第 29 卷第 3 期
2012 年 3 月

计 算 机 应 用 研 究
Application Research of Computers

Vol. 29 No. 3
Mar. 2012

# 一种无平方根运算的 QRD-LSL 插值算法研究 *

刘尚峰[1,2]，王永民[1]，许　华[1]

（1. 空军工程大学 电讯工程学院，西安 710077；2. 空军雷达学院，武汉 430019）

**摘　要：** 为了降低基于 QR 分解技术的最小二乘格型（QRD-LSL）插值算法的计算复杂度，提出一种无平方根运算的 QRD-LSL 插值算法，并将其用于对直扩系统中窄带干扰的抑制。该算法通过将无平方根运算的 Givens 旋转变换代入原 QRD-LSL 插值算法，避免了 QR 分解过程中的求平方根运算，降低了计算复杂度及硬件实施难度，提高了有限精度场合下算法的鲁棒性。仿真结果表明，改进算法较 QRD-LSL 插值算法具有更小的稳态误差以及更好的数值稳健性，并且保持了良好的 NBI 抑制效果。

**关键词：** 窄带干扰；直扩系统；矩阵分解

**中图分类号：** TP301.6　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1001-3695(2012)03-0897-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.03.026

# Research of QRD-LSL interpolation algorithm based on square-root-free

LIU Shang-feng[1,2], WANG Yong-min[1], XU Hua[1]

(1. *Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an* 710077, *China*; 2. *Air Force Rader Academy, Wuhan* 430019, *China*)

**Abstract:** To reduce the complexity of the QR-decomposition-based least-squares lattices (QRD-LSL) interpolation algorithm used in narrow-band interference (NBI) suppression, this paper proposed a square-root-free (SRF) QRD-LSL interpolation algorithm. The proposed interpolation algorithm, which was developed by applying SRF Givens rotation with feedback mechanism, could effectively avoid the square-root computations in QR-decomposition and improve QRD-LSL interpolation algorithm robustness in finite precision environment. The results of computer simulation confirm that the steady-state performance and the numerical robustness of the proposed algorithm outperforms the conventional QRD-LSL interpolation algorithm and holds good performance of NBI suppression in DSSS.

**Key words:** narrow-band interference; direct sequence spread spectrum (DSSS); matrix decomposition

随着直扩通信系统（DSSS）应用的日益广泛，DSSS 中窄带干扰（NBI）抑制技术逐步发展并完善。常用的自适应时域滤波算法利用 DSSS、噪声和 NBI 信号间的相关特性差异，从观测数据中估计其中的 NBI 成分，再通过抵消以达到抑制 NBI 的目的。其中，最小二乘格型（least-square lattice，LSL）插值算法由于具有稳态误差小、阶间递推无联动效应和数据样值相关性应用充分等优点，受到了广泛关注[1]。

文献[2,3]提出了一种基于正交三角（quadrature right-triangle，QR）分解的 LSL 插值算法，即 QRD-LSL（QR-decomposition-based least-square lattice）插值算法。其优点[1]有：a）避免了传统 LSL 预测和 LSL 插值结构复杂的滤波器权系数计算，极大地降低了运算复杂度；b）具有快速收敛性能；c）在有限精度条件下，比传统 LSL 插值滤波器具有更好的鲁棒性；d）可以采用递推方式实现。随后，文献[4]重点分析了 QRD-LSL 算法组合特征和对称特征对其抑制 DSSS 系统中 NBI 性能的影响，给出了对称型 QRD-LSL 插值算法抑制 NBI 性能最优的结论。但是，由于 QRD-LSL 插值算法在 QR 分解过程中用到了求根运算和正弦旋转因子，这使得上述算法存在着以下两个问题：a）复杂的求根运算成为了降低运算复杂度的瓶颈，且求根运算不利于硬件实现；b）由于正弦旋转因子 $c(n)\leqslant 1$，所以算法中对正弦旋转因子 $c(n)$ 的除法运算可能会增大误差，从而限制了其在有限精度环境下的应用[5]。

针对上述问题，本文在原 QRD-LSL 插值算法基础上，通过采用无平方根运算的基于 Givens 的 QR 分解，提出了一种改进 QRD-LSL 插值算法。该算法在误差阶递推 QR 分解过程中，将标准 Givens 旋转变换用无平方根运算的 Givens 旋转变换代替。一方面，避免了复杂的求根运算，有效降低了原插值算法的运算复杂度；另一方面，利用了递推反馈结构，避免了原算法中对中间余弦旋转因子 $c_{I,N}(n)$ 的除法运算，一定程度上提高了 QRD-LSL 算法在有限精度场合下的稳健性。

