

零阶连续曲线包络的计算 *

王 宁

(中国民航大学 机场学院, 天津 300300)

摘 要: 包络理论中通常采用速度与法矢正交的条件来判断曲线族上的点是否为特征点,它要求曲线至少 C^1 连续,而对于 C^0 连续的曲线则无能为力。在此背景下,提出了扩展的包络条件来适应 C^0 连续的曲线包络的计算,并证明了在 C^1 连续条件下扩展包络条件是传统包络条件的充分非必要条件;在此基础上,提出了一种新的任意非凸平面多边形变形包络的计算方法。最后,通过实例验证了理论和方法的正确性。

关键词: 包络; 变形包络; 干涉

中图分类号: TP391

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)03-1185-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.03.107

Calculation of envelope of curves with C^0 continuity

WANG Ning

(Airport College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: The traditional envelope condition that the velocity is perpendicular to the normal is usually used to determine grazing points on a family of curves. It only can be used for curves that have C^1 continuity at least. If they have C^0 continuity, this condition is useless. In this situation, this paper proposed an extended envelope condition for the curves with C^0 continuity. Further, it proved that the extended envelope condition was a sufficient and not necessary condition of traditional envelope condition. Based on this conclusion, it presented a new calculation of envelope for deformed non-convex polygon with any shape. Finally, it verified the correctness of this method by using cases.

Key words: envelope; deformed envelope; interference

0 引言

任一曲线/曲面沿着二维或三维空间运动(平移或回转)会形成一族曲线/曲面族,它们所形成的边界被称为包络。它在工业界的应用范围非常广泛,如可以用于加工路径规划、零件装配过程中的干涉检查、基于包络的造型(包括刚体运动包络和变形运动包络)、传动系统的设计等^[1~6]。但是,由于曲线/曲面的种类繁多,运动的形式也多种多样,包络的计算非常复杂。因而,一直是工程领域一个重要研究内容之一。

近些年来,计算机技术的飞速发展使包络计算的研究提供了更为广阔的空间。为了适应不同场合的要求出现了许多专门算法,大致可分为三类:a)纯数值计算^[7~10],典型的方法是利用运动物体面族与一组直线的交点来逼近包络面;b)利用包络理论数值方法,典型的方法是(sweep-envelope differential equation, SEDE)方法,它要用到龙哥库塔法来求解微分方程^[11,12];c)利用包络理论的解析方法^[13~15]。其中:方法 a)的适应范围最广,但是计算量也最大,要想达到理想的精度需要大量的求交运算;方法 b)和 c)的基础都是利用经典的包络理论。在利用经典的包络理论计算包络面的过程中,往往要利用法线和速度正交的条件来计算特征点。这个条件最早是由前苏联的 Shishkow^[16]提出的,随后被广泛地推广应用。为区别起见,在本文中称之为传统包络条件。不难理解,使用此条件的前提是法矢必须存在,因而曲线或曲面至少要求是 C^1 连续。

这就导致了 C^0 连续条件下的特征点计算缺少必要的理论依据。虽然有些学者针对这类点给出了一些方法,但是并没有提出明确的理论依据^[11,17]。在此背景下,本文将针对 C^0 连续的点提出扩展的包络条件来判断其是否为特征点,另外还将证明它与传统包络条件之间的关系。最后,把提出的理论应用到了任意非凸平面多边形变形包络的计算中,证明了其正确性和有效性。

1 平面曲线族的扩展包络条件

1.1 扩展包络条件的定义

如图 1 所示,设一平面曲线方程为 $r=r(x)$,且至少 C^0 连续。让此曲线在二维空间 R^2 中运动(平移和旋转)形成一个曲线族 $R=R(x,t)$, t 表示时间参数。任意给定一个时刻 $t=t_1$, p 是此时刻下曲线上的一点,表示为 $R_p=R(x_p,t_1)$ 。 p 的速度表示为 $v_p=dR(x_p,t_1)/dt$ 。过 p 点沿着 v_p 方向可以唯一确定一条直线,被称为速度线。此外,在 p 点邻域内,平面曲线把二维空间 R^2 分成 A 和 B 两部分。平面曲线族的扩展包络条件可以被概括为: p 点在此时刻下成为特征点的必要条件,即在点 p 附近总是存在一个邻域使得速度线总是位于平面曲线的一侧或者在平面曲线上。

图 2 给出了 C^0 连续和更高阶连续时判断特征点的例子。当平面曲线在 p 点处至少 C^1 连续时,这个扩展包络条件是传统的包络条件 $v_p \cdot n=0$ 的充分非必要条件。此处的 n 表示平

