, 以给决策者提供更加有利的信息。2005 年 Di Pierro 等人^[4]提出 K-占优机制, 2007 年 Hernandez-Diaz 等人^[5]在演化计算中应用 ϵ -占优机制。这些占优机制从目标个数的角度出发, 为许多非支配个体提供比较与选择的标准, 以克服算法在 Pareto 占优机制中的不足。但是 K-占优只考虑到问题的目标个数, ϵ -占优也只是考虑到占优个体

与被占优个体在各目标上的适应度值相差程度, 这些占优机制并没有真正地解决 Pareto 占优机制在处理多目标问题时解集过于庞大的问题。为此, Kang 等人^[6]提出 E-占优机制, 它不仅考虑到目标个数, 同时也考虑到子目标的具体值。2008 年 Shibuchi 等人^[7]提出将决策者的信息并入问题研究中, 进而出现了求偏好多目标优化。

NSGA-II (non-dominated sorting genetic algorithm)^[8] 是一种快速的演化算法, 针对 NSGA 算法所存在的三个主要缺点进行了改进: 采用快速非支配排序降低了构造 Pareto 最优解的时间复杂度, 采用新型的拥挤距离去替代共享参数并采用了精英保留策略。与其他的演化算法相比, 它具有结构简单、容易使用和快速等特点。但是 NSGA-II 算法在收敛性和分布性上的表现还是不够完善, 算法变异算子性能相对较弱, 同时, 在处理多目标问题时的 Pareto 解集过于庞大, 而不能给决策者提供比较有价值的信息。为此在 2009 年, 龚小胜等人提出了基于 E-占优的 NSGA-II 算法, 它采用 E-占优理论替代 NSGA-II 算法中的 Pareto 占优理论, 从而有效地解决了 NSGA-II 算法在处理多目标问题时所存在的问题, 但是对于 NSGA-II 算法所存在的收敛性和分布性上不够完善, 对算法变异算子性能相对较弱的缺点没有给出相应的解决策略。

本文对于基于 E-占优的 NSGA-II 算法所存在的以上两点不足进行了改进, 提出一种基于网格的 E-占优新型 NSGA-II

收稿日期: 2011-10-28; **修回日期:** 2011-12-06 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(40972206); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(1323520909)

作者简介: 周小桃(1987-), 女, 湖北钟祥人, 硕士研究生, 主要研究方向为智能计算(xzt_928@sina.com); 张冬梅(1972-), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为科学计算可视化、智能计算、智能信息处理等; 龚小胜(1987-), 男, 湖北随州人, 硕士研究生, 主要研究方向为智能计算。

算法,称之为 GE-NSGA-II。该算法的主要改进之处如下:

a) 采用网格技术保证算法的分布性。为每个个体分配一个网格值和原点距离,通过这两个值来筛选个体。

b) 采用非均匀变异。采用非均匀变异替换算法中的多项式变异,此算子具有良好的局部逃逸和局部搜索能力^[9]。

为了测试算法的性能,通过 Deb 等人设计的九个标准测试函数 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4、ZDT6、DTLZ1、DTLZ2、DTLZ3、DTLZ7 来验证新算法的优越性能。

1 相关定义

定义 1 多目标优化问题(multi-objective optimization problem, MOP)。

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s. t. } g(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)) \leq 0 \\ h(x) &= (h_1(x), h_2(x), \dots, h_q(x)) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中: x 是决策空间的 n 维向量, $F(x)$ 为目标空间, m 表示目标个数, p 表示不等式约束条件的个数, q 表示等式约束条件的个数。

定义 2 Pareto 支配关系。设 p, q 是决策空间的任意两个决策变量,当对于所有的子目标, p 不比 q 差,同时要存在至少有一个子目标使得 p 比 q 好,这时才可以称 p Pareto 支配 q ,记做 $p <_p q$ 。

