一类三角形几何不等式的自动证明

陈世平[1]，刘　忠[2]

(1. 四川省商贸学校—中国民航飞行学院德阳校区，四川 德阳 618000；2. 四川建筑职业技术学院，四川 德阳 618000)

摘　要：讨论了一类只含三角函数的三角形几何不等式的自动证明问题。运用代数方法将其有理化，在不新增加根式的条件下将问题转换为一个二元多项式不等式的证明，设计的基于胞腔分解和实根分离的算法实现了二元多项式不等式的自动证明，输出的证明过程可以手工验证或借助一些数学软件进行理解。实验表明上述算法对一大批具有相当难度，特别是关于三角函数的几何不等式十分高效，并且能够解决三角形内角的任意有理倍数函数的不等式机器证明问题。

关键词：几何不等式；可读证明；有理化；实根分离；胞腔分解

中图分类号：TP3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2012)05-1732-05

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.05.035

Automated proving for class of triangle geometric inequalities

CHEN Shi-ping[1], LIU Zhong[2]

(1. *Deyang Branch of Civil Aviation Flight University of China & Sichuan Trade School*, *Deyang Sichuan* 618000, *China*; 2. *Sichuan College of Architectural Technology*, *Deyang Sichuan* 618000, *China*)

Abstract: This paper discussed the automated proving for a class of triangle geometric inequalities with only trigonometric functions. Without new radicals, it firstly transformed the original inequality to a two-variable polynomial one using algebraic method firstly. And then it implemented an algorithm based on cell decomposition and real root isolation to prove the two-variable polynomial inequalities, and the output was readable or could be understood with the help of mathematic software. Experiments show that the above methods can prove an extensive class of geometric inequalities with great difficulty automatically and are much efficient especially for the inequalities with only trigonometric functions. Furthermore, the algorithm is suit for triangle geometric inequalities with arbitrary rational coefficients of interior angles.

Key words: geometric inequalities; readable proof; rationalization; real root isolation; cell decomposition

0　引言

三角形几何不等式是自动推理领域中一个十分困难的研究课题，传统的方法是将每一个几何变量转换为等价的代数表达式，但这些代数表达式一般都带有根式，对待根式一般是利用一些消去手段（如 Grobner 基法[1]、Wu 方法[2]、结式方法[3]）寻找其边界多项式，然后再对边界多项式进行胞腔分解，对每一胞腔选择样本点，最后将样本点回带入根式检验，这类方法是完备的[1~5]。对于根式不等式的处理，徐嘉等人在杨路教授工作的基础上，提出了"去根号＋逐次差分代换"的方案，解决了形如 $u_1^{1/m}+u_2^{1/m}+\cdots+u_n^{1/m}\leqslant t^{1/m}$ 的不等式证明中的去根号问题，将原不等式等价为若干个有理不等式组，再运用杨路教授提出的逐次差分代换方法证明[6~8]。其中有一大类三角形不等式等价的代数不等式具有 $\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\leqslant\sqrt{t}$ 的形式，运用初等数学的方法将其有理化再与逐次差分代换方法结合也可实现此类不等式的自动证明[9]。该类方法虽然不是完备的，但能够证明大量具有相当难度的几何不等式。然而一般来说，处理根式常常需要较大的复杂度，机器运行需要大量的时间，并且有些几何变量直接转换为代数表达式还可能出现多重根式，上述方案更难于处理。例如最近有学者提出三角形内角的四分之一函数不等式的自动证明问题[10~13]，直接转换为代数表达式就带有多重根号，目前的不等式证明软件暂时都还没有涉及。同时目前的一些不等式证明软件对于一般的三角形不等式还难以输出易于阅读的、有几何或代数意义的证明过程。

