

基于趋利避害原则的粒子群算法研究

王星博¹, 李本威¹, 杨欣毅¹, 贾明明²

(1. 海军航空工程学院 飞行器工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 青岛分院, 山东 青岛 266041)

摘 要: 针对标准粒子群算法进行多极点函数优化时易导致早熟收敛及陷入局部最优的问题,把生物学中昆虫生存的趋利避害原则引入到粒子群优化算法中,改变传统粒子群优化算法只存在趋利操作而没有避害操作的单向性,提出了两种不同的保持或增加种群多样性的改进算法。仿真实验结果表明,与传统粒子群优化算法相比,采用基于趋利避害原则的粒子群算法处理复杂的多峰函数可显著提高算法的全局寻优性能。

关键词: 粒子群优化; 趋利避害; 种群多样性; 标准测试函数

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)03-0933-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.03.037

Research on particle swarm optimizing algorithm based on seek advantage and avoid disadvantage principle

WANG Xing-bo¹, LI Ben-wei¹, YANG Xin-yi¹, JIA Ming-ming²

(1. Dept. of Airborne Vehicle Engineering, Naval Aeronautical Engineering Academy, Yantai Shandong 264001, China; 2. Qingdao Branch, Naval Aeronautical Engineering Academy, Qingdao Shandong 266041, China)

Abstract: To get rid of resulting in premature convergence and plunging into local optimum for standard particle swarm optimization to solve multiple-order pole functions, this paper introduced seek advantage and avoid disadvantage principle of some insects in biology into particle swarm optimization algorithm to change the single direction characteristic of the traditional algorithm which only had drawing on advantage operation instead of avoiding disadvantage operation. It proposed both kinds of ameliorated algorithms to maintain or increase population diversity. Simulation experiment results indicate that the particle swarm optimization based on seek advantage and avoid disadvantage principle can prominently improve the global optimization ability of the algorithm when dealing with complicated multimodal functions.

Key words: particle swarm optimization; seek advantage and avoid disadvantage; population diversity; benchmark function

0 引言

1995 年美国电气工程师 Eberthart 和社会心理学家 Kennedy 基于鸟群觅食行为提出了粒子群优化 (particle swarm optimization, PSO) 算法, 简称粒子群算法^[1]。近几年来粒子群算法在函数优化、神经网络训练、模糊系统控制以及其他遗传算法的应用领域都有比较好的表现, 并在工程实践中表现出巨大的潜力。但与其他全局优化算法一样, 标准粒子群算法会出现早熟收敛, 即在算法运行过程中, 如果某粒子发现一个当前最优位置, 其他粒子将迅速向其靠拢; 如果该位置为一局部最优点, 粒子群就无法在解空间内重新搜索, 算法将陷入局部最优, 因此该算法不利于求解多峰函数的全局最优解^[2]。

国内外众多学者通过大量研究提出了多种算法改进, 大致可以概括如下:

参数改进, 主要为速度公式中的惯性权重、学习因子及速度公式中引入其他的参数。如 Eberthart 等人^[3]提出的随机惯性权重变化方法, Ratnaweera 等人^[4]给出的时变学习因子选择方法 (PSO-TVAC), 以及国内学者张选平等人^[5]提出的动态改

变惯性权重方法等。

Kennedy 等人^[6]研究发现采用不同领域拓扑结构的局部版本的 PSO 更易找到全局最优解或近优解。很多学者设计了许多不同的领域结构来提高 PSO 算法的性能, 如 Liang 等人^[7]提出了一种多全群体动态拓扑结构 PSO 算法模型; 王雪飞等人^[8]受小世界网络模型的启发提出了一种具有动态拓扑结构的新颖 PSO 算法, 取得了良好的效果。

将 PSO 算法与其他算法或搜索技术融合也是目前算法改进的一个研究热点。例如高鹰等人^[9]结合免疫算法提出了免疫 PSO 算法; Juang 等人^[10]提出了一种基于遗传算法与 PSO 算法的混合算法; Li 等人^[11]基于模拟退火算法提出了著名的 PSOSA 算法。

PSO 算法来源于社会型群居动物的行为模拟, 因此不少学者开始从自然界生物行为出发研究其改进算法。Krink 等人^[12]提出了基于生物生命周期的改进 PSO 算法; He 等人^[13]根据动物群中的被动聚集现象提出了一种新型改进算法 PSOPC。国内也有学者开展了相关的研究工作, 王俊伟^[14]将候鸟在迁徙过程中的飞行机制引入到标准 PSO 中, 提出了新