为了更好地解释以下定义,在这里给出三个参数的定义(本文以目标值最小为优)。

定义 3 B_i, W_s, E_q 。

$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, B_i(X_1, X_2)$ 表示在目标空间中 $F(X_1)$ 比 $F(X_2)$ 表现较好的目标个数:

$$B_i(X_1, X_2) = |\{i \in \mathbb{N} \mid F_i(X_1) < F_i(X_2)\}| \quad (2)$$

$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, W_s(X_1, X_2)$ 表示在目标空间中 $F(X_1)$ 比 $F(X_2)$ 表现较差的目标个数:

$$W_s(X_1, X_2) = |\{i \in \mathbb{N} \mid F_i(X_1) > F_i(X_2)\}| \quad (3)$$

$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, E_q(X_1, X_2)$ 表示在目标空间中 $F(X_1)$ 与 $F(X_2)$ 表现相同的目标个数:

$$E_q(X_1, X_2) = |\{i \in \mathbb{N} \mid F_i(X_1) = F_i(X_2)\}| \quad (4)$$

为了后文表述的方便,用 B_i 表示 $B_i(X_1, X_2)$, W_s 表示 $W_s(X_1, X_2)$, E_q 表示 $E_q(X_1, X_2)$ 。可以很容易得出 $B_i + W_s + E_q = n, n$ 为目标个数。

定义 4 K-占优。

两个目标向量 $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^n$, 给定参数 k 满足:

$$E_q < n \wedge B_i \geq \frac{n - E_q}{k + 1} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (5)$$

那么 F_1 K-占优于 F_2 , 记做 $F_1 <_k F_2$ 。

定义 5 原点距离 $\|F(x)\|$ 。

$$\|F(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (F_i(x))^2} \quad (6)$$

定义 6 E-占优。两个目标向量 $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^m$, 给定参数 $e > 0$ 使得满足:

$$(B_i - W_s = e > 0) \wedge (\|F(X_1)\| < \|F(X_2)\|) \quad (7)$$

那么 F_1 E-占优于 F_2 , 记做 $F_1 <_e F_2$ 。

定义 7 网格单元。给定一个 d 维的数据集 S , 其属性 $(A_1, A_2, \dots, A_d)$ 都是有界的, 将数据第 i 维划分成 n_i 小段, 由第 i 维所划分的小段组成的集合记为 S_i , 那么数据空间被笛卡

尔集 $(S_1, S_2, \dots, S_d)$ 划分为 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d$ 网格单元。用每一小段在该维上的位置构成的 d 维向量来唯一标志这个网格单元。例如, 网格单元 u 可记为 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。

定义 8 非均匀变异。它是一种自适应的变异算子, 它的搜索步长会随着时间进行自适应的调整, 其前半段的搜索范围比较大, 几乎是整个定义域, 但是随着算法的推进, 其搜索的范围变得越来越小, 这样使所得的解集空间越来越靠近其真实的解集空间。

$$X_i' = \begin{cases} X_i + \Delta(t, u_i - X_i) & \text{random}(0, 1) = 0 \\ X_i - \Delta(t, X_i - l_i) & \text{random}(0, 1) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

函数 $\Delta(t, y)$ 返回 $[0, y]$ 里面的一个值, u_i 表示决策变量第 i 维的上限, l_i 表示其相对应的下限。

2 基于网格的 E-占优的新型 NSGA-II 算法

基于 E-占优的 NSGA-II 算法与 NSGA-II 算法最大的区别在于, 前者采用 E-占优方式对种群进行快速排序, 而后者采用 Pareto 占优方式。基于 E-占优的 NSGA-II 在处理高维多目标问题时能够有效地降低解集的规模, 给决策者提供比较有价值的信息, 但是存在着收敛性与分布性不够完善的缺点: 算法中拥挤距离只考虑到个体的聚集度而没有考虑到个体目标的具体值, 即没有考虑到个体与前沿的距离, 致使解集中靠近 Pareto 前沿的解有可能被筛选掉; 基于 E-占优的 NSGA-II 算法采用多项式变异, 这种变异方式在执行变异操作时会或多或少地使变异后的数值超出向量的取值范围, 遇到这样的情况时, 其常规的处理方式是取端点值, 这样就容易使种群陷入局部收敛状态而无法逃脱出来。为了解决以上两点问题, 本文提出了一种新算法, 即基于网格的 E-占优 NSGA-II 算法。它采用网格的方式去解决多样性和分布性问题, 用网格的方法将种群划分成不同的集合, 再从每个集合中选择最好的一个个体作为所在集合的代表, 这样就保证了种群的多样性和分布性, 那么每一代都采用这样的方式划分种群就是使种群个体有着比较好的分布性和多样性。对于局部收敛, 选择一种能够有效逃离局部收敛的变异操作。从定义 8 中了解到, 非均匀变异是将种群的个体限制在可行解空间里, 这样就减少了个体为端点值的概率, 同时其搜索空间会随着时间的推移使得最优解的搜索过程更加集中在最优希望的重点区域。