本文把目标限制在一类只含三角函数的三角形不等式（当然几乎所有的三角形不等式都可以转换为此类不等式），探讨如何解决其机器证明及其可读证明的自动生成问题。首先运用三角公式将目标不等式转换为三角形的两个内角的正切函数的函数，且同一内角出现在不同正切函数内的系数相同（归一化），再利用变量代换将其转换有理式，这样就将问题转换为一个二元多项式不等式的证明，且在处理过程中不会产生新的根式。关于二元多项式不等式的证明利用杨路教授的胞腔分解"初等化"的思想[14]，将问题转换为一组单变量多项式的实数解的判定问题，产生的证明过程可以手工验证或借助一些数学软件理解，是不等式一定程度上的"明证"。实验表明算法对一大批具有相当难度，特别是关于只含三角函数的几何不等式（如文献[15]中第 2 章的不等式和文献[16]中第 4 章的 1.2 节中不等式）十分高效，同时能够解决三角形内角的任意有理数倍数函数不等式机器证明问题，特别地，能够证明三

收稿日期：2011-09-17；**修回日期**：2011-10-31

作者简介：陈世平(1970-)，男，四川遂宁人，讲师，博士，主要研究方向为计算机推理技术、智能教育软件(chinshiping@sina.com).

角形内角的四分之一函数不等式。

1　几何不等式的有理化

算法的基本思想是[17,18]:把目标不等式转换为三角形内角的三角函数不等式,将其中一个内角用另外两个替换,再将三角函数化为单个变元的正切函数,把一个自变量的不同系数归一为同一系数,如在一个不等式中出现 $\tan(x)$、$\tan(x/2)$、$\tan(x/4)$,则可以全部转换为 $\tan(x/4)$;然后用变量代换将目标不等式转换为有理式不等式。

1.1　三角函数不等式的有理化

若不等式只包含三角函数,则将所有三角函数转换为三角形的两个内角的正切函数,再将系数归一化。

定义 1　两个分数 s、t 的最大公约数定义为其分子的最大公约数除以其分母的最小公倍数,记为 $\gcd(s,t)$。

引理 1　设 s、t 为既约分数,且 $s>t$,则 $\gcd(s,t)=\gcd(s-t,t)$。

定理 1　设 $expr=f(\tan(m_1x),\tan(m_2x))$,$f(x)$ 为有理分式或多项式,m_1、m_2 为非负的既约分数或整数,$p=\gcd(m_1,m_2)$,则 expr 可以转换为以 $z=\tan(px)$ 为变量的有理式。

算法 1　normal_tan

输入:$f(\tan(m_1x),\tan(m_2x))$。

输出:$g(\tan(px))$,其中 $p=\gcd(m_1,m_2)$,且 $f(\tan(m_1x),\tan(m_2x))=g(\tan(px))$。

a)若 $m_1>m_2$ 且 m_1 是 m_2 的偶数倍,将 $\tan(m_1x)$ 用倍角公式分解为 $\tan(m_1x/2)$ 的函数;

b)若 $m_1>m_2$ 且 m_1 不是 m_2 的偶数倍,将 $\tan(m_1x)$ 分解为 $(\tan(m_1x-m_2x)$ 和 $\tan(m_2x)$ 的函数;

c)若 $m_2>m_1$ 且 m_2 是 m_1 的偶数倍,将 $\tan(m_2x)$ 用倍角公式分解为 $\tan(m_2x/2)$ 的函数;

d)若 $m_2>m_1$ 且 m_2 不是 m_1 的偶数倍,将 $\tan(m_2x)$ 分解为 $(\tan(m_2x-m_1x)$ 和 $\tan(m_1x)$ 的函数。

e)若关于 x 的系数已经一致则算法结束,否则递归调用算法 normal_tan。

如文献[15]中的 2.18 不等式 $\cos(A)+j\cos(B)+j\cos(C)\leqslant\frac{j^2}{2}+1$($j$ 为任意实数)可转换为有理不等式

$$0\leqslant\frac{1}{2}\frac{j^2+j^2v_1^2+j^2v_2^2+j^2v_2^2v_1^2+4+4v_2^2v_1^2-8v_2v_1-4j+4jv_2^2v_1^2}{(1+v_2^2)(1+v_1^2)}$$

其中:$v_1=\tan(\frac{B}{2})$,$v_2=\tan(\frac{C}{2})$,等价于多项式不等式 $0\leqslant j^2+j^2v_1^2+j^2v_2^2+j^2v_2^2v_1^2+4+4v_2^2v_1^2-8v_2v_1-4j+4jv_2^2v_1^2$。

