

随机拓扑结构下多智能体系统的平均一致性^{*}

杜继永¹, 张凤鸣², 杨 骥¹, 吴虎胜¹

(1. 空军工程大学 工程学院, 西安 710038; 2. 空军工程大学 训练部, 西安 710051)

摘 要: 利用马尔可夫收敛准则、图的 Laplace 矩阵谱特性和欧氏度量的极值, 对一类具有随机拓扑结构的离散时间多智能体系统平均一致性问题进行了深入讨论。引入完好概率矩阵的概念, 建立随机拓扑结构下离散时间系统的一致性算法, 应用马尔可夫过程收敛相关结论及伴随算子, 从欧氏度量极值的角度证明了系统可达到渐近平均一致, 并得出了所需满足的条件, 该条件放宽了对系统连通性的要求。最后, 采用六个智能体组成的多智能体系统进行计算机仿真, 对理论的正确性进行了验证。

关键词: 多智能体系统; 平均一致性; 随机拓扑; 马尔可夫过程; 欧氏度量

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)03-1011-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.03.058

Average consensus of multi-agent system with random topology

DU Ji-yong¹, ZHANG Feng-ming², YANG Ji¹, WU Hu-sheng¹

(1. Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 2. Dept. of Training, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: This paper provided a theoretical framework for analysis of average consensus algorithms for multi-agent networked system with random topologies (intermittent links). The analysis framework was based on tools from convergence of Markov process, spectral properties of graph Laplacian and the extremum of Euclidean metric. It established direct connections between properties of Markov processes and the average convergence of consensus algorithm. Simulation results are presented demonstrate the role of average connectedness of the random instantiations of the graph on the convergence of consensus algorithm.

Key words: multi-agent system(MAS); average consensus; random topology; Markov process; Euclidean metric

近年来,随着分布式网络及多智能体系统(MAS)的迅速发展,协同控制成为控制领域研究的一个热点。而一致性问题作为多智能体协同控制的基础,受到来自各个领域研究者越来越多的关注^[1-13]。

在许多实际应用场合,网络拓扑结构经常是变化的,如网络节点或边的故障、重连、丢包等,又如蜂拥问题和飞行器编队控制问题等场合,通常把这种动态拓扑结构称为网络切换拓扑结构^[9]。Olfati 等人^[2]研究了具有切换拓扑的有向网络平均一致性问题,认为系统必须满足每个拓扑图都为平衡有向图且强连通;Jadbabaie 等人^[4]在研究中得到了比文献[2]更为弱化的保证系统趋于一致的条件,即切换拓扑网络保持周期连通;Moreau^[5]给出了文献[4]的扩展结果,得到了切换拓扑网络系统趋于一致的更弱的条件;Ren 等人^[6]也给出了切换拓扑时且边有权值情形的收敛条件;Kar 等人^[7]针对传感器网络中的通信故障及信道噪声等问题,给出了两种适用于动态拓扑结构的一致性算法;文献[10]针对多无人机协同搜索中的环境信息一致性问题,重点研究了全局通信条件下通信延迟造成的搜索图信息不一致问题。

1 代数图论

二元组 $G=(V,E)$ 表示一个无向图,其中 $V=(v_1,\cdots,v_n)$ 表

示具有 n 个节点的集合,节点的下标集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$,边集 $E\in V\times V$ 表示由节点对组成的边的集合。在无向图中,节点对是无序的,即满足 $(v_i,v_j)\in E\iff(v_j,v_i)\in E$ 。如果 $(v_i,v_j)\in E$,则称节点 v_j 是节点 v_i 的邻点,邻点集合 $N_i=\{v_j\in V|(v_i,v_j)\in E\}$ 。节点 v_i 的度 $d_i=|N_i|$,即集合 N_i 中元素的个数,度矩阵定义为 $D=\text{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 。图 G 的结构可以由邻接矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 表示,若 $(v_i,v_j)\in E$, $a_{ij}=1$;否则, $a_{ij}=0$ 。矩阵 $L=D-A$ 为图的 Laplace 矩阵,其谱特性是衡量一致性算法收敛的一个重要因素。对于无向图 G ,矩阵 L 为对称正半定矩阵,所有特征值为非负实数。根据 Gerschgorin 定理^[15],矩阵 L 所有的特征值均分布在以 $\sigma+0j$ 为中心,以 σ 为半径的圆内,其中 $\sigma=\max_i d_i$,将特征值按大小进行排序:

$$0\leq\lambda_1(L)\leq\lambda_2(L)\leq\cdots\leq\lambda_n(L)\leq 2\sigma \quad (1)$$

其中:0 为矩阵 L 的一个平凡特征值,1 为其对应的特征向量 ($1=[1,\cdots,1]^T\in\mathbb{R}^n$)。特征根 0 的重数等于无向图连通块个数;若 G 为连通图,则 0 为单重根,其第二小特征值 $\lambda_2(L)>0$ 。

2 问题描述

MAS 的拓扑结构由无向图 $G=(V,E)$ 表示, n 个节点代表 n 个智能体,边表示智能体之间存在信息传递。令 $x=[x_1^T,\cdots,$

收稿日期: 2011-07-06; 修回日期: 2011-09-02 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304004)

作者简介: 杜继永(1986-),男,河北衡水人,博士研究生,CCF 会员,主要研究方向为信息系统工程与智能决策(dujiyong_86@163.com); 张凤鸣(1963-),男,重庆梁平人,教授,博导,主要研究方向为信息系统工程与智能决策等; 杨骥(1984-),男,辽宁朝阳人,博士研究生,主要研究方向为信息系统工程与智能决策; 吴虎胜(1986-),男,湖北荆门人,博士研究生,主要研究方向为智能信息系统与智能决策。

$x_n^T]^T, x_i \in \mathbb{R}^m$ 为 v_i 的值。如果有 $x_i = x_j$, 则节点 v_i 和节点 v_j 的信息达到一致; 若对于 $\forall i, j \in I, i \neq j, x_i = x_j$, 则多智能体网络拓扑中的所有智能体达到了一致。本文中, 采用以下离散时间一致算法^[8]:

$$x_i(k+1) = \omega_{ii}(k)x_i(k) + \sum_{j \in N_i} \omega_{ij}(k)x_j(k) \quad (2)$$

其中: $i \in I$, 集合 N_i 随拓扑结构变化而变化; ω_{ij} 为 (v_i, v_j) 上信息对 x_i 的权重, 满足 $\omega_{ii}(k) + \sum_{j \in N_i} \omega_{ij}(k) = 1$ 。

在算法迭代中, 考虑 ω_{ij} 为时变的, 但在同一迭代过程中, 各边上的权重相同, 即 $\forall i, j \in I, i \neq j, \omega_{ij}(k) = \alpha(k)$ 。式(2)转换为

$$x_i(k+1) = [1 - \alpha(k)d_i(k)]x_i(k) + \alpha(k) \sum_{j \in N_i} x_j(k) \quad (3)$$

因而, 整个多智能体系统矩阵形式为

$$x(k+1) = x(k) - \alpha(k)(L(G_k) \otimes I_m)x(k) \quad (4)$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}^m, x = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T$; $\otimes$ 为 Kronecker 积; I_m 为 m 阶单位阵。下文中, 将 $L(G_k)$ 记做 $L(k)$ 。