基于网格的 E-占优的新型 NSGA-II 算法与基于 E-占优的 NSGA-II 算法最大的区别有两点: a) 采用网格技术替换原算法的拥挤距离; b) 采用不同于原算法的变异算子, 即非均匀变异。下面分别介绍网格策略及新算法。

算法 1

a) 遍历种群: 对需要舍弃个体的层进行遍历, 记录下个体每一维的最大值和最小值。

b) 设定网格的边界值: 采用步骤 a) 所得的最大值和最小值, 将整个空间平均划分为 N 个网格单元。

c) 对种群进行网格值的计算: 将需要计算的个体进行网格值的计算, 并记录下相应的网格值, 对于处在同一个网格中的个体优先选择其距离坐标原点距离小的个体。

d) 对种群进行排序: 按照网格的比较策略, 在同一个网格单元的个体选择距离坐标原点距离小的个体和处于不同网格的个体会优先被选择。

算法 2

算法参数: 种群的规模 N ; 算法最大评价次数 M ; 交叉变异的类型,

即模拟二进制交叉、非均匀变异;交叉变异的概率,即交叉概率 c 、变异概率 m 。

a) 初始化种群:在确定算法的各项参数设置后,生成种群规模为 N 的初始群体,并计算初始群体的适应值。

b) 生成新种群:采用算法设定的交叉、变异策略以及算法中的其他策略生成规模为 N 的新种群并计算新种群的适应值。

c) 种群进行非支配排序:混合新种群和当前种群生成规模为 $2N$ 的种群,采用E-占优策略对种群进行分层与排序。

d) 选择子代种群:通过算法所用的精英选择、网格策略及算法自身特点所定义的选择策略,从上面排序的种群中选择规模为 N 的子代种群。

e) 算法执行流程:算法循环采用自身的循环流程以及停止条件执行算法。若算法不满足停止条件则跳转至步骤b)继续执行。

3 实验结果

3.1 实验环境与参数设置

实验环境:内存 512 MB;操作系统 Microsoft Windows;数值实验对比算法是在 jMetal 演化多目标优化平台上改进的。

参数设置如下:群体大小 $M=100$;交叉概率 $CR=0.9$;变异概率 $MP=0.1$;运行的代数 $T=10\ 000$ 。

3.2 测试函数

为了测试算法的性能,笔者采用了九个测试函数 ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4、ZDT6、DTLZ1、DTLZ2、DTLZ3、DTLZ7。其中前五个函数选自文献[10],后四个函数选自文献[11]。前面五个函数是两目标函数,决策变量 $n=30$;后面三个是三目标函数,其中 DTLZ1 的决策变量 $n=7$,DTLZ2 和 DTLZ3 的决策变量 $n=12$,DTLZ7 的决策变量 $n=22$ 。

3.3 实验结果

每个函数独立运行 10 次,采用以下三个性能指标对算法的性能进行评价:

1) 多样性

Δ 度量^[12]是多样性度量指标,用来度量求得的非劣解集在整个目标空间中分布的均匀性。其表达式为

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{N-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (N-1)\bar{d}} \quad (9)$$