在不等式的有理化过程中不会产生难以处理的根式。

在证明过程中往往还需要使用

$$\tan(\frac{A}{4})\leqslant1,\tan(\frac{B}{4})\leqslant1,\frac{\tan(\frac{A}{4})+\tan(\frac{B}{4})}{1-\tan(\frac{A}{4})\tan(\frac{B}{4})}\leqslant1$$

$$\tan(\frac{A}{8})\leqslant\sqrt{2}-1,\tan(\frac{B}{8})\leqslant\sqrt{2}-1,\frac{\tan(\frac{A}{8})+\tan(\frac{B}{8})}{1-\tan(\frac{A}{8})\tan(\frac{B}{8})}\leqslant\sqrt{2}-1$$

等显然成立的不等式条件。

1.2　其他几何变量的处理

若不等式还有三角函数之外的几何变量,则可通过如下"翻译表"(可扩充)转换:

内切圆半径　$r=\dfrac{s}{\cot(\frac{A}{2})+\cot(\frac{B}{2})+\cot(\frac{C}{2})}$

外接圆半径　$R=\dfrac{s}{\sin(A)+\sin(B)+\sin(C)}$

半周长　$s=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}$

三角形面积　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin(C)$

旁切圆半径(ra,rb,rc)　$ra=\dfrac{c\sin(\frac{A}{2})}{\cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}$

高(ha,hb,hc)　$ha=\dfrac{\sin(B)\sin(C)}{\sin(A)}$

内角平分线(wa,wb,wc)　$wa=\dfrac{\sin(C)\ \sin(B)}{\sin(A)\ \sin(B+\frac{A}{2})}$

三边长(不失一般性令 $a=1$)　$b=\dfrac{\sin(B)}{\sin(A)},c=\dfrac{\sin(C)}{\sin(A)}$

2　二元多项式不等式的证明

2.1　带根号系数多项式的实根分离

本章下一节的算法中需要判断一个多项式是否有零点,并在每两个零点之间求一个非零点,Maple 提供的 fslove 能够得到数值解,但误差可能导致结果不正确。另一个函数 realroot 可以获得多项式的所有实根所在区间,并且端点都是有理数,但 realroot 只能求解有理数系数的多项式。

在证明几何不等式过程中经常会遇到带根号的系数多项式,为解决这一问题本文设计了一个基于 DISCOVER[5] 的多项式实根分离算法,可求解带根号系数的多项式。

首先引入一个概念,如下系统称做半代数系统,若它具有形式:

$$p_1(U,X)=0,\cdots,p_r(U,X)=0;$$
$$q_1(U,X)\geqslant0,\cdots,q_k(U,X)\geqslant0;$$
$$g_1(U,X)>0,\cdots,g_k(U,X)>0;$$
$$h_1(U,X)\neq0,\cdots,h_m(U,X)\neq0;$$

其中:p_i、q_i、g_i、h_i 均为多项式,$U=(u_1,\cdots,u_d)$ 是参数且取值于实数,$X=(x_1,\cdots,x_n)$ 是未知数。

DISCOVER 通过如下形式来调用 realzeros 可以求得一个半代数系统的所有实解隔离区间:realzeros$([p_1,\cdots,p_r],[q_1,\cdots,q_k],[g_1,\cdots,g_k],[h_1,\cdots,h_m],[x_1,\cdots,x_n],w)$;其中 w 是区间宽度。

例如在证明不等式 $\sin(A)+\sin(B)+\sin(C)<\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 的过程中需要求下面多项式的零点:

$$f:=y^2(-912y^3\sqrt{3}-2592\sqrt{3}y^5+3483y^4-1296\sqrt{3}y^7+297y^2+3915y^6+729y^8)\left(1+2y^2+y^4-\frac{8}{9}y^3\sqrt{3}\right)$$

本文采用如下办法:令

$$f1:=y^2(-912vy^3-2592vy^5+3483y^4-1296vy^7+297y^2+3815y^6+729y^8)\left(1+2y^2+y^4-\frac{8}{9}vy-\frac{8}{9}vy^3\right),f2:=v^2-3$$

调用 DISCOVER 的函数 realzeros$([f1,f2],[y],[v],[\,],[y,v])$ 得到 $[[[0,0],[\frac{3}{2},\frac{7}{4}]],[[\frac{591}{1024},\frac{37}{64}]],[\frac{13}{8},\frac{7}{4}]]]$($y$ 非负,$v>0$),即 f 有两个非负零点,一个是 0,一个在区间 $[\frac{591}{1027},\frac{37}{64}]$ 内。