为简化计算, 仅对 $x_i \in \mathbb{R}$ 进行分析, 所得结论对 $x_i \in \mathbb{R}^m$ ($i \in I$) 亦成立。式(4)简化为

$$x(k+1) = x(k) - \alpha(k)L(k)x(k) \quad (5)$$

3 随机拓扑结构 MAS 一致性

3.1 一致性算法

针对拓扑结构的随机性, 引入完好概率矩阵的定义。

定义 1 完好概率矩阵。图 $G = (V, E)$ 的完好概率矩阵 $P = [p_{ij}]_{n \times n}, i, j \in I$ 。其中, p_{ij} 为边 $(v_i, v_j) \in E$ 的完好概率, 作如下约定: $0 \leq p_{ij} \leq 1, p_{ii} = 0, i \in I$; 并且概率 p_{ij} 非时变, 即矩阵 P 为常值矩阵。各边以概率 p_{ij} 连接 (保持连接) 或以概率 $(1 - p_{ij})$ 断开 (保持断开), 即

$$p_{ij} = \begin{cases} P\{l_{ij}(k+1) = -1 | l_{ij}(k) = -1\} & i \neq j \\ P\{l_{ij}(k+1) = -1 | l_{ij}(k) = 0\} & i = j \end{cases} \quad (6)$$

其中: l_{ij} 为图 G 的 Laplace 矩阵中元素。

在此假设随机拓扑网络 $G = (V, E(k))$ 对应的 Laplace 矩阵序列 $\{L(k)\}_{k \geq 0}$ 与其期望值 $\bar{L} = E[L(k)]$ 相对独立。其中, $\bar{L}$ 为常值矩阵并且满足 $\lambda_2(\bar{L}) > 0$ 。网络 $G(V, E(k))$ 的 Laplace 矩阵可记为

$$L(k) = \bar{L} + \tilde{L}(k), \forall k > 0 \quad (7)$$

随机拓扑网络 $G(V, E(k))$ 一致性算法可表示为

$$x(k+1) = x(k) - \alpha(k)(\bar{L} + \tilde{L}(k))x(k) \quad (8)$$

3.2 平均一致性分析

令 $\rho(\cdot)$ 表示 Euclid 空间中的度量, 对于空间 $B \subset \mathbb{R}^n$, B 的邻域及其补集的定义分别为

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(B) &= \{x | \inf_{y \in B} \rho(x, y) < \varepsilon\} \\ V_\varepsilon(B) &= \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(B) \end{aligned} \quad (9)$$

其中: ε 为任意小的正数。

定义 2 马尔可夫过程的伴随算子^[8]。 $X = \{x(k)\}_{k \geq 0}$ 为马尔可夫过程, Γ 为其伴随算子, 定义为

$$\Gamma\psi(k, x) = E[\psi(k+1, x(k+1)) | x(k) = x] - \psi(k, x) \quad (10)$$

其中: $k \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, 且非负函数 $\psi(k, x)$ 条件期望存在。

引理 1^[8] 设 X 为马尔可夫过程, 其伴随算子为 Γ 。考虑定义在 $k \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ 上的非负函数 $\Phi(k, x) \in D_\Gamma$ 及空间 $B \subset \mathbb{R}^n$, 若满足式(12) ~ (14) 三个条件, 则对于任意初始概率分布的马尔可夫过程 $X = \{x(k)\}_{k \geq 0}$, 有以下结论:

$$P(\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x(k), B) = 0) = 1 \quad (11)$$

即当 $k \rightarrow \infty$ 时, 概率为 1 地收敛到 B 的条件为

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \inf_{k \geq 0, x \in V_\varepsilon(B)} \Phi(k, x) > 0, \forall \varepsilon > 0 \\ & \Phi(k, x) \equiv 0, x \in B, \limsup_{x \rightarrow B, k \geq 0} \Phi(k, x) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{b)} \quad \Gamma\Phi(k, x) \leq g(k)(1 + \Phi(k, x)) - \alpha(k)\varphi(k, x) \quad (13)$$

其中: $\varphi(k, x)$ 为非负函数, $k \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, 满足 $\inf_{k \geq 0, x \in V_\varepsilon(B)} \varphi(k, x) > 0, \forall \varepsilon > 0$ 。

$$\text{c)} \quad \alpha(k) > 0, \sum_{k \geq 0} \alpha(k) = \infty, g(k) > 0, \sum_{k \geq 0} g(k) < \infty \quad (14)$$