收稿日期: 2011-06-30; 修回日期: 2011-08-01

作者简介: 王星博 (1982-), 男, 山东莱州人, 博士研究生, 主要研究方向为航空发动机检测与控制 (wangxingbowxb@sohu.com); 李本威 (1963-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为航空发动机检测与控制; 杨欣毅 (1978-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为弹用涡喷发动机工作过程仿真和实验; 贾明明 (1981-), 男, 助教, 博士研究生, 主要研究方向为航空宇航科学与技术。

的改进算法。

从已有的文献看,在 PSO 改进方法中,前三种改进算法的研究较为普遍,成果较为丰富,而基于生物行为方法的研究处于起步阶段,国内关于该方面的研究还不是很多,今后将会成为 PSO 算法改进研究的一个热点。本文把生物行为中昆虫的趋利避害原则引入到粒子群优化算法中,改变传统 PSO 只存在趋利操作而没有避害操作的单向性,提出两种不同的保持或增加种群多样性的改进算法,以增强算法的全局寻优性能。

1 种群多样性和趋利避害原则

种群的多样性与 PSO 算法的性能密切相关,多样性的保持与否直接影响算法早熟收敛及陷入局部最优的风险^[15]。在标准 PSO 算法中,每一个粒子在寻优过程中都向自己的历史最优位置和群体最优位置靠近。在这种操作方式的持续作用下,由于多样性的失去,种群很快在自身及全局最优位置的吸引下陷入局部最优而无法逃脱^[16]。例如,标准粒子群算法在 Schaffer 标准测试函数中的种群多样性变化如图 1 所示。

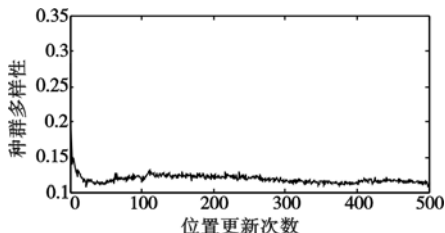


图1 寻优过程中种群多样性变化曲线

随着迭代次数的增加,整个粒子种群的多样性呈下降趋势。初期下降迅速,此时粒子快速向最优点聚集;后期多样性下降趋缓,粒子群陷入局部最优点。因此,如何增加种群多样性,使粒子逃脱局部最优,成为增强算法全局寻优能力的关键^[17]。

趋利避害原则是昆虫等群体中一种常见的生物学现象,这种机制促使昆虫个体趋向有利于自身生长的环境,逃避不利的生长环境。向有利环境靠近增加个体的成活率,而逃避有害环境有利于个体在其他地方发现更适合的生存条件。

实际上,标准的 PSO 算法是这种趋化生存法则的特例。在粒子位置的更新过程中,只有趋利的操作,而没有避害操作,算法可以保证种群的收敛速度。但当搜索空间的全局最优与局部最优相距很远或者局部突脊较多时,由惯性权重协调的全局寻优能力不足以使粒子难以逃脱局部最优的谷底。而将避害操作同时引入粒子的位置更新、搜索过程中保持和增加种群的多样性,有利于提高种群的全局寻优能力。基于趋利避害原则,粒子不仅被当前的最优位置和自身最优位置吸引,同时它也会被自己历史最差位置和群体最差位置所排斥。粒子受到当前最差位置排斥增加了粒子向更好区域搜索的可能性,有助于发现更优位置。即算法处于趋利性时,多样性会逐渐失去;算法处于避害性时,多样性会逐渐增加。

2 保持和增加种群多样性的算法实现

将趋利避害原则引入标准粒子群算法,趋利操作的实现方法不变,即每个粒子向自身最优位置与群体最优位置靠近。

假设一个由 M 个粒子组成的群体在 D 维搜索空间以一定的速度飞行。粒子 i 在 t 时刻的状态属性如下:

a) 粒子位置

$$X_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{iD}(t)) \quad (1)$$

其中: $x_{id}(t) \in [L_d, U_d]$, L_d, U_d 分别为搜索空间的下限和上限。

b) 粒子速度

$$V_i(t) = (v_{i1}(t), v_{i2}(t), \dots, v_{iD}(t)) \quad (2)$$

其中: $v_{id}(t) \in [v_{\min}, v_{\max}]$, $v_{\min}, v_{\max}$ 分别为粒子的最小和最大速度。

c) 个体最优位置

$$P_{\text{best}_i}(t) = (p_{\text{best}_i1}, p_{\text{best}_i2}, \dots, p_{\text{best}_iD}) \quad (3)$$

d) 全局最优位置

$$G_{\text{best}}(t) = (g_{\text{best}_1}, g_{\text{best}_2}, \dots, g_{\text{best}_D}) \quad (4)$$