本文实现了上述算法 myrealroots，调用 myrealroots(f,y) 可输出关于 y 的单变量多项式 f 的所有非负零点所在区间（其中重根只计算一次）。

2.2 基于胞腔分解的可读证明方案

本节的算法是根据文献[5]中的一个引理和杨路教授的关于胞腔分解初等化的思想[14]设计而成。

引理 2[5]　设 $f(a,x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ 是一个实参数一元多项式，其中 a 表示 $a_m,a_{m-1},\cdots,a_0$ 是实参数，计 $R(a)=\mathrm{resulant}(f,\mathrm{diff}(f,x),x)$，$c_1$、$c_2$ 是参数空间 R^{m+1} 中 $R(a)\neq 0$ 的同一连通分支中的两个点，那么 $f(c_1,x)$ 与 $f(c_2,x)$ 有相同数目的实数解（其中 resultant(G,H,x) 为多项式 F 和 G 关于 x 的结式）。

算法 2　不等式自动证明 prove_poly

输入：常系数二元多项式 $f(x,y)$，其中 $x\geq 0, y\geq 0$。

输出：$f(x,y)\geq 0$ 的证明过程或不等式不成立的反例。

a) 去掉 $f(x,y)$ 的平方因子等明显非负因子；

b) 若 f 显然成立或不成立，则输出结果算法结束；

c) 计算 res = resulant(f, diff(f,x), x) * subs($x=0,f$)；

d) 计算 roots = myrealroots(res = 0, y) = = [[r_{11},r_{12}], [r_{21},r_{22}], …, [r_{n1},r_{n2}]]；

e) 计算隔离集 sep = $\{s_1,s_2,\cdots,s_{n+1}\}$，其中 $s_1=r_{11}/2$（若 $s_1=0$ 则去掉），…，$r_{i2}<s_i<r_{(i+1)1}$，…，$r_{n2}<s_{n+1}$；

f) for i from 1 to nops(sep) do

　g = subs($y=s_i$, $f(x,y)$)；

若 $g=0$ 有正实数解 x_1，则在 x_1 的某邻域内必存在有理数 x_0 使得 $f(x_0,s_i)<0$，即得到原不等式的一个反例，算法结束；

若 $g=0$ 无正实数解，则在区间 $[r_i,r_{i+1}]$ 内的任意实数 y，关于 x 的单变量方程 $f(x,y)=0$ 均无非负实数解（其中 r_i 是 res 的第 i 个根，且在区间 $[r_{i1},r_{i2}]$ 内）；

end do;

g) 即对任意非负 x，当 y 不等于 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$ 这有限个值时，$f(x,y)>0$，可以断定 $f(x,y)\geq 0$。

h) 输出上面的过程。

在上述算法中，因变量 x、y 非负，本应该作代换 $g(u,v)=f(u^2,v^2)$，但因为 $\mathrm{discrim}(g(u),u)=\mathrm{resultant}(g,\mathrm{diff}(g,u),u)=(\mathrm{discrim}(f(x),x))^2 * f(0,y)$，且若 $y_0={v_0}^2$，关于 u 的单变量多项式 $g(u,v_0)$ 无实数解等价于关于 x 的单变量多项式 $f(x,y_0)$ 无非负实数解，所以算法 2 是正确的。

下面以三角形的 1/4 角函数不等式为例来描述算法的运行过程：

$$\frac{1}{8}\sqrt{2}\left(4+\frac{(3\sqrt{3}-3)(\sin(A)+\sin(B)+\sin(C))}{\cot(\frac{A}{2})+\cot(\frac{B}{2})+\cot(\frac{C}{2})}\right)\leqslant \cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4})$$

