

# 不同一维混沌映射的优化性能比较研究\*

赵欣

(唐山师范学院 物理系, 河北 唐山 063000)

**摘要:** 选择 Logistic、Tent、ICMIC、Bernouilli shift、Chebyshev 和 Sine 映射进行分析, 比较不同一维混沌映射在解决非线性优化问题时的混沌搜索效果。使用了四种二维函数测试六种映射的全局寻优能力、收敛速度和解的精度, 仿真比较了它们的优化性能, 得出六种映射在收敛速度和解的精度方面的性能比较结论。

**关键词:** 混沌映射; 混沌优化; 优化性能比较

中图分类号: TP301

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)03-0913-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.03.031

## Research on optimization performance comparison of different one-dimensional chaotic maps

ZHAO Xin

(Dept. of Physics, Tangshan Teachers College, Tangshan Hebei 063000, China)

**Abstract:** This paper analyzed the Logistic map, Tent map, ICMIC map, Bernouilli shift map, Chebyshev map and Sine map. Compared the chaotic search effect of different one-dimensional chaotic map in solving nonlinear optimization problems. The global optimization ability, convergence rate and solution accuracy of the six kinds of maps were tested using four kinds of two-dimensional function. Compared the performance of their optimization by simulation. Obtained the performance comparison conclusion of the six kinds of maps in convergence rate and solution accuracy.

**Key words:** chaotic maps; chaos optimization; optimization performance comparison

作为一种复杂的非线性系统的动态行为,混沌在过去十年左右得到广泛的关注<sup>[1]</sup>。目前,它已经在不同学科领域如工程<sup>[2]</sup>、医学<sup>[3]</sup>、生态学<sup>[4]</sup>、经济学<sup>[5]</sup>等得到应用。混沌数学定义为简单的确定性系统产生的随机性。一般地,混沌应具有以下主要特性<sup>[6]</sup>: a) 非线性; b) 对初值的敏感依赖性; c) 遍历性; d) 随机性; e) 奇异吸引子, 又叫混沌吸引子; f) 分数维特性; g) 整体稳定局部不稳定; h) 长期不可预测性; i) 轨道不稳定性及分叉; j) 普适性和 Feigenbaum 常数。

### 1 常用一维混沌映射函数

#### 1.1 Logistic 映射

Logistic 映射是一种经典的混沌映射,也称为虫口映射,其最初为预测人口的算法,从数学形式上来看是一个非常简单的混沌映射<sup>[7]</sup>,其数学表达式为

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad 0 < \lambda \leq 4 \quad (1)$$

迭代次数  $N \rightarrow \infty$  时,其混沌序列的概率分布密度函数为切比雪夫型分布,如式(2)所示。

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

将 Logistic 映射迭代 30 000 次得到的(0,1)范围的分布如图 1 所示。从图 1 可知,Logistic 映射混沌序列的分布特点是

中间取值概率比较均匀, [0.1, 0.9] 平均取到 200 多次;而在 (0, 0.1) 和 (0.9, 1) 区间取值多达 1 900 次。因此,当全局最优不在设计变量空间两端时,许多次搜索都在设计变量的两端进行,这对寻找最优点是很不利的,需要多次迭代才能得到最优解,大大降低了算法的效率<sup>[8]</sup>。

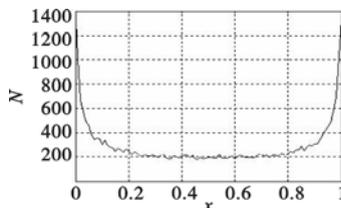


图1 Logistic映射的概率分布

#### 1.2 Tent 映射

Tent 映射又称帐篷映射,是分段线性的一维映射,具有均匀的概率密度、功率谱密度和理想的相关特性。其表达式为

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & x_n < 0.5 \\ 2(1-x_n) & x_n \geq 0.5 \end{cases} \quad (3)$$

Tent 映射迭代序列中存在小周期,如 4 周期 (0.2, 0.4, 0.6, 0.8); 还存在不稳周期点,如 0.25, 0.5, 0.75 都将迭代到不动点 0。为了不趋向不动点,文献[9]采用引入随机方程的方法改进 Tent 映射: 如果  $x_n = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  或  $x_n = x_{n+m}$ ,  $m = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 则引入式(4)加以改进, Tent 映射在扰动下