其中: $1 \leq i \leq M$ 。

则趋利操作的每次迭代中,粒子根据以下公式更新速度和位置^[16]:

$$V_i(t+1) = \omega V_i(t) + c_1 r_1 (P_{\text{best}_i}(t) - X_i(t)) + c_2 r_2 (G_{\text{best}}(t) - X_i(t)) \quad (5)$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1) \quad (6)$$

其中: ω 为惯性权重,其大小决定了粒子对当前速度继承的多少; r_1, r_2 为均匀分布在 $(0, 1)$ 内的随机数; c_1, c_2 为学习因子,通常取 $c_1 = c_2 = 2$ 。

当粒子执行避害操作时,与趋利操作相仿,每个位置更新过程中,记录粒子个体最差位置和全局最差位置:

$$P_{\text{worst}_i}(t) = (p_{\text{worst}_i1}, p_{\text{worst}_i2}, \dots, p_{\text{worst}_iD}) \quad (7)$$

$$G_{\text{worst}}(t) = (g_{\text{worst}_1}, g_{\text{worst}_2}, \dots, g_{\text{worst}_D}) \quad (8)$$

算法执行过程中,粒子避开以上两个位置,速度更新按式(9)进行:

$$V_i(t+1) = \omega V_i(t) - c_3 r_1 (P_{\text{worst}_i}(t) - X_i(t)) - c_4 r_2 (G_{\text{worst}}(t) - X_i(t)) \quad (9)$$

其中: c_3, c_4 为避害学习因子。

当趋利避害操作同时进行,粒子的速度更新公式合并为

$$V_i(t+1) = \omega V_i(t) + c_1 r_1 (P_{\text{best}_i}(t) - X_i(t)) + c_2 r_2 (G_{\text{best}}(t) - X_i(t)) - c_3 r_1 (P_{\text{worst}_i}(t) - X_i(t)) - c_4 r_2 (G_{\text{worst}}(t) - X_i(t)) \quad (10)$$

粒子的避害运动没有目标趋向性,仅仅是增加粒子向较好区域飞行的可能性,有助于发现更为优秀的位置。因此,寻优算法应以趋利操作为主,同时将避害操作的强度控制在适当的范围,否则容易造成粒子寻优运动的混乱,反而使寻优效率变差。避害操作的强度大小可以通过避害学习因子 c_3, c_4 的大小进行调节。

仿照标准 PSO 算法的线性惯性权重策略,使 c_3, c_4 随着进化代数而线性递增,一般取

$$c_3 = c_4 = c_{\text{start}} + \frac{c_{\text{end}} - c_{\text{start}}}{T} \times t \quad (11)$$

其中: c_{start} 为避害学习因子的初始值,也是最小值; c_{end} 为迭代结束时的学习因子值,也是最大值。这种线性避害操作强度的方法保证了算法初期在趋利操作的作用下快速收敛,后期粒子加强避害特性避免落入局部极小值点,使优化算法的整个过程中多样性维持在适当的水平。将上述趋利避害操作同时进行的

算法记为 PSO-P。

另一种算法是采用趋利操作与排斥操作切换的方式,用粒子群多样性度量值作为切换的依据,将算法记为 PSO-T。采用 Riget 提出的多样性度量方法,多样性度量公式表示为

$$\text{diversity}(t) = \frac{1}{M|L|} \sum_{i=1}^M \sqrt{\sum_{j=1}^D (x_{ij}(t) - \bar{x}_j(t))^2}$$

(12)

其中: M 为种群大小; $|L|$ 为搜索空间最长对角线的长度; D 为粒子维数; $x_{ij}(t)$ 是 t 次迭代时第 i 个粒子位置的第 j 个分量; $\bar{x}_j(t)$ 是第 j 个分量的平均值。

定义两个阈值 d_{low} 和 d_{high} ,当种群多样性小于 d_{low} 时,粒子由趋利操作转入避害以增加种群的多样性;当种群多样性大于 d_{high} ,算法重新转入趋利操作,如此周而复始,直到预设的迭代次数或收敛精度。