a) 不等式的有理化，算法 1 将原不等式的证明转换为一个二元多项式的非负性证明。

$$\begin{aligned}f:=\;&32-672\sqrt{3}y^3x^3-384\sqrt{3}y^4x^3-192\sqrt{3}yx-480\sqrt{3}y^4x-12\sqrt{3}y^6x^3-\\&276\sqrt{3}y^5x^2-576\sqrt{3}y^2x-192\sqrt{3}yx^3-36\sqrt{3}y^6x^2-168\sqrt{3}y^5x-\\&1152\sqrt{3}y^2x^2-1392\sqrt{3}y^3x^2-384\sqrt{3}yx^2-720\sqrt{3}y^3x-864\sqrt{3}y^4x^2-\\&576\sqrt{3}y^2x^3-108\sqrt{3}y^5x^3-24\sqrt{3}y^6x+128x+96y+592yx+192x^2+\\&144y^2+y^6x^4+y^7x^3+784y^4x+128y^2x^4+2168y^3x^2+96y^3x^4+622y^4x^3+\\&42y^4x^4+1176y^2x+46y^6x+25y^6x^3+182y^5x^3+10y^5x^4+2y^7x^2+416y^5x^2+\\&62y^6x^2+2y^7x+276y^5x+592yx^3+96yx^4+1256y^3x+1284y^4x^2+24y^5+\\&4y^6+72y^4+128x^3+1144y^2x^3+992yx^2+1140y^3x^3+128y^3+32x^4+2048y^2x^2\end{aligned}$$

b) res = resulant(f, diff(f,x), x) * subs($x=0$, f)。

c) 调用 myrealroots(res, y) 得到关于 y 的单变量多项式 res 实根隔离区间 $[[0,0],[\frac{5}{2},\frac{11}{4}]]$。

d) 计算隔离集为 $\{\frac{5}{4},\frac{15}{4}\}$，并分别代替原多项式 $f(x,y)$ 的 y 后得到两个单变量多项式：

$$\begin{aligned}f1:=\;&14602768+11081668x^4+(-61691760\sqrt{3}+115608337)x^3+\\&(-132509520\sqrt{3}+221457938)x^2+(132710162-70817760\sqrt{3})x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f2:=\;&857322128+422000228x^4+(-3828224880\sqrt{3}+6823509107)x^3+\\&(14790259158-9284711760\sqrt{3})x^2+(-5456486880\sqrt{3}+9725757782)x\end{aligned}$$

e) 调用 myrealroots 证明上述两个多项式均无非负实根，原不等式得证。

本文用 Maple 实现了上述算法 triangle_prove，如为证明第 3 章的例(28)，只需在 Maple 中输入：

```
print_prove(triangle_prove(cos(1/4 * Pi + 1/4 * A) * cos(1/4 * Pi
+ 1/4 * B) * cos(1/4 * Pi + 1/4 * C) < 1/9 * 3^(1/2) * sin(1/4 * Pi
+ 1/4 * A) * sin(1/4 * Pi + 1/4 * B) * sin(1/4 * Pi + 1/4 * C)));
```

得到如下证明过程。

原多项式等价于有理不等式：

$$\begin{aligned}0\leqslant\;&(40\sqrt{3}y^2x+\sqrt{3}y^4x^2+40\sqrt{3}yx+20\sqrt{3}yx^2+18\sqrt{3}y^2x^2+18\sqrt{3}y^3x+\\&7\sqrt{3}y^3x^2+3\sqrt{3}y^4x-18y^3-36x^2y^2-72xy^2-36x^2y-72xy-36xy^3-\\&9x^2y^3+8\sqrt{3}-36y^2+2\sqrt{3}y^4+20\sqrt{3}y^2+20\sqrt{3}y+16\sqrt{3}x-9xy^4+\\&8\sqrt{3}x^2+10\sqrt{3}y^2-36y)/(18(2+2y+y^2)(4+8x+4x^2+4y+8xy+\\&4x^2y+2y^2+2xy^2+x^2y^2))\end{aligned}$$

其分母显然大于 0，下证分子非负：

计算多项式和其对 x 的偏导数关于 x 的结式为

$$\begin{aligned}&(2+y)^2(-8576y^5+4116\sqrt{3}y^7+6048\sqrt{3}y^6+18\sqrt{3}y^{10}-2636y^8-\\&28y^{10}-474y^9-576y^3-3712y^4-7060y^7-10344y^6-128y^2+\\&2112\sqrt{3}y^4+576\sqrt{3}y^3+4800\sqrt{3}y^5+270\sqrt{3}y^9+1500\sqrt{3}y^8)\\&(8+10y^3+2y^4+20y^2-12\sqrt{3}y^2-12\sqrt{3}y-6\sqrt{3}y^3+20y)\end{aligned}$$