## 1　QRD-LSL 插值算法及其流程

假设采样序列 $\{x(i)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，当 $i<0$ 时，$x(i)=0$，$x(n)$ 为最近接收到的采样数据。$(p,f)$ 阶 QRD-LSL 插值算法应用当前数据样值 $x(i-f)$ 相邻的前 $p$ 个和后 $f$ 个数据样值来估计 $x(i-f)$。它与传统 LSL 插值算法不同的是：它根据 LSL 插值算法前、后级之间的无耦特性[2]，将 LSL 插值滤波器产生的 $f$ 个（经时延的）中间前向预测误差、$p$ 个（经时延的）中间后向预测误差和插值误差构造观测数据子空间的正交基，进而利用观测数据矢量与正交基的正交性，得到当前数据样值 $x(i-f)$

**收稿日期：** 2011-07-02；**修回日期：** 2011-08-13　**基金项目：** 国防科技重点实验室基金资助项目（9140C0201010902）

**作者简介：** 刘尚峰（1985-），男，陕西西安人，硕士，主要研究方向为信息对抗和信息安全（14597903@qq.com）；王永民（1973-），男，吉林梅河口人，副教授，硕导，主要研究方向为军事通信抗干扰技术；许华（1976-），男，湖北宜昌人，副教授，主要研究方向为信号盲处理技术、解调技术.

的估计值。为叙述简单，现以(2,2)阶为例简要介绍，并令 $N=p+f$。图 1 所示为(2,2)阶 QRD-LSL 插值算法计算流程框图。

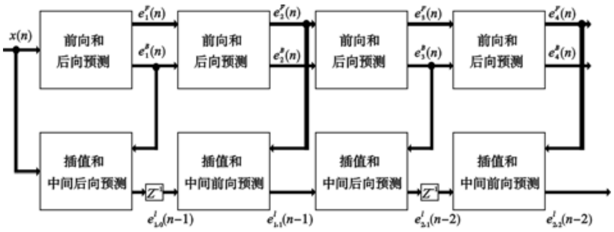


**图1 (2,2)阶QRD-LSL插值算法计算流程框图(BFBF模式)**

由图 1 可见，QRD-LSL 插值算法主要由前/后向预测器、中间前后向预测器和插值器组成。前/后向预测器生成前向预测误差 $e_m^F(n)$ 和后向预测误差 $e_m^B(n)$；中间前/后向预测器生成中间前向预测误差 $e_N^F(i,i-f)$ 和中间后向预测误差 $e_N^B(i,i-f)$；插值器完成前向插值误差 $e_{p,f+1}^I(n-f-1)$ 或后向插值误差 $e_{p+1,f}^I(n-f)$ 的计算。每次迭代时，前/后向预测误差和中间前/后向预测误差需要全部计算出来，而前/后向插值误差则按照 QRD-LSL 插值算法所选用的正交基模式选择一个进行计算。

由于算法推导及流程均较长，限于篇幅，这里列出后向预测误差、中间后向预测误差的递推公式，详细过程见文献[2,5]。

第 $m$ 阶 QRD-LSL 后向预测误差 $e_m^F(n)$ 的递推公式为

$$F_{m-1}(n)=\lambda F_{m-1}(n-1)+(e_{m-1}^F(n))^2 \tag{1}$$

$$c_{F,m-1}(n)=\lambda^{1/2}(F_{m-1}(n-1))^{1/2}/(F_{m-1}(n))^{1/2} \tag{2}$$

$$s_{F,m-1}(n)=e_{m-1}^F(n)/(F_{m-1}(n))^{1/2} \tag{3}$$

$$e_m^B=c_{F,m-1}(n)e_{m-1}^B(n-1)-\lambda^{1/2}s_{F,m-1}(n)\pi_{m-1}^B(n-1) \tag{4}$$

$$\pi_{m-1}^B(n)=\lambda^{1/2}c_{F,m-1}(n)\pi_{m-1}^B(n-1)+s_{F,m-1}(n)e_{m-1}^B(n-1) \tag{5}$$

式中：$c_{F,m-1}(n-1)$ 和 $s_{F,m-1}(n-1)$ 为后向余弦和正弦旋转因子；$F_{m-1}(n)$ 为计算旋转因子用到的中间变量；$\pi_{m-1}^B(n-1)$ 为辅助变量。