面曲线在 p 点处的法矢。接下来将对此结论进行证明。

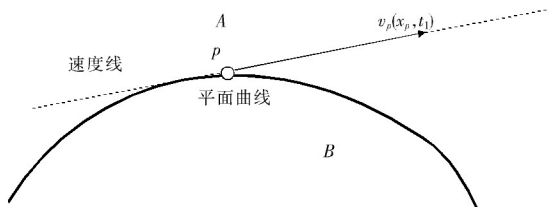


图 1 平面族的扩展包络条件

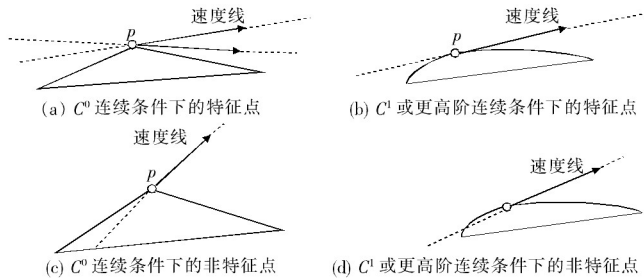


图 2 采用扩展包络条件判断特征点

1.2 扩展包络条件与传统包络条件关系的证明

不失一般性,可以把速度线表示为

$$r_{\text{velocity}} = R_p + \frac{v_p}{|v_p|}l \quad (1)$$

其中: l 表示速度线上任意一点到 p 的有向距离。在 p 点处,分别对速度线和平面曲线 $r=r(x)$ 进行泰勒展开可得

$$r_{v-n} = R_p + \Delta r_{\text{velocity}} = R_p + \frac{v_p}{|v_p|}dl \quad (2)$$

$$r_{p-n} = R_p + \Delta R = R_p + dR + o(\Delta R) \quad (3)$$

其中: r_{v-n} 表示速度线在 p 点的邻域; r_{p-n} 表示平面曲线在 p 的邻域; $\Delta r_{\text{velocity}}$ 表示速度线在 p 点邻域内的点相对于 p 点的无穷小增量; ΔR 表示速度线在 p 点邻域内的点相对于 p 点的无穷小增量; dR 表示 R 在 p 处的全微分; $o(\Delta R)$ 表示二阶及二阶以上的无穷小量。

把式(2)和(3)相减并向法矢 n 投影可得

$$\begin{aligned} \Phi &= (r_{p-n} - r_{v-n}) \cdot n = \\ &= (dR + o(\Delta R) + \frac{v_p}{|v_p|}dl) \cdot n = \\ &= (o(\Delta R) + \frac{v_p}{|v_p|}dl) \cdot n \end{aligned} \quad (4)$$

不难理解,如果点 p 满足扩展包络条件的话, Φ 必须满足 $\Phi \leq 0$ 或 $\Phi \geq 0$ 。不失一般性,假定 $\Phi \geq 0$,方程(4)可以化为 $o(\Delta R) \cdot n \geq -(v_p/|v_p|) \cdot n dl$ 。注意到 dl 是有向距离,在邻域内有正也有负数,而 $o(\Delta R) \cdot n$ 是常数。因此,只有当 $v_p \cdot n = 0$ 时, $\Phi \geq 0$ 才成立。至此,充分性得到证明。

以上证明了扩展包络条件是传统包络条件的充分条件,反之却不成立。这个结论可以通过图3所示的例子很容易看出来。图中,点 p 是平面曲线的拐点,假定点 p 的速度与其法矢正交,即满足传统包络条件 $v_p \cdot n = 0$ 。若采用扩展包络条件来判断, p 点不是特征点。从直观上来看,显然扩展包络条件的判断是对的。因此,扩展包络条件是传统包络条件的充分非必要条件。

另外,需要指出的是,对于一族变形曲线的包络,扩展包络条件也是适用的。此时,变形的曲线族表示为 $R_1 = R_1(x(t), t)$,速度表示为 $v_p = dR_1/dt$ 。与刚体运动不同的是,点 p 的速