有三个非负零点，分别在区间 $[[0,0],[\frac{5}{16},\frac{3}{8}],[2,4]]$。

计算出隔离集为 $\{5,\frac{5}{32},\frac{19}{16}\}$，分别替换原多项式中的变量 y 得到三个单变量多项式，再将所有系数都变成整数。

$$4051611x^2-765760\sqrt{3}-1532145\sqrt{3}x-761760\sqrt{3}x^2+4072886+8142897x$$

Myrealroots 可表明此多项式无非负零点；

$$1762390+1547595x^2-900448\sqrt{3}-1931217\sqrt{3}x-790704\sqrt{3}x^2+3408177x$$

Myrealroots 可表明此多项式无非负零点；

$$3108+2058x^2-1110\sqrt{3}-4095\sqrt{3}x-735\sqrt{3}x^2+5341x$$

Myrealroots 可表明此多项式无非负零点。

所以多项式是非负的，原三角形不等式成立。算法运行不需要任何人工干预，输出的证明过程可以进行“手工验算”，复杂的情形可借助 Maple 的处理多项式的函数、结式运算 resultant 以及本文的实根分离函数 myrealroots 等数学工具进行理解和验算，是不等式一定程度上的“明证”。

3　应用实例

下面的例子是部分通过验证的不等式，其中 A、B、C 表示一个三角形的内角，R 表示外接圆半径，r 表示内切圆半径。

(1) $\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2}) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(2) $\sin(\frac{A}{2}) + \sin(\frac{B}{2}) + \sin(\frac{C}{2}) < \frac{3}{2}$

(3) $\sin(\frac{B}{2})\sin(\frac{C}{2}) + \sin(\frac{C}{2})\sin(\frac{A}{2}) + \sin(\frac{A}{2})\sin(\frac{B}{2}) < \frac{3}{4}$

(4) $\sin(A)^2 + \sin(B)^2 + \sin(C)^2 < \frac{9}{4}$

(5) $\cos(\frac{A}{2})^2 + \cos(\frac{B}{2})^2 + \cos(\frac{C}{2})^2 < \frac{9}{4}$

(6) $\frac{3}{4} < \frac{\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})}{\sin(\frac{C}{2})} + \frac{\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} + \frac{\cos(\frac{C}{2})\cos(\frac{A}{2})}{\sin(\frac{B}{2})}$

(7) $\cos(A)^2 + \cos(B)^2 + \cos(C)^2 < 3$

(8) $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) < \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(9) $\sin(\frac{A}{2})^2 + \sin(\frac{B}{2})^2 + \sin(\frac{C}{2})^2 < 1$

(10) $\cos(\frac{A}{2}) + \cos(\frac{B}{2}) + \cos(\frac{C}{2}) < \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(11) $\cos(A) + \sqrt{2}\cos(B) + \sqrt{2}\cos(C) < 2$

(12) $\cos(A) + 3\cos(B) + 3\cos(C) < \frac{11}{2}$

(13) $\frac{9\sqrt{3}}{2} < (\sin(\frac{A}{2}) + \sin(\frac{B}{2}) + \sin(\frac{C}{2}))(\cos(\frac{A}{2}) + \cot(\frac{B}{2}) + \cot(\frac{C}{2}))$

(14) $\left(\tan(\frac{A}{2})^2 + \tan(\frac{B}{2})^2 + \tan(\frac{C}{2})^2\right)\cos(A)\cos(B)\cos(C) < \frac{1}{8}$

(15) $\cos(\frac{A}{2})^3 + \cos(\frac{B}{2})^3 + \cos(\frac{C}{2})^3 < 2$

(16) $\cos(B)\cos(C) + \cos(C)\cos(A) + \cos(A)\cos(B) < \frac{3}{4}$

(17) $\cos(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}) + \cos(-\frac{C}{2} + \frac{A}{2}) + \cos(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) < \frac{1}{3}\sqrt{3}(\cos(\frac{A}{2}) + \cos(\frac{B}{2}) + \cos(\frac{C}{2}) + \sin(A) + \sin(B) + \sin(C))$