3 算法实现步骤

趋利避害操作同时进行的粒子群优化算法实现步骤与标准 PSO 相同,只是速度更新方式采用式(10)。两种操作相互切换的 PSO 算法基本步骤如下:

- a) 初始化各类参数。根据优化问题复杂度确定适当的种群规模 M ,惯性权重范围 $[w_{\text{end}}, w_{\text{start}}]$,学习因子 c_1, c_2 ,多样性阈值范围 $[d_{\text{low}}, d_{\text{high}}]$,最大迭代次数 t_{max} ,收敛精度 ξ ,在 $[L_D, U_D]$ 位置范围内和 $[v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$ 速度范围内按均匀分布随机给定粒子的初始位置与速度。
- b) 当迭代次数 $t=0$ 时,粒子速度更新采用趋利操作,设置指示变量 $\text{Mode}=0$ (趋利操作),对每个粒子 i 执行下面操作。
- c) 计算粒子的适应值。
- d) 若 $\text{diversity}(t) \leq d_{\text{low}}$,令 $\text{Mode}=1$ (避害操作),用式(5)和(6)进行位置更新;若 $\text{diversity}(t) \geq d_{\text{high}}$,令 $\text{Mode}=0$,用式(9)进行速度更新,用式(6)进行位置更新。
- e) 更新 $P_{\text{best}_i}(t), G_{\text{best}}(t), P_{\text{worst}_i}(t), G_{\text{worst}}(t)$ 。
- f) 判断当前迭代次数是否达到预设的最大次数 t_{max} ,或适应度结果小于预定收敛精度 ξ 的要求,是则停止迭代,输出最优解 G_{best} ;否则,令 $t=t+1$,转到 c)。

4 实验与结果分析

在优化算法的研究中,通常采用一定的基准测试函数(benchmark 函数)来测试和比较算法性能。这些函数代表着不同的优化问题,涉及范围广,包含单峰函数到多峰函数,低维函数到高维函数,以及一些特定情况下的优化问题^[18]。本文采用 Sphere、Generalized Griewank、Schaffer、Levy 标准测试函数对算法性能进行比较。维数为 2 时,4 个函数的空间特征如图 2~5 所示。

Sphere 函数是非线性的对称单峰函数,不同维之间是可分离的。此函数相对比较简单,大多数算法都能够轻松地达到优化效果。其函数表达式为

$$f_{\text{Sphere}}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

其中: $-100 \leq x_i \leq 100$ 。

Generalized Griewank 函数空间特性与 Sphere 较为相似,但局部为旋转、不可分离的可变维数多峰函数。其函数表达式为

$$f_{\text{Griewank}}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^{30} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$$

其中: $-600 \leq x_i \leq 600$ 。

Schaffer 函数是一个多峰函数,在搜索区域内有无数个局部最小值,但只有一个全局最小值 $f(0, \dots, 0) = 0$ 。函数强烈震荡的特性使之很难收敛。其函数表达式为

$$f_{\text{Schaffer}}(x) = 0.5 + \frac{(\sin \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})^2 - 0.5}{(1 + 0.001 \sum_{i=1}^n x_i^2)^2}$$

其中: $-100 \leq x_i \leq 100$ 。

Levy 函数是一个有着约 125 个局部最小值的多峰函数。其函数表达式为

$$f_{\text{Levy}}(x) = \sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} [(y_i - 1)^2 (1 + 10 \sin^2(\pi y_i + 1))] + (y_n - 1)^2 (1 + 10 \sin^2(2\pi y_n))$$