收稿日期: 2011-08-12; 修回日期: 2011-09-18 基金项目: 唐山市科技局计划项目(10140201C-4); 河北省科学技术研究与发展计划项目(10215672)

作者简介: 赵欣(1978-), 女, 河北唐山人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为机电系统状态监测与诊断、热工系统智能控制及仿真等(zhaoxin0661@sina.com)。

重新进入混沌状态。

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2(x_n + 0.1 \times \text{rand}(0,1)) & 0 \leq x_n \leq 0.5 \\ 2(1 - (x_n + 0.1 \times \text{rand}(0,1))) & 0.5 < x_n \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

### 1.3 ICMIC 映射

He 等人<sup>[10]</sup>提出无限折叠迭代混沌映射(iterative chaotic map with infinite collapses, ICMIC)形式,并从数学角度严格讨论了它的混沌特性,该混沌映射形式有较大的 Lyapunov 指数,对迭代的初始值有更强的敏感性。函数如式(5)所示。

$$x_{n+1} = \sin\left(\frac{a}{x_n}\right) \quad a \in (0, \infty) \quad (5)$$

### 1.4 Bernoulli shift 映射

Bernoulli shift 映射的数学表达式为

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{1-\lambda} & 0 < x_n \leq 1-\lambda \\ \frac{x_n - (1-\lambda)}{\lambda} & 1-\lambda < x_n < 1 \end{cases} \quad (6)$$

特殊形式<sup>[11]</sup>为

$$x_{n+1} = 2x_n \text{ mod } 1 \quad (7)$$

式(7)与 Tent 映射有些类似,所以 Bernoulli shift 映射迭代序列中也存在小周期,如 4 周期(0.2, 0.4, 0.6, 0.8);还存在不稳周期点,如 0.25, 0.5, 0.75 都将迭代到不动点 0。所以把文献[9]中的方法引入到 Bernoulli shift 映射中,形成改进的 Bernoulli shift 映射:如果  $x_n = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  或  $x_n = x_{n+m}$ ,  $m = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,则引入式(8)加以改进, Bernoulli shift 映射在扰动下重新进入混沌状态。

$$x_{n+1} = 2(x_n + 0.1 \times \text{rand}(0,1)) \text{ mod } 1 \quad (8)$$

### 1.5 Chebyshev 映射

Chebyshev 混沌序列<sup>[12]</sup>是一种一维混沌映射,其迭代方程简单、易于实现。 $k$  阶 Chebyshev 映射表达式为

$$x_{n+1} = \cos(k \cos^{-1} x_n) \quad k=4 \quad x_n \in [-1, 1] \quad (9)$$

这是一个把区间  $[-1, 1]$  映射到区间  $[-1, 1]$  的满映射。

### 1.6 Sine 映射

Sine 映射的表达式为

$$x_{n+1} = \frac{a}{4} \sin(\pi x_n) \quad 0 < a \leq 4 \quad (10)$$

正弦函数由于其特殊的值域区间,  $x_{n+1} \in [-1, 1]$ , 可将自变量和值域均控制在区间  $[-1, 1]$ , 对某些特殊领域非常有意义<sup>[13]</sup>。

## 2 常用测试函数及评价方法

为了测试上述六种混沌映射的全局寻优能力、收敛速度和解的精度,使用下面四种具有多峰值、非连续、很难极小化等特点的二维函数进行测试。

### 2.1 常用测试函数

1) 函数 1——Branin 函数

$$f_1(x_1, x_2) = (x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6)^2 + 10(1 - \frac{1}{8\pi}) \times \cos(x_1) + 10 \quad (-5 \leq x_i \leq 15)$$

函数最优值约等于 0.397 9。最优状态为  $(-3.142, 12.275)$  和  $(3.142, 2.275)$  两处。一个与全局最优值很接近的局部极小值点为  $(9.425, 2.425)$ , 局部极小值为 0.400 4。其图形如图 2(a) 所示。

2) 函数 2——Goldstein Price 函数

$$f_2(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 \cdot (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \times [30 + (2x_1 - 3x_2)^2 (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)] \quad (|x_i| \leq 2)$$