(18) $\frac{\sin(\frac{A}{4}) + \sin(\frac{B}{4}) + \sin(\frac{C}{4})}{\cos(\frac{A}{4}) + \cos(\frac{B}{4}) + \cos(\frac{C}{4})} < \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}$

(19) $\sqrt{2}(\cos(\frac{A}{4}) + \sin(\frac{A}{4})) < \cos(\frac{B}{4}) + \cos(\frac{C}{4}) + \sin(\frac{B}{4}) + \sin(\frac{C}{4})$

(20) $\frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{1}{7} < \frac{\sin(\frac{A}{4}) + \sin(\frac{B}{4}) + \sin(\frac{C}{4})}{\cos(\frac{A}{4}) + \cos(\frac{B}{4}) + \cos(\frac{C}{4})}$

(21) $\frac{1}{8}\sqrt{2}\left(4 + \frac{(3\sqrt{3}-3)(\sin(A) + \sin(B) + \sin(C))}{\cot(\frac{A}{2}) + \cot(\frac{B}{2}) + \cot(\frac{C}{2})}\right) < \cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4})$

(22) $\frac{\sqrt{2}(4R + 3\sqrt{3}r - 3r)}{8R} < \cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4})$

(23) $\cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4}) < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(3\sqrt{6} + \sqrt{2} - 8)r}{8R}$

(24) $\cos(\frac{A}{4})^2 + \cos(\frac{B}{4})^2 + \cos(\frac{C}{4})^2 < \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(25) $\frac{5}{2} < \sin(\frac{A}{4})^4 + \cos(\frac{A}{4})^4 + \sin(\frac{B}{4})^4 + \cos(\frac{B}{4})^4 + \sin(\frac{C}{4})^4 + \cos(\frac{C}{4})^4$

(26) $\sin(\frac{A}{4})^4 + \cos(\frac{A}{4})^4 + \sin(\frac{B}{4})^4 + \cos(\frac{B}{4})^4 + \sin(\frac{C}{4})^4 + \cos(\frac{C}{4})^4 < \frac{21}{8}$

(27) $\frac{1}{9}\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})\sqrt{3} < \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{4})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{4})$

(28) $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{4})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{4}) < \frac{1}{9}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4})\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{4})\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{4})\sqrt{3}$

(29) $(\sin(\frac{A}{4})\sin(\frac{B}{4})\sin(\frac{C}{4}) + \cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4}))^2 < 3 + \frac{3r}{4R}$

(30) $\sin(\frac{A}{4})\sin(\frac{B}{4})\sin(\frac{C}{4}) + \cos(\frac{A}{4})\cos(\frac{B}{4})\cos(\frac{C}{4}) < \frac{3\sqrt{6}}{8}$

这些例子主要来自文献[10～13,15,16]。表 1 列出了本文算法和软件 BOTTEMA 在同一计算机上对 30 个例子的测试时间(时间 1 是本文算法的测试时间,时间 2 是 BOTTEMA 测试时间,“-”表示算法不能判定不等式的真伪,测试时间的单位为 s)。

表 1　30 个例子的测试时间

例子	隔离元素个数	测试时间 1	测试时间 2	例子	隔离元素个数	测试时间 1	测试时间 2
(1)	2	0.047	0.031	(2)	2	0.031	0
(3)	2	0.078	0.016	(4)	2	0.016	0.017
(5)	2	0	0.015	(6)	0	0.125	0
(7)	0	0	0.047	(8)	2	0.078	0.079
(9)	0	0	0	(10)	2	0.012 5	0.016
(11)	2	0.047	0.062	(12)	1	0.046	0.047
(13)	5	2.672	1.906	(14)	6	0.781	0.062
(15)	3	0.376	0.031	(16)	3	0.047	0.047
(17)	4	0.688	5.125	(18)	0	0.438	-
(19)	0	0.015	-	(20)	0	0.125	-
(21)	2	13.875	-	(22)	2	13.219	-
(23)	0	18.703	-	(24)	2	0.063	-
(25)	0	0	-	(26)	2	0.063	-
(27)	2	0.359	-	(28)	3	0.203	-
(29)	0	24.625	-	(30)	0	0.282	-