其中: $y_i = 1 + \frac{x_i - 1}{4}, -600 \leq x_i \leq 600$ 。

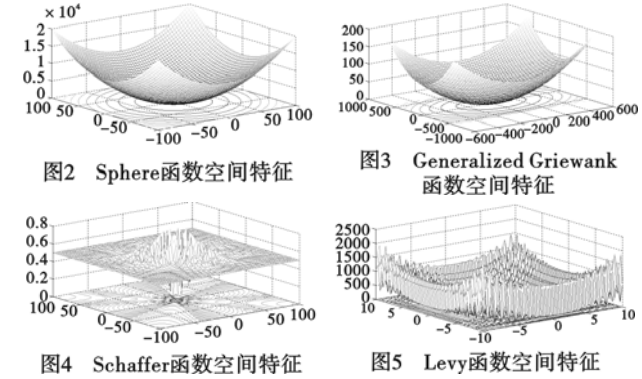


图2 Sphere函数空间特征

图3 Generalized Griewank 函数空间特征

图4 Schaffer函数空间特征

图5 Levy函数空间特征

各粒子群算法学习因子 c_1 和 c_2 均设置为 2。对于 PSO-T 算法,将多样性控制参数 d_{low} 和 d_{high} 分别设置为 1×10^{-5} 和 0.2;对于 PSO-P 算法,将避害学习因子的控制参数 c_{start} 和 c_{end} 分别设置为 0 和 1×10^{-5} ;种群的大小设置为 30;函数的维数取 50。为了客观评价函数的寻优性能,将算法的最大迭代次数设置为 1×10^4 ,每个函数采用各种算法独立运行 100 次,取最终适应度的平均值与标准 PSO 算法以及 PSOPC 算法进行对比,结果如表 1 所示。取 4 个函数寻优过程中适应度的自然对数,其变化曲线如图 6~9 所示。

表 1 四个标准测试函数下各算法的最终平均适应度

优化算法	Sphere	Generalized Griewank	Schaffer	Levy
PSO	9.5776e-12	1.0376e-2	0.2391	1.7277
PSOPC	7.8978e-3	9.4665e-12	0.1329	1.2584
PSO-T	1.4082e-4	9.7149e-3	0.1327	0.4895
PSO-P	5.2980e-5	9.7571e-3	0.1329	0.3510

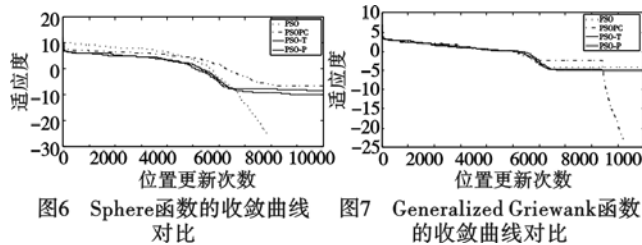


图6 Sphere函数的收敛曲线对比

图7 Generalized Griewank函数的收敛曲线对比

从表 1 可知,除了相对简单的 Sphere 标准测试函数,基于趋利避害原则的粒子群算法获得的最终适应度均要好于标准 PSO。Generalized Griewank 函数除了 PSOPC 算法,其他算法差

距较小。易陷入局部最小的多峰函数 Schaffer 和 Levy 函数中, PSO-T 和 PSO-P 算法的优势非常明显。

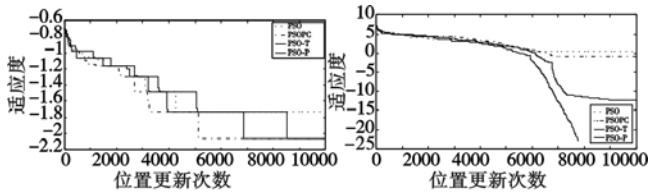


图8 Schaffer函数的收敛曲线对比

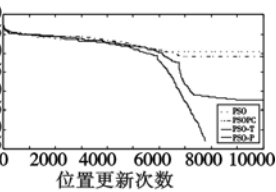


图9 Levy函数的收敛曲线对比

通过图6~9的收敛曲线可以看出,趋利操作随着多样性减少算法进步明显,但后期发生停滞。避害操作可显著增加种群多样性,使算法稳步推进,不易陷入局部最优。由于 Sphere 函数是简单的单峰函数,PSO-T 和 PSO-P 算法在计算初期收敛速度较快,适应度曲线迅速下降;迭代后期由于避害操作导致的种群多样性的增加,使寻优进程缓慢。而标准 PSO 在迭代过程中一直保持较快的收敛速度,这表明有最优下降梯度的单峰函数,仅靠趋利操作便能最快地发现最优解,避害操作的作用不大。对于简单的多峰函数 Generalized Griewank,存在大量局部最小值点,但由于其深度较小,标准 PSO 算法可轻易地挣脱,因此 PSO-T 和 PSO-P 算法仅仅在迭代后期多样性下降到较低点时具有微弱的优势;PSOPC 后期由于个体之间的信息传递,有效地纠正了误判而陷入的局部最优解。对于复杂的具有突脊的多峰函数 Schaffer 和 Levy,标准 PSO 和 PSOPC 算法在迭代后期容易陷入局部最优,适应度曲线变为平直,而 PSO-T 和 PSO-P 算法可持续进步直到找到满意解,这种优越性源于对种群多样性的保持。Levy 函数寻优过程中算法多样性的变化如图10所示。