其中: d_f 、 d_l 为非劣解集的两个边界值(boundary solutions)到 Pareto 最优前沿两个边界解的欧氏距离。

2) 收敛性

γ 度量是收敛性度量指标,表明所求出的非劣解集到 Pareto 真实前沿的逼近程度,其表达式为

$$\gamma = \frac{\sum_{u \in P} d(u, P^*)}{|P|} \quad (10)$$

其中: P 是所求出的 Pareto 非劣解, P^* 是均匀分布在 Pareto 最优前沿 PF 上的样本点, $d(u, P^*)$ 是解集 P 中的点 u 到 P^* 中所有的点的欧氏距离最小的距离, $|P|$ 是解集 P 中的个体数目。

3) IGD

多样性性能指标只能度量两个目标问题的多样性,为了能够度量多于两目标的多样性,在这里采用 IGD 指标。IGD 不仅考虑到收敛性,同时也考虑到多样性,其表达式为

$$D(P^*, P) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, P)}{|P^*|} \quad (11)$$

为了描述的方便,这里将基于 E-占优的 NSGA-II 算法简

称为 E-NSGA-II,基于 E-占优的采用网格的 NSGA-II 算法称为 GE-NSGA-II。三种算法在指标 Δ 上的对比如表 1 所示。

表 1 算法在性能指标 Δ 上的数值对比

problem	NSGA-II	E-NSGA-II	GE-NSGA-II
ZDT1	3.71e-01	1.03e+00	3.65e-01
ZDT2	3.71e-01	1.04e+00	3.72e-01
ZDT3	7.43e-01	1.06e+00	8.11e-01
ZDT4	3.91e-01	1.03e+00	3.93e-01
ZDT6	3.90e-01	1.01e+00	3.95e-01

从表 1 中可以看出,在两目标上 NSGA-II 算法的多样性最好,E-NSGA-II 算法最差,新算法的性能居中,但是需要了解到新算法是在 E-NSGA-II 算法的基础上改进的,可以看到新算法在这五个测试函数上的性能都优于 E-NSGA-II 算法,这明显表明新算法的多样性得到了很大的改善。至于新算法的多样性不优于 NSGA-II 算法的原因可能是本文所采用的网格选择个体时,对于处在同一网格的个体选择距离坐标原点小的个体,但并不代表处在同一网格内的个体不会被同时选择,算法中只是将处在同一网格距离坐标原点近的个体排在前面,选择时优先选择。因此网格在这时就没有很好地起到增强算法多样性的作用,算法的多样性会弱于 NSGA-II 算法,但这并不代表网格没有起到作用,与 E-NSGA-II 算法相比,算法的多样性还是得到了很大的改善。

三种算法在指标 γ 上的对比如表 2 所示。

表 2 算法在性能指标 γ 上的数值对比

problem	NSGA-II	E-NSGA-II	GE-NSGA-II
ZDT1	1.90e-04	2.13e-02	1.88e-04
ZDT2	1.91e-04	2.73e-02	1.90e-04
ZDT3	2.54e-04	2.53e-02	1.41e-02
ZDT4	2.33e-04	1.78e-02	2.22e-04
ZDT6	3.30e-04	7.54e-03	3.40e-04
DTLZ1	1.66e-03	3.18e-03	2.95e-03
DTLZ2	7.74e-04	7.56e-03	6.62e-03
DTLZ3	8.09e-02	1.77e-02	1.74e-02
DTLZ7	2.29e-03	4.21e-02	4.20e-02

从表 2 中可以看出,GE-NSGA-II 算法的收敛性在 6/9 的函数上最好,NSGA-II 在 3/9 的函数上表现最好,E-NSGA-II 上没有。对于新算法在 ZDT4、ZDT6 上性能表现不是很好的原因可能是本文所采用的网格选择个体时,对于处在同一网格的个体选择距离坐标原点近的个体,这在一定程度上影响到 Pareto 前沿不为直线的多目标问题,致使新算法所得的解集的 Pareto 前沿更接近于直线,算法的收敛性受到了一些影响。而对于 DTLZ7,新算法的收敛性弱于 NSGA-II 算法的原因可能是算法陷入了局部收敛。