算法没有区分严格不等式与非严格不等式,隔离集元素个数等于 0 表示二元多项式去掉平方因子展开后所有系数均大于 0,即不等式显然成立。

4　结束语

本文的目的是解决只含三角函数的一类三角形几何不等式的机器证明及其可读证明的自动生成问题。算法首先以三角公式为基础,将几何不等式转换为等价的二元多项式不等式,转换过程不产生新的根式,不需要处理更多的根号问题。证明多项式不等式的方案是基于初等化的胞腔分解的代数方法,能够输出可以理解的证明过程,该方法理论上是完备的,但与常规的手工证明有较大的差别,出现的高次多项式处理结果难以手工演算,其输出结果的可读性降低,往往只有借助数学

软件才能验证和理解。虽然如此,算法对一大批具有相当难度特别是只含三角函数的几何不等式十分高效,同时能够解决最近一些学者提出的三角形内角的四分之一函数不等式机器证明问题,事实上算法可以解决三角形任何有理数倍数内角的函数不等式自动证明问题。

实验表明,若不等式只含三角函数,本文算法的效率与 BOTTEMA 相近,但若还包含其他几何变量,虽然也可转换为三角函数,算法也可证明,但有的不等式通过算法 1 得到的多项式次数较高,算法 2 效率不太令人满意,因此本文的方法还不能与 BOTTEMA 相提并论。

参考文献:

[1] BUCHBERGER B, COLLINS G E, KUTZLER B. Algebraic method for geometric reasoning[J]. Annual Review of Computer Science, 1988, 3(1):85-119.

[2] WU W T. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometies[J]. Journal of Automated Reasoning, 1984, 2(3):207-235.

[3] YANG Lu, ZHANG Ju. A practical program of automated proving for a class of geometric inequalities[C]//Proc of the 3rd International Workshop on Automated Deduction in Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2001:41-57.

[4] 杨路,夏时洪. 一类构造性几何不等式的机器证明[J]. 计算机学报,2003,26(7):769-778.

[5] 杨路,夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现[M]. 北京:科学出版社,2008.

[6] 杨路. 差分代换与不等式机器证明[J]. 广州大学学报:自然科学版,2006,5(2):1-7.

[7] 杨路. 关于一类多元根式不等式的证明[EB/OL]. http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp? boardID=4&ID=12&page=1.

[8] 徐嘉,姚勇. 一类根式不等式的有理化算法与机器证明[J]. 计算机学报,2008,31(2):24-31.

[9] 陈世平. 由初等数学实现三角形几何不等式的自动证明[M]//中国初等数学研究. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011:24-28.

[10] 刘保乾. 中国不等式论坛[EB/OL]. http://www.irgoc.org/viewtopic.php? f=26&t=855&sid=4ce7d8f57946f7f5c5d9f99919ef98bf.

[11] 刘保乾. 中国不等式论坛[EB/OL]. http://www.irgoc.org/viewtopic.php? f=26&t=854&sid=2ad987a9f97a100d62b2bd81402e3057.

[12] AoPS. Art of problem solving[EB/OL]. http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php? f=52&t=372270&p=2053446 JHJp2053446.

[13] 刘保乾. 三角形不等式判定程序 agl2009 的改进及应用[J]. 佛山科学技术学院学报:自然科学版,2011,29(1):24-32.

[14] 杨路. 任何三元齐次形式的非负性总可以化为若干单变量多项式的非负性判定[EB/OL]. http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp? boardID=12&ID=4591.

[15] BOTTEMA O. Geometric inequalities[M]. Groningen, Nether-land: Wolters-Noordhoff Publishing, 1969.

[16] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南:山东科学技术出版社,2010.

[17] 陈世平,张景中. 初等不等式的可读证明的自动生成[J]. 四川大学学报:工程科学版,2003,35(4):86-93

[18] 陈世平,张景中. 三角不等式的自动证明[J]. 四川大学学报:自然科学版,2003,40(4):686-690.

[19] 刘保乾. BOTTEMA,我们看见了什么[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2003.

[20] 杨路,张景中,侯晓荣,等. 非线性代数方程组与定理机器证明[M]. 上海:上海科技教育出版社,1996.