中间后向预测误差 $e_{N+1}^B(n,n-f)$ 的递推公式为

$$I_{p,f}(n-f)=\lambda I_{p,f}(n-f-1)+(e_{p,f}^I(n-f))^2 \tag{6}$$

$$c_{I,N}(n)=\lambda^{1/2}I_{p,f}^{1/2}(n-f-1)/I_{p,f}^{1/2}(n-f) \tag{7}$$

$$s_{I,N}(n)=e_{p,f}^I(n-f)/I_{p,f}^{1/2}(n-f) \tag{8}$$

$$e_{N+1}^B(n,n-f)=[e_{N+1}^B(n)+\lambda^{1/2}s_{I,N}(n)\rho_{N+1}^B(n-1)]/c_{I,N}(n) \tag{9}$$

$$\rho_{N+1}^B(n)=[\lambda^{1/2}\rho_{N+1}^B(n-1)+s_{I,N}(n)e_{N+1}^B(n)]/c_{I,N}(n) \tag{10}$$

式中：$s_{I,N}(n)$ 和 $c_{I,N}(n)$ 分别为中间后向正弦和余弦旋转参数；$I_{p,f}(n-f)$ 为计算旋转因子用到的中间变量；$\rho_{N+1}^B(n-1)$ 为辅助变量。

## 2 改进的 QRD-LSL 插值算法

从算法流程可以看出[2,5]，QRD-LSL 插值算法在递推求解各类误差的过程中，采用的是基于 Givens 旋转的标准 QR 分解，如式(2)(3)(6)和(7)，这种运算由于含有平方根运算，所以会消耗较多硬件资源或需要多次循环来实现[6]，不适合在实时处理且硬件资源有限的工程项目中使用。另外，在具体计算中间前/后向误差时，由于需要除以余弦旋转因子 $c_{I,N}(n)$，加之 $c_{I,N}(n)$ 本身满足 $|c_{I,N}(n)|\leq 1$，所以当 $c_{I,N}(n)$ 较小时，将会增大中间前/后向误差发散的可能性，特别是在有限精度场合，$c_{I,N}(n)$ 的值将会被进一步减小，降低了算法的数值稳健性，这就在一定程度上限制了其在工程上的应用。鉴于上述问题，本文介绍一种无平方根运算的基于 Givens 的 QR 分解。

### 2.1 无平方根运算的 Givens 旋转算法

假设标准 Givens 旋转变换如式(11)所示：

$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_m \\ 0 & b'_2 & \cdots & b'_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中实数 $c$ 和 $s$ 满足 $c^2+s^2=1$。

对未经 Givens 变换和变换后的数据矩阵提取一个比例因子，即

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{k_\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \tag{12a}$$

$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_m \\ 0 & b'_2 & \cdots & b'_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{k'_\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{k'_\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \cdots & \alpha'_m \\ 0 & \beta'_2 & \cdots & \beta'_m \end{bmatrix} \tag{12b}$$

式中：$k_\alpha$、$k_\beta$、$k'_\alpha$、$k'_\beta$ 分别为比例因子。需要指出的是，$\sqrt{k_\alpha}$、$\sqrt{k_\beta}$、$\sqrt{k'_\alpha}$、$\sqrt{k'_\beta}$ 仅仅为了算法表述方便，并不需要实际进行计算。若令

$$\alpha_1=1,\bar{c}=k_\alpha/k'_\alpha,\bar{s}=k_\beta b_1/k'_\alpha \tag{13a}$$

则有[7]