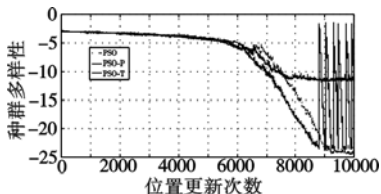


图10 不同的算法种群多样性变化

可以看出,由于初始化粒子位置在搜索空间是均匀随机分布的,各算法具有相同的初始种群多样性。随着粒子的趋利运动,标准 PSO 算法在迭代后期的种群多样性降低为 2×10^{-11} ; PSO-T 的种群多样性前期与标准 PSO 相似,当降低到 1×10^{-5} 之后反弹震荡,保持在 $[1 \times 10^{-5}, 0.2]$; PSO-P 的多样性在整个寻优过程中变化较缓慢,迭代后期也能够维持在适当的水平。

5 结束语

粒子群算法中,较低的种群多样性会导致算法早熟收敛,陷入局部最优解。本文将生物趋利避害原则引入标准 PSO 算法,通过趋利避害操作的相互制约和转化,控制种群多样性处于高效的范围内,实现算法全局与局部搜索的平衡。

标准测试函数实验结果表明,两种改进的算法对于解决复杂多峰优化问题具有很大的优势,具有推广应用价值。根据“*No Free Lunch*”理论,不同的算法在某类问题的求解中性能会有差异,但对所有问题集两种算法的平均性能应该是相同的^[19]。本文提出的两种算法在提高收敛精度的同时会牺牲一定的收敛速度,实际应用时要根据问题的特点取长补短,以实

现最高效的全局优化。

参考文献:

- [1] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization[C]//Proc of IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway: IEEE Service Center, 1995: 1942-1948.
- [2] SHI Yu-hui, EBERHART R C. A modified particle swarm optimizer [C]//Proc of IEEE International Conference on Evolutionary Computation. [S. l.]: IEEE, 1998: 69-73.
- [3] EBERHART R C, SHI Yu-hui. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 2001: 94-97.
- [4] RATNAWEERA A, HALGAMUGE S K, WATSON H C. Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time varying acceleration coefficients[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 240-255.
- [5] 张选平, 杜玉平, 秦国强, 等. 一种动态改变惯性权的自适应粒子群算法[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(10): 1039-1042.
- [6] KENNEDY J, MENDES R. Population structure and particle swarm performance[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Washington DC: IEEE Computer Society, 2002: 1671-1675.
- [7] LIANG J J, SUGANTHAN P N. Dynamic multiswarm particle swarm optimizer[C]//Proc of IEEE Swarm Intelligence. 2005: 124-129.
- [8] 王雪飞, 王芳, 邱玉辉. 一种具有动态拓扑结构的粒子群算法研究[J]. 计算机科学, 2007, 34(3): 205-207, 233.
- [9] 高鹰, 谢胜利. 免疫粒子群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(6): 4-6.
- [10] JUANG C F, LIOU Y C. TSK-type recurrent fuzzy network design by the hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization[J]. IEEE Trans on Systems, 2004, 34(2): 997-1006.
- [11] LI Ling-lai, WANG Ling, LIU Li-heng. An effective hybrid PSOSA strategy for optimization and its application to parameter estimation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179(1): 135-146.
- [12] KRINK T, LOVBJERG M. The life cycle model: combining particle swarm optimization, genetic algorithms and hill climbers[C]//Lecture Notes in Computer Science, vol 2439. London: Springer-Verlag, 2002: 621-630.
- [13] HE S, WU Q H, WEN J Y, et al. A particle swarm optimizer with passive congregation[J]. Biosystems, 2004, 78(1-3): 135-147.
- [14] 王俊伟. 粒子群优化算法的改进及应用[D]. 沈阳: 东北大学, 2006.
- [15] Van den BERGH F. An analysis of particle swarm optimizer[C]//Proc of Conference of Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 1998: 67-73.
- [16] MENDES R, KENNEDY J. The full informed particle swarm: simpler, maybe better[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 204-210.
- [17] URSEM R K. Diversity-guided evolutionary algorithms[C]//Proc of Parallel Problem Solving from Nature VII. London: Springer-Verlag, 2002: 462-471.
- [18] 纪震, 廖惠连, 吴青华. 粒子群算法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [19] 李丽, 牛奔. 粒子群优化算法[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2009.