函数最优值等于 3。最优状态为  $(0, -1)$ , 附近有四个极小值点。其图形如图 2(b) 所示。

3) 函数 3——Rastrigin 函数

$$f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \cos 18x_1 - \cos 18x_2 \quad |x_i| \leq 1$$

函数最优值等于 -2。最优状态为  $(0, 0)$ , 大约有 50 个极小值点, 呈格子状。其图形如图 2(c) 所示。

4) 函数 4——Schaffer's F6 function 函数

$$f_4(x_1, x_2) = 0.5 + \frac{\sin^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5}{[1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2} \quad |x_i| \leq 10$$

函数最优值等于 0。最优状态为  $(0, 0)$ 。该函数在最优值附近大约 3.14 范围内存在无数多个局部极小值将其包围。在算法寻优搜索过程中,很容易停滞在这些局部极小值点,陷入未成熟收敛。其图形如图 2(d) 所示。

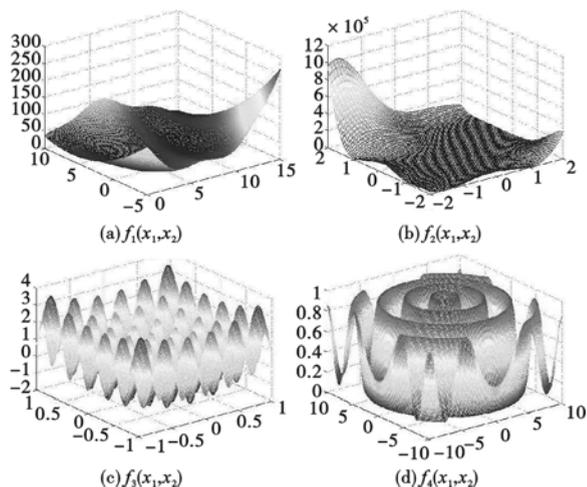


图 2 测试函数的三维图形

### 2.2 评价方法

评价一个算法性能的好坏,不仅要看它最终能否找到全局最优解,而且要看它找到全局最优解所用计算时间。也就是说,既要考察其优化精度,也要考察其搜索速度<sup>[14]</sup>。

1) 总迭代次数/运算时间 通常用迭代次数或计算机运算时间来表示算法的搜索速度。因为研究者使用的计算机机型、计算机语言、编程技巧以及计算机所处的进程都不尽相同,即使是相同的算法其运算时间也会有较大差异,所以下面采用程序寻优的时间对算法的搜索速度作横向比较,作为判断不同混沌映射搜索速度的依据(但是没有与其他文献中的结果相比)。

2) 误差 本次测试没有采用偏差这一指标,而是直接把不同算法的全局最优值和理论最优值的差的绝对值作为误差来评价算法的精度,这样会更加直观地看出算法搜索的最优值与目标函数理论最优值的接近程度。

## 3 混沌优化算法

为了测试六种混沌映射的性能,测试采用最基本的混沌优化算法。其流程如图 3 所示。

## 4 优化性能比较

为比较各种混沌映射的性能,采用上述混沌优化算法的计算步骤,分别对上述四种测试函数进行寻优测试,对每种混沌

映射进行 50 次计算,然后取平均值,寻优结果如表 1~4 所示。对于函数 1~4,寻优精度分别设为  $10^{-3}$ 、 $10^{-2}$ 、 $10^{-2}$  和  $10^{-3}$ 。

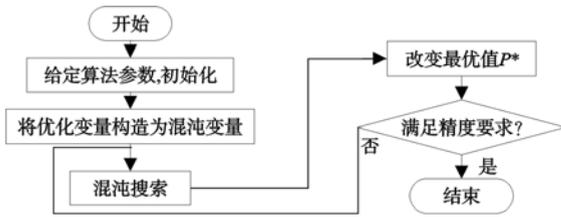


图3 基本混沌优化算法流程

表 1 六种映射对函数 1 的寻优性能

| 混沌映射       | 平均计算时间/s | 平均迭代次数 | 最长迭代次数 | 平均寻优误差               |
|------------|----------|--------|--------|----------------------|
| Logistic   | 3.318    | 77.16  | 444    | $4.8 \times 10^{-4}$ |
| Tent       | 1.617    | 35.16  | 120    | $4.6 \times 10^{-4}$ |
| ICMIC      | 10.989   | 252.78 | 1184   | $4.0 \times 10^{-4}$ |
| Bernouilli | 2.909    | 62.06  | 195    | $4.5 \times 10^{-4}$ |
| Chebyshev  | 11.167   | 242.30 | 974    | $4.2 \times 10^{-4}$ |
| Sine       | 3.383    | 75.82  | 317    | $5.2 \times 10^{-4}$ |