$$k'_\alpha=k_\alpha+k_\beta\beta_1^2 \tag{13b}$$

$$\alpha'_j=\alpha_j+\bar{s}\beta'_j,\ j=1,\cdots,m \tag{13c}$$

$$\beta'_j=\beta_j-\beta_1\alpha_j,\ j=2,\cdots,m \tag{13d}$$

式(13a)～(13d)即为无平方根 Givens 变换算法。表 1 中给出了标准 Givens 变换与无平方根 Givens 变换的对应关系。

表 1 标准 Givens 变换与无平方根 Givens 变换

| 标准 Givens 变换 | 无平方根 Givens 变换 | 对应关系 |
|---|---|---|
| $c=a_1/a'_1$ | $\bar{c}=k_\alpha/k'_\alpha$ | $c=\sqrt{\bar{c}}$ |
| $s=b_1/a'_1$ | $\bar{s}=k_\beta b_1/k'_\alpha$ | $s=\sqrt{\bar{s}}$ |
| $(a'_1)^2=a_1^2+b_1^2$ | $k'_\alpha=k_\alpha+k_\beta\beta_1^2$ | $k_\alpha=a_1^2$ |
| | $k'_\beta=(k_\alpha k_\beta)/k'_\alpha$ | $k'_\alpha=(a'_1)^2$ |
| $a'_j=ca_j+sb_j$ | $\alpha'_j=\alpha_j+\bar{s}\beta'_j$ | $a_j\leftrightarrow\alpha_j$ |
| $j=1,\cdots,m$ | $j=1,\cdots,m$ | $b_j\leftrightarrow\beta_j$ |
| $b'_j=cb_j-sa_j$ | $\beta'_j=\beta_j-\beta_1\alpha_j$ | $a'_j\leftrightarrow\alpha'_j$ |
| $j=2,\cdots,m$ | $j=2,\cdots,m$ | $b'_j\leftrightarrow\beta'_j$ |

### 2.2 无平方根运算 QRD-LSL 插值算法

对照表 1 中标准 Givens 变换与无平方根 Givens 变换的关系可以发现，若取 $k_\beta=1$，式(13b)中等式右边的两项因子与式(1)和(6)对应起来，直接代入即可替换原 Givens 变换。但是实际工程中，这种取值往往会影响到数值的稳定性，所以考虑将 $k_\beta$ 作为反射因子保留，并令

$$k_\beta=\bar{c}k_\beta \tag{14}$$

根据表 1 中给出的对应关系，对原算法中第 $m$ 阶后向预测误差 $e_m^F(n)$ 的递推公式的 QR 分解过程进行替换，综合式(13a)～(13d)、式(14)和式(1)～(5)，并分别令 $k_\alpha\triangleq\lambda F_{m-1}(n-1)$，$k_F(n)\triangleq k_\beta$，$b_1\triangleq e_{m-1}^F(n)$，$\beta_j\triangleq e_m^B(n)$，$\alpha'_j\triangleq\pi_{m-1}^B(n)$，代入式(1)～(5)，可得替换后的第 $m$ 阶后向预测误差 $e_m^F(n)$ 的递推公式为

$$F_{m-1}(n)=\lambda F_{m-1}(n-1)+k_F(n)(e_{m-1}^F(n))^2 \tag{15}$$

$$\bar{c}_{F,m-1}(n)=\lambda F_{m-1}(n-1)/F_{m-1}(n) \tag{16}$$

$$\bar{s}_{F,m-1}(n)=k_F(n)e_{m-1}^F(n)/F_{m-1}(n) \tag{17}$$

$$e_m^B(n)=e_{m-1}^B(n-1)-e_{m-1}^F(n)\pi_{m-1}^B(n-1) \tag{18}$$

$$\pi_{m-1}^B(n)=\pi_{m-1}^B(n-1)+\bar{s}_{F,m-1}(n)e_m^B(n) \tag{19}$$

$$k_F(n+1)=\bar{c}_{F,m-1}(n)k_F(n) \tag{20}$$

同理,替换后的中间后向预测误差 $e^B_{N+1}(n,n-f)$ 的递推公式为

$$I_{p,f}(n-f)=\lambda I_{p,f}(n-f-1)+k_{p,f,(n-f-1)}(e^I_{p,f}(n-f))^2 \tag{21}$$

$$\bar{c}_{I,N}(n)=\lambda I_{p,f}(n-f-1)/I_{p,f}(n-f) \tag{22}$$

$$\bar{s}_{I,N}(n)=k_{p,f,(n-f-1)}e^I_{p,f}(n-f)/I_{p,f}(n-f) \tag{23}$$

$$e^B_{N+1}(n,n-f)=e^B_{N+1}(n,n-f-2)+e^I_{p,f}(n-f)\rho^B_{N+1}(n-1) \tag{24}$$

$$\rho^B_{N+1}(n)=\rho^B_{N+1}(n-1)+\bar{s}_{I,N}(n-1)e^B_{N+1}(n,n-f) \tag{25}$$

$$k_{p,f,(n-f)}=\bar{c}_{I,N}(n)k_{p,f,(n-f-1)} \tag{26}$$

以上就是经过替换后的误差计算递推公式。可以看出,采用基于无平方根 Givens 变换的 QR 分解过程可避免标准 Givens 变换中的 $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ 运算,并且保持较低的运算量。表 2 中给出了改进算法与原 QRD-LSL 插值算法的运算复杂度比较。