根据上述结论, 给出算法可达到平均渐近一致的结论。

定理 1 MAS 的初始状态为 $x(0) \in \mathbb{R}^n$, 其拓扑结构具有随机性。在算法式(8)下, 若 $\alpha(k)$ 满足随机逼近收敛条件^[14]: $\alpha(k) > 0, \sum_{k \geq 0} \alpha(k) = \infty, \sum_{k \geq 0} \alpha^2(k) < \infty$, 且 $\lambda_2(\bar{L}) > 0$, 则 MAS 可达到平均渐近一致, 即: $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \text{ave}(x(0))1^T$ 。

证明 由假设可知, $X = \{x(k)\}_{k \geq 0}$ 为马尔可夫过程^[3]。

首先证明算法的收敛性。定义空间 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 满足

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | x = a1, a \in \mathbb{R}\} \quad (15)$$

取势函数:

$$\Phi(k, x) = x^T(\bar{L} - \bar{H})x \quad (16)$$

因为 1^T 为矩阵 $\bar{L}$ 的 0 特征根对应的特征向量, 则

$$\Phi(k, x) \equiv 0, x \in \Omega \quad (17)$$

由 $\Phi(k, x)$ 的连续性可知

$$\limsup_{x \rightarrow \Omega, k \geq 0} \Phi(k, x) = 0 \quad (18)$$

根据 Courant-Fischer 定理^[15], 实对称矩阵 $\bar{L}$ 满足 $x^T \bar{L} x \geq \lambda_2(\bar{L}) \|x\|^2$, 又知 $x \in V_\varepsilon(\Omega) \Rightarrow \|x_{\Omega^\perp}\| \geq \varepsilon$, 可得 $\Phi(k, x) = x^T \bar{L} x \geq \lambda_2(\bar{L}) \|x_{\Omega^\perp}\|^2 \geq \lambda_2(\bar{L}) \varepsilon^2$ 成立。

由 3.1 节中的假设条件 $\lambda_2(\bar{L}) > 0$, 可得

$$\inf_{k \geq 0, x \in V_\varepsilon(\Omega)} \Phi(k, x) \geq \lambda_2(\bar{L}) \varepsilon^2 > 0 \quad (19)$$

以上证明了 $\Phi(k, x)$ 满足引理 1 中的条件 a)。

参照文献[8]中的推理过程, 将式(8)代入式(10), 得到

$$\begin{aligned} \Gamma\Phi(k, x) &= E[x(k+1)^T \bar{L} x(k+1) | x(k) = x] - x^T \bar{L} x = \\ &= E[x - \alpha(k)\bar{L}x - \alpha(k)\tilde{L}(k)x]^T \bar{L} [x - \\ &\quad \alpha(k)\bar{L}x - \alpha(k)\tilde{L}(k)x] - x^T \bar{L} x \end{aligned} \quad (20)$$

因为 $E(\tilde{L}(k)) = 0$, 且与 $x(k)$ 相对独立, 上式为

$$\begin{aligned} \Gamma\Phi(k, x) &= -2\alpha(k)x^T \bar{L}^2 x + \alpha^2(k)x^T \bar{L}^3 x + \\ &= E[\alpha^2(k)(\bar{L}(k)x)^T \bar{L}(\bar{L}(k)x)] \leq \\ &= -2\alpha(k)x^T \bar{L}^2 x + \alpha^2(k)\lambda_n^3(\bar{L}) \|x_{\Omega^\perp}\|^2 + \\ &\quad \alpha^2(k)\lambda_n(\bar{L}) E[\lambda_{\max}^2(\bar{L}(k))] \|x_{\Omega^\perp}\|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