从表 1 的计算结果来看,对于函数 1,Tent 映射的寻优时间最短,而 Chebyshev 映射的寻优时间最长;而从平均寻优精度来看,ICMIC 映射精度最高,Sine 映射精度最低。

表 2 六种映射对函数 2 的寻优性能

| 混沌映射       | 平均计算时间/s | 平均迭代次数 | 最长迭代次数 | 平均寻优误差                |
|------------|----------|--------|--------|-----------------------|
| Logistic   | 8.250    | 194.22 | 603    | $5.28 \times 10^{-3}$ |
| Tent       | 0.748    | 16.38  | 66     | $3.52 \times 10^{-3}$ |
| ICMIC      | 26.833   | 612.84 | 2286   | $4.54 \times 10^{-3}$ |
| Bernouilli | 0.643    | 13.92  | 70     | $2.89 \times 10^{-3}$ |
| Chebyshev  | 33.274   | 724.72 | 2844   | $4.34 \times 10^{-3}$ |
| Sine       | 7.560    | 174.22 | 845    | $4.84 \times 10^{-3}$ |

从表 2 的计算结果来看,对于函数 2,Bernouilli shift 映射的寻优时间最短,而 Chebyshev 映射的寻优时间最长,而且两者相差的时间有很大差别。Bernouilli shift 映射平均只要 0.643 s,平均迭代 13.92 次就能找到最优点,而 Chebyshev 映射平均要 33.274 s,平均迭代 724.72 次才能找到最优点。从表中可看出,对于函数 2,Chebyshev 和 ICMIC 映射的计算时间都很长,说明这两种映射不适合对函数 2 进行寻优计算。从平均寻优精度来看,Bernouilli shift 映射精度最高,Logistic 映射精度最低。

表 3 六种映射对函数 3 的寻优性能

| 混沌映射       | 平均计算时间/s | 平均迭代次数 | 最长迭代次数 | 平均寻优误差                |
|------------|----------|--------|--------|-----------------------|
| Logistic   | 0.910    | 21.48  | 85     | $5.01 \times 10^{-3}$ |
| Tent       | 0.649    | 14.44  | 60     | $5.60 \times 10^{-3}$ |
| ICMIC      | 2.849    | 66.36  | 261    | $4.49 \times 10^{-3}$ |
| Bernouilli | 0.535    | 11.38  | 32     | $4.89 \times 10^{-3}$ |
| Chebyshev  | 3.626    | 78.40  | 557    | $3.95 \times 10^{-3}$ |
| Sine       | 1.125    | 25.78  | 149    | $4.54 \times 10^{-3}$ |

从表 3 的计算结果来看,对于函数 3,Bernouilli shift 映射的寻优时间最短,而 Chebyshev 映射的寻优时间最长;从平均寻优精度来看,Chebyshev 映射精度最高,Tent 映射精度最低。

从表 4 的计算结果来看,对于函数 4,Tent 映射的寻优时间最短,而 Chebyshev 映射的寻优时间最长;从平均寻优精度来看,Tent 映射精度最高,Bernouilli shift 映射精度最低。

对表 1~4 综合分析来看,如果单纯追求高的计算速度,

Tent 和 Bernouilli shift 映射是在这六种映射中计算时间最短的,这与 Tent 和 Bernouilli shift 映射混沌序列的均匀分布性质有关,这两种映射的均匀分布性质有效提高了搜索效率。如果要追求高的寻优精度,没有特别明显突出的映射,比如对于函数 4,Tent 映射精度最高,而对于函数 3,Tent 映射精度最低。从表 2 中还可以看出,Chebyshev 和 ICMIC 映射不适合对函数 2 进行寻优计算,其寻优时间和迭代次数与计算最快的 Bernouilli shift 和 Tent 映射比较,相差均大于 30 倍。