度不仅仅有平移和旋转运动引起的速度,还有曲线变形引起的速度。在后面将会进一步阐述。

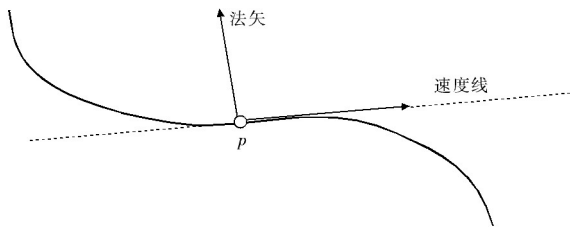


图 3 扩展包络条件与传统包络条件的区别

2 计算任意封闭平面多边形包络

本章将讨论扩展包络条件在封闭多边形包络计算中的应用。多边形可以是任意多边形,可能是凸的,也可能是凹的。多边形是由一系列直线段组合而成的,在直线段上是 C^1 连续,在端点处是 C^0 连续。直线段上的特征点采用传统包络条件可以很容易判断。判断端点是否为特征点,则需要采用扩展的包络条件。计算的基本步骤如下:

- 输入多边形及其运动的路径;
- 计算每个多边形顶点的速度;
- 用扩展包络条件判断是否为特征点;
- 用传统包络条件计算边上的特征点;
- 把计算得到的特征点进行修剪得到最终边界。

从上述可知,无论是传统包络条件还是扩展的包络条件,都要知道多边形上点的速度。为了方便,本文采用活动标架方法来进行计算。如图4所示,把多边形固定在活动标架 $[\rho(t); e_1(t), e_2(t)]$ 上随着它一起运动,则一族平面多边形可以表示为

$$R = \rho(t) + r(x) = \rho(t) + Xe_1(t) + Ye_2(t) \quad (5)$$

式(5)对时间 t 求导,可得速度为

$$v_p = \frac{dR}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} + X \frac{de_1(t)}{dt} + Y \frac{de_2(t)}{dt} \quad (6)$$

如果在运动的过程中多边形产生变形,则线族方程描述为

$$R = \rho(t) + r(x) = \rho(t) + X(t)e_1(t) + Y(t)e_2(t) \quad (7)$$

点的速度为

$$\begin{cases} v_p = v_m + v_d \\ v_m = \frac{d\rho(t)}{dt} + X(t) \frac{de_1(t)}{dt} + Y(t) \frac{de_2(t)}{dt} \\ v_d = \frac{dX(t)}{dt}e_1(t) + \frac{dY(t)}{dt}e_2(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中: v_m 表示由标架运动引起的速度, v_d 表示由变形运动引起的速度。

对于刚体和线性变形运动,可以利用上式把各端点速度计算出来。然后,直线段上任意一点的速度可以由两段速度的线性插值来表示

$$v_p = (1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2, \lambda \in [0, 1] \quad (9)$$

得到速度以后,就可以判断多边形上的点是否为特征点。对直线段上的点采用传统包络条件

$$v_p \cdot n = ((1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2) \cdot n = 0 \quad (10)$$

由上式解出 λ ,若满足 $\lambda \in [0, 1]$,则说明其上有特征点,并可以由下式求出:

$$p = (1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2 \quad (11)$$

其中: p_1, p_2 表示直线段的两个端点。

若判断端点是否为特征点,则需要采用扩展包络条件。如图5所示,在端点处建立局部坐标系,若速度线穿过相邻两边所围成的区域,则不是特征点;反之,则为特征点。显然,这个判断非常简单,只要进行简单的角度范围判断。

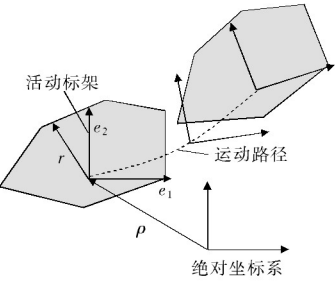


图4 采用活动标架方法
计算运动速度

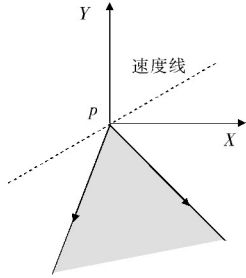


图5 判断端点是否为特征点

3 计算实例

本章通过计算一个线性变形的五角星线族包络来验证上述方法的有效性。初始五角星各个顶点数据为: (0, 50), (11.14, 15.45), (47.46, 15.45), (18.16, -5.9), (29.39, -40.45), (0, -19.1), (-29.39, -40.45), (-18.16, -5.9), (-47.46, 15.45), (-11.14, 15.45)。顺次连接上述点成封闭形状。