表 3 中显示 GE-NSGA-II 算法的收敛性在 5/9 的函数上最好,NSGA-II 在 4/9 的函数上表现最好,说明新算法的 IGD 得到了比较大的改善。IGD 值是多样性和收敛性的综合体,那么 IGD 值能更好地反映算法性能的好坏,从此表中能够得到明确的信息:新算法的性能得到了很大的改善。这也很明确地证明了新算法的改进方案是可行的。

在这里选择 ZDT3、DTLZ3、DTLZ7 的测试函数的结果图。图 1~3 作比较可以看出,新算法在多样性和分布性上都优于 E-NSGA-II 算法,同时也体现了 E-占优的优势,降低了解集的规模。从图 4~6 中可以看出,新算法在 DTLZ3 上的多样性和分布性都优于 NSGA-II 和 E-NSGA-II 算法。从图 7、8 中可以看出,算法在 DTLZ7 上的多样性和分布性与 E-NSGA-II 算法差不多,但都

次于 NSGA-II 算法,这说明算法在 DTLZ7 上没有体现新算法的优势,这可能是因为新算法陷入了局部收敛状态。

表3 算法在性能指标 IGD 上的数值对比

problem	NSGA-II	E-NSGA-II	GE-NSGA-II
ZDT1	1.37e-02	9.61e-01	1.33e-02
ZDT2	1.31e-02	9.61e-01	1.27e-02
ZDT3	8.41e-03	7.73e-01	7.73e-01
ZDT4	1.52e-02	8.39e-01	1.46e-02
ZDT6	1.39e-02	5.91e-01	1.42e-02
DTLZ1	1.08e-01	1.65e-01	1.65e-01
DTLZ2	1.30e-01	9.50e-01	9.08e-01
DTLZ3	4.59e+00	1.40e+00	1.34e+00
DTLZ7	1.51e-01	8.55e-01	8.53e-01

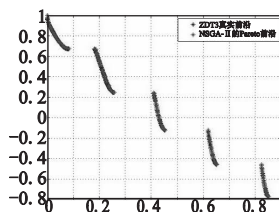


图1 NSGA-II在ZDT3的测试结果

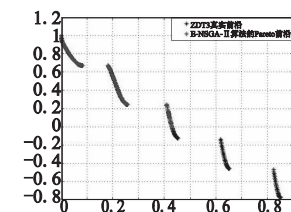


图2 E-NSGA-II在ZDT3的测试结果

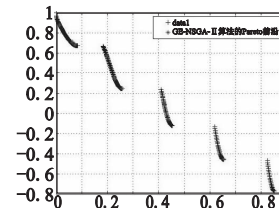


图3 GE-NSGA-II在ZDT3的测试结果

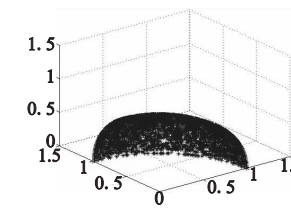


图4 NSGA-II在DTLZ3的测试结果

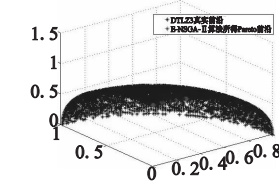


图5 E-NSGA-II在DTLZ3的测试结果

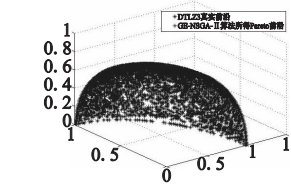


图6 GE-NSGA-II在DTLZ3的测试结果

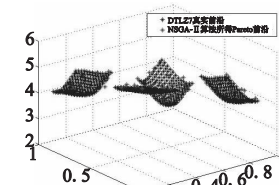


图7 NSGA-II在DTLZ7的测试结果

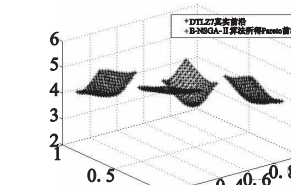


图8 E-NSGA-II在DTLZ7的测试结果

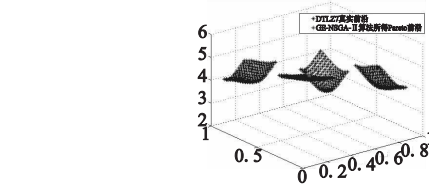


图9 GE-NSGA-II在DTLZ7的测试结果

综上所述,可以得出以下几点结论:

- 两目标函数中 NSGA-II 算法在多样性上表现最好,新算法居中,基于 E-占优的 NSGA-II 算法表现最差。
- 相比于另外两个算法,新算法在收敛性上表现比较好。
- 相对于基于 E-占优的 NSGA-II 算法,新算法在多样性和收敛性上都有很大的改善。
- 新算法在 IGD 上得到了很大的改善。
- 新算法相对于基于 E-占优的 NSGA-II 算法性能上有了

很大的改善。

f) 新算法的改进方向和策略是可取的。

4 结束语

本文在前人研究基于 E-占优的 NSGA-II 算法的基础上,采用网格技术和不均匀变异,针对算法所存在的缺陷,提出基于网格的 E-占优新型 NSGA-II 算法。该算法不仅考虑了种群的收敛性和分布性,而且采用非均匀变异来改善变异算子的性能。为了测试改进后算法的性能,通过九个测试函数,并与 NSGA-II 和基于 E-占优的 NSGA-II 算法在多样性、收敛性和 IGD 上进行比较,其结果表明,新算法相对于 E-占优的 NSGA-II 算法的分布性和收敛性有了明显的提高,进一步证实了算法的改进是可行的。在以后的工作中希望针对 E-占优所存在的缺点进行改进,以此能够有效地提高基于 E-占优算法的性能。

参考文献:

- [1] FARINA M, AMATO P. A fuzzy definition of optimality for many-criteria optimization problems [J]. IEEE Trans on Systems, Man Cybernetics, 2004, 34(3): 315-326.
- [2] DEB K, SAXENA D K. On finding Pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems, KanGAL Report 2005011 [R]. India: Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL) Institute of Technology Kanpur, 2005.
- [3] BENEDETTI A, FARINA M, GOBBI M. Evolutionary multi-objective industrial design: the case of a racing car tire-suspension system [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2006, 10(3): 230-244.
- [4] Di PIERRO F, DJORDJEVIC S, KAPELAN Z, et al. Automatic calibration of urban drainage model using a novel multi-objective GA [J]. Water Science and Technology, 2005, 52(5): 43-52.
- [5] HERNANDEZ-DIAZ A, SANTANA-QUINTERO L V, COELLO C A, et al. Pareto-adaptive ϵ -dominance [J]. Evolutionary Computation, 2007, 15(4): 493-517.
- [6] KANG Zhuo, KANG Li-shan, ZOU Xiu-fen, et al. A new evolutionary decision theory for many-objective optimization problems [C]//Proc of the 2nd International Conference on Advances in Computation and Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 1-11.
- [7] SHIBUCHI H, TSUKAMOTO N, NOJIMA Y. Evolutionary many-objective optimization: a short-review [C]//Proc of Congress on Evolutionary Computation. [S. l.]: IEEE, 2008: 2424-2431.
- [8] WANG Long, WANG Tong-guang, LUO Yuan. Improved non-dominated sorting genetic algorithm (NSGA)-II in multi-objective optimization studies of wind turbine blades [J]. Applied Mathematics and Mechanics: English Edition, 2011, 32(6): 739-748.
- [9] 梁昔明, 秦浩宇, 龙文. 一种求解约束优化问题的遗传算法 [J]. 计算机工程, 2010, 36(14): 147-149.
- [10] DEB K. Multi-objective genetic algorithms: problem difficulties and construction of test problems [J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230.
- [11] DEB K, LOTHAR T, MARCO L, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization, CH-8092 [R]. Switzerland: Computer Engineering and Networks Laboratory, 2002.
- [12] DEB K, PRATAP A, GRAWAL A S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.