表 4 六种映射对函数 4 的寻优性能

| 混沌映射       | 平均计算时间/s | 平均迭代次数 | 最长迭代次数 | 平均寻优误差                |
|------------|----------|--------|--------|-----------------------|
| Logistic   | 6.307    | 146.10 | 672    | $4.75 \times 10^{-4}$ |
| Tent       | 3.797    | 81.38  | 329    | $4.58 \times 10^{-4}$ |
| ICMIC      | 14.989   | 339.38 | 1770   | $5.27 \times 10^{-4}$ |
| Bernouilli | 4.504    | 95.12  | 475    | $5.78 \times 10^{-4}$ |
| Chebyshev  | 18.409   | 393.64 | 1162   | $5.52 \times 10^{-4}$ |
| Sine       | 6.400    | 143.58 | 691    | $4.96 \times 10^{-4}$ |

## 5 结束语

通过分析,可以得出如下结论:Tent 和 Bernouilli shift 映射是这六种映射中计算时间最短的,如果要追求高的寻优精度,没有特别明显突出的映射。这说明,没有一种映射能够超越其他映射对所有问题和所有评价标准都适用。所以,在以后选择混沌映射时,还要针对不同问题和不同评价标准选择具体问题所适合的混沌映射。但因为 Tent 和 Bernouilli shift 映射混沌序列的均匀分布性质,有效提高了搜索效率。所以,如果单纯追求高的搜索效率,可以先选择 Tent 和 Bernouilli shift 映射。

## 参考文献:

- [1] HE Yao-yao, ZHOU Jian-zhong, XIANG Xiu-qiao, et al. Comparison of different chaotic maps in particle swarm optimization algorithm for long-term cascaded hydroelectric system scheduling [J]. *Chaos, Solitons and Fractal*, 2009, 42(5):3169-3176.
- [2] 谭跃,谭冠政,叶勇,等. 具有混沌局部搜索策略的双种群遗传算法[J]. *计算机应用研究*, 2011, 28(2):469-471.
- [3] 沈小卫,何明一. 一种基于混合优化算法的医学图像配准方法[J]. *计算机应用研究*, 2010, 27(8):3159-3161.
- [4] 张真,李典谟,张培义,等. 自然种群中混沌的检测及其在种群动态研究中的意义[J]. *生态学报*, 2003, 23(10):1951-1962.
- [5] 何孝星,赵华. 关于混沌理论在金融经济学与宏观经济中的应用研究述评[J]. *金融研究*, 2006(7):166-173.
- [6] 王爽心. 混沌理论在电力系统优化控制中的应用研究[D]. 北京:北京交通大学,2006:16-17.
- [7] 荣成林. Logistic 映射在提高 DES 安全性中的应用[J]. *河北大学学报:自然科学版*, 2011, 31(2):218-224.
- [8] 李涵. 基于新型混沌混合优化算法的非线性负荷控制研究[D]. 北京:北京交通大学,2009:12-13.
- [9] 张浩,张铁男,沈继红,等. Tent 混沌粒子群算法及其在结构优化决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2008, 23(8):857-862.
- [10] HE Di, HE Chen, JIANG Ling-ge, et al. A chaotic map with infinite collapses[C]//Proc of IEEE Proceedings TENCON. Malaysia: Kuala Lumpur, 2000:95-99.
- [11] 孟溶. 伯努利移位映射周期轨道在计算机上的实现[J]. *浙江大学学报*, 2001, 35(4):459-462.
- [12] 顾敬民,洪文晓,梁涛. 一种改进型 Chebyshev 混沌序列及其性能分析[J]. *军事通信技术*, 2006, 27(1):43-46.
- [13] 陈朝,汤天浩. 一种基于正弦映射的混沌交织器设计及应用[J]. *计算机应用研究*, 2010, 27(11):4276-4278.
- [14] 顾勤龙. 混沌理论及其在信息安全和优化中的应用研究[D]. 杭州:浙江工业大学,2003:58-59.