由 Gerschgorin 定理^[15], $\max \lambda_i(\bar{L}(k)) \leq 2(n-1) < 2n$, 则

$$\begin{aligned} \Gamma\Phi(k, x) &\leq -2\alpha(k)x^T \bar{L}^2 x + \alpha^2(k)\lambda_n^3(\bar{L}) \|x_{\Omega^\perp}\|^2 + \\ &\quad 4\alpha^2(k)n^2\lambda_n(\bar{L}) \|x_{\Omega^\perp}\|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

在上述推理中, 已知 $x^T \bar{L} x \geq \lambda_2(\bar{L}) \|x_{\Omega^\perp}\|^2$ 和 $\lambda_2(\bar{L}) > 0$ 均成立, 可将式(22)转换为如式(13)形式, 得

$$\begin{aligned} \Gamma\Phi(k, x) &\leq -2\alpha(k)x^T \bar{L}^2 x + \\ &\quad \alpha^2(k) \left(\frac{\lambda_n^3(\bar{L}) + 4n^2\lambda_n(\bar{L})}{\lambda_2(\bar{L})} \right) x^T \bar{L} x \end{aligned} \quad (23)$$

由引理 1, 为使 $\Gamma\Phi(k, x)$ 满足条件 b), 可取

$$\varphi(k, x) = 2x^T \bar{L}^2 x \quad (24)$$

$$g(k) = \alpha^2(k) \left(\frac{\lambda_n^3(\bar{L}) + 4n^2\lambda_n(\bar{L})}{\lambda_2(\bar{L})} \right) \quad (25)$$

现证明 $\varphi(k, x)$ 、 $g(k)$ 满足引理 1 中的约束条件。

a)对于矩阵 L^2 ,其特征值满足 $\lambda(L^2) = \lambda^2(L)$,根据式(19),则有

$$\inf_{k \geq 0, x \in V_G(\Omega)} \varphi(k, x) = 2x^T L^2 x \geq 2\lambda_2^2(L) \varepsilon^2 > 0$$

2)由式(1)可知, $g(k) > 0$;由于 L 为常值矩阵,故其所有特征根均为确定值,并且满足式(1)约束。

记 $\beta = \frac{\lambda_n^3(L) + 4n^2\lambda_n(L)}{\lambda_2(L)}$,由式(14)可得 $\sum_{k \geq 0} g(k) = \beta \sum_{k \geq 0} \alpha^2(k) < \infty$ 。

综上所述,引理 1 中的条件均可满足。因此有

$$P(\lim_{k \rightarrow \infty} p(x(k), \Omega) = 0) = 1 \tag{26}$$

即当 $k \rightarrow \infty$ 时,各节点的信息以概率 1 收敛到空间 Ω 。

下面,考虑 $x(k)$ 可取得平均一致收敛。

由式(18)式知

$$P(\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - a1\| = 0) = 1 \tag{27}$$

式(8)两端同时左乘行向量 $\frac{1}{n}1^T$,得

$$\text{ave}(x(k+1)) = \text{ave}(x(k)) - \alpha(k)1^T L(k) = \text{ave}(x(k)) \tag{28}$$

由归纳法可得

$$\text{ave}(x(k+1)) = \text{ave}(x(0)) \tag{29}$$

即: $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \text{ave}(x(0))1^T$ 。

4 仿真分析

本文采用六个 agent 组成的无向网络。假设 agent 的状态是一维的, $x_i(0) = i, i \in [1, 2, \dots, 6]$;权重因子 $\alpha(k) = k^{-0.8}$ 。文献[16]中给出了网络平均节点度与连接概率之间的实验统计关系为

$$p_{ij} = \frac{3.5\lambda_2(L)}{n} \cdot \frac{-1}{e^{0.2d}} \tag{30}$$

其中: $\lambda_2(L)$ 为网络期望平均连接度; n 为网络节点的规模; d 为网络中最长路径的长度。利用式(30)产生的随机拓扑不能保证连通性。MAS 在仿真过程中的部分拓扑结构如图 1 所示。