设初始的标架与绝对坐标系重合。活动标架原点轨迹为

$$\rho(t) = [130t, 130t^2], t \in [0, 1]$$

旋转矩阵为

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}, t \in [0, 1]$$

变形五角星线族上的任意一点表示为

$$p' = \rho(t) + (1+t)pA(t)$$

式中第二项引入了(1+t),表示线性变形的比例。图6(a)描述了在此条件下的线族图形,(b)是采用2章的方法计算出来的特征点。由于在运动的过程中会发生局部和全局干涉,这些点往往不是所有的点都在包络边界上。因此,还需对这些点进行修剪运算。需要指出的是,第一个和最后一个五角星也被离散成点参与了修剪运算。这是因为它们上面的一部分点总是在最终的边界上。经过计算,最终得到图6(c)的结果。

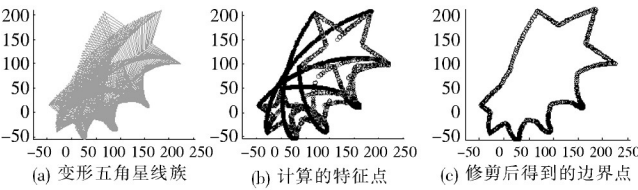


图6 变形五角星包络的计算

4 结束语

为了能够计算 C^0 连续的曲线族的包络,本文在传统的包络条件基础上提出了扩展包络条件,并证明了在 C^1 连续条件下,扩展包络条件是传统包络条件的充分非必要条件。这是对传统包络理论的补充,对包络本质的更进一步的理解。在此基础上,把任意平面多边形族特征点的计算分为直线和端点两部分进行。对 C^1 连续的直线采用传统包络条件来计算特征点;对 C^0 连续的端点采用扩展包络条件来判断特征点。此方法不

仅可以用于刚体运动包络的计算,同样也可以适用于变形包络的计算。最后给出的计算实例充分表明了理论与方法的正确性。另外,对于复杂光滑的曲线,可以把其在一定精度下离散成多边形,再进行包络计算。可见,本文方法可以用于任意平面曲线的包络计算。

参考文献:

[1] 黄金陵,任金东,程义,等.轿车车轮运动轨迹包络面计算方法和CAD系统[J].汽车工程,2002,24(3):259-262.

[2] 王哲,王知行.刀具扫描体生成新算法及在数控加工仿真中的应用[J].机械工程学报,2001,37(1):28-31.

[3] SENATORE J, MONIES F, REDONNET J M, et al. Analysis of improved positioning in five-axis ruled surface milling using envelope surface[J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(10):989-998.

[4] GONG Hu, WANG Ning. Optimize tool paths of flank milling with generic cutters based on approximation using the tool envelope surface[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(12):981-989.

[5] GONG Hu, CAO Li-xin, LIU Jian. Improved positioning of cylindrical cutter for flank milling ruled surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(12):1205-1213.

[6] GONG Hu, CAO Li-xin, LIU Jian. Second order approximation of tool envelope surface for 5-axis machining with single point contact[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(5):604-615.

[7] YANG Jing-zhou, ABDEL-MALEK K. Approximate swept volumes of NURBS surfaces or solids[J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(1):1-26.

[8] MAENG S R, BAEK N, SHIN S Y, et al. A Z-map update method for linearly moving tools[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(11):995-1009.

[9] 李吉平,刘华明,张文铭,等.复杂曲面加工精度检验中曲面法矢与刀具扫描体求交算法的研究[J].计算机辅助设计与图形学学报,2000,12(12):931-935.

[10] BOHEZ L J, MINN N T H, KIATSRITHANAKORN B, et al. The stencil buffer sweep plane algorithm for 5-axis CNC tool path verification[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(12):1129-1142.

[11] BLACKMORE D, LEU M C, WANG L P. The swept-envelope differential equation algorithm and its application to NC machining verification[J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(9):629-638.

[12] BLACKMORE D, LEU M C, SHIH F. Analysis and modeling of deformed swept volumes[J]. Computer-Aided Design, 1994, 26(4):315-426.

[13] WANG W P, WANG K K. Geometric modeling for swept volume of moving solids[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1986, 6(12):8-17.

[14] GONG Hu, WANG Ning. Analytical calculation of the envelope surface for generic milling tools directly from CL-data based on the moving frame method[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(11):848-855.

[15] CHIOU C J, LEE Y S. Swept surface determination for five-axis numerical control machining[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2002, 42(14):1497-1507.

[16] SHISHKOW V A. Generation of surfaces using continuously indexing methods of machining[D]. Moscow: Mashgiz, 1951.

[17] YANG Min-yang, LEE E. NC verification for wire-EDM using an R-map[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(9):733-740.