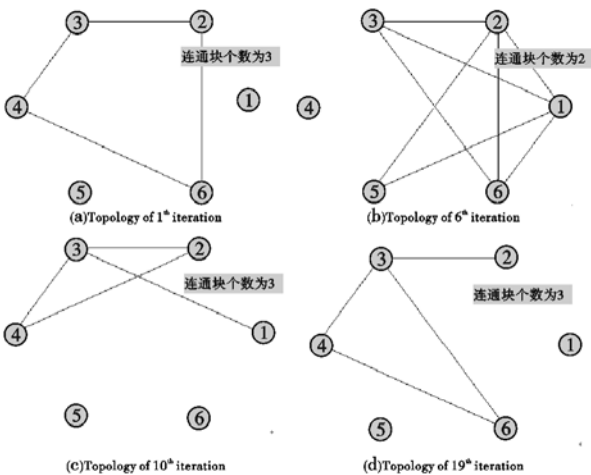


图1 网络随机拓扑结构

图 1 给出了仿真过程中的一些拓扑结构,这些结构均有两个以上的连通片。在仿真过程中可知,agent 之间并未时刻处于连通状态。在仿真初始时刻,各 agent 所拥有的信息不同,由于拓扑结构的动态变化,在仿真前期各 agent 信息发生振荡,经过约 10 次迭代,各 agent 的信息状态快速达到一致,仿真结果如图 2、3 所示,可见该一致性算法并不要求系统的拓扑结构时刻保持连通,仅需要满足 Laplace 均值矩阵的平均连通,系统

便可达到渐近一致。

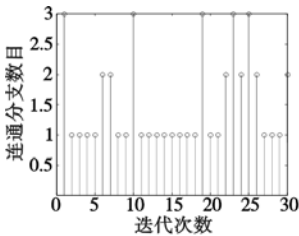


图2 连通分支个数

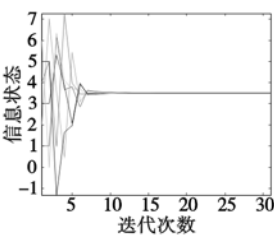


图3 Agent信息状态

5 结束语

本文研究了随机拓扑结构多智能体的一致性问題。考虑系统拓扑为无向的,agent 间的连接存在随机的故障。由于频域方法很难应用于具有动态拓扑结构的 MAS 一致性分析,本文应用马尔可夫过程的收敛准则和欧氏度量,结合 Laplace 矩阵的谱特性,借鉴马尔可夫过程伴随算子的相关性质,引入了完好概率矩阵,从概率度量角度研究了在随机拓扑结构下 MAS 达到平均一致性的条件,该条件主要与连接边的权值以及系统的平均连通性有关。最后通过仿真验证了结论的正确性。笔者下一步工作将研究完好概率矩阵对系统平均一致收敛性的影响。

参考文献:

[1] BEARD R W, STEPANYAN V. Information consensus in distributed multiple vehicle coordinated control [C]//Proc of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. 2003:2029-2034.

[2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[3] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of IEEE, 2007, 95(1): 215-233.

[4] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[5] MOREAU L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 169-182.

[6] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Trans Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.

[7] KAR S, MOURA J M F. Sensor networks with random link: topology design for distributed consensus [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(7): 3315-3326.

[8] KAR S, MOURA J M F. Distribute consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: link failure and channel noise [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/0711.3925>.

[9] 杨文. 多智能体系统一致性问题研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2009.

[10] 彭辉. 分布式多无人机协同区域搜索中的关键问题研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2009.

[11] 刘成林, 田玉平. 具有时延的多个体系统的一致性问题综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1601-1608.

[12] SUN Y G, WANG L, XIE G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays [J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(2): 175-183.

[13] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1087-1092.

[14] 徐昕. 增强学习与近似动态规划[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[15] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论. [M]. 3 版. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.

[16] 陈岩. 蚁群优化理论在无人机战术控制中的应用研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2007.