表 2　算法的运算复杂度比较

| 算法 | 乘法 | 平方根运算 |
|---|---|---|
| QRD-LSL 插值 | $20N$ | $N$ |
| 改进算法 | $26N$ | 0 |

从表 2 可以看出,改进算法较原算法,乘法操作多了 $6N$ 次,增加了运算量,但是,由于没有复杂的求根运算,所以整体的运算复杂度较原算法有了一定程度的改进,确实达到了降低运算复杂度的目的。另外,将式(4)(5)、式(9)(10)分别与式(18)(19)(24)(25)比较后发现,无平方根的 Givens 变换算法采用了递推反馈结构实现,这将带来两个好处,一是工程中递推反馈结构往往能提高算法的鲁棒性;二是避免递推中间前/后向误差时对 $c_{I,N}(n)$ 的除法运算。

关于前/后向插值误差的替换,其方法与后向预测误差替换方法类似,只是增加了 $k_{p,f+1,(n-f-1)}$ 和 $k_{p+1,f,(n-f-1)}$ 两个反射因子及其递推公式,这里不再赘述。

## 3　算法仿真

为了验证本文算法的有效性,采用 MATLAB 7.0.1 对加有 NBI 的 DSSS 系统进行计算机仿真。仿真中,扩频码采用长度为 32 的 M 序列、自回归干扰建模方差为 0.01 的高斯白噪声 $n(k)$ 通过一个极点均为 0.99 的二阶 IIR 滤波器后所产生的输出。QRD-LSL 插值算法的 λ 和 δ 分别取 $\lambda=0.99$, $\delta=1$,滤波器阶数为(2,2)阶。改进算法的反射因子 $k_\beta$、$k_{p,f,(n-f-1)}$,$k_{p,f+1,(n-f-1)}$ 以及 $k_{p+1,f,(n-f-1)}$ 初始值分别取为 1,其他初始化条件与原算法相同。

图 2 为有限精度场合(数据变量存储单位的容量为 8 bit)时,本文算法与 QRD-LSL、LSL 插值算法的学习曲线比较,其中干扰类型为自回归 NBI,信干比为 −18 dB。由图 2 可见,无平方根 QRD-LSL 插值算法较前两种算法性能都有所提升,较 LSL 插值算法约有 4.5 dB 的性能提升,较 QRD-LSL 插值算法收敛速度基本相同,但稳态误差相对较小。另外,在整个学习过程中,无平方根 QRD-LSL 插值算法的学习曲线无明显畸变和波动现象发生,干扰抑制性能为三者中最优。

图 3 为有限计算精度场合无平方根 QRD-LSL 插值算法和 QRD-LSL 插值算法抑制自回归干扰的学习曲线。其中,前者的数据变量存储单位容量为 5 bit ,后者的存储容量分别为 12 bit 和 5 bit,信干比为 −16 dB,由图可见,无平方根 QRD-LSL 插值算法(5 bit)较相同精度的 QRD-LSL 插值算法在收敛速度和误差性能上都有较大幅度提升,稳态误差均方性能约有 4 dB 的提升,而与高精度(12 bit)的 QRD-LSL 插值算法相比,收敛速度近似相等,稳态误差均方性能略有损失,约为 3 dB。这主要是因为改进算法中的无平方根运算以及反馈因子的共同作用,使得误差数值的波动性有所降低,同时还在一定程度上加快了算法收敛速度。

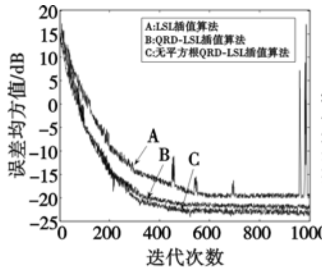


图2　有限精度场合三种算法的学习曲线

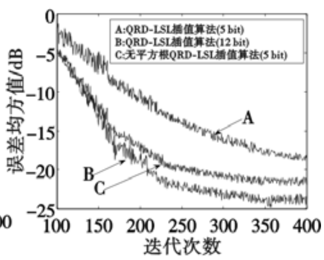


图3　不同计算精度场合算法的学习曲线

图 4 给出了无平方根 QRD-LSL 插值算法与 QRD-LSL 插值算法对自回归干扰的抑制效果,其中信干比变化范围为 −5 ~ −20 dB。从图 4 中可以看出,本文算法明显优于原算法。在不同信干比情况下,本文算法对信噪比改善量比原算法平均高出约 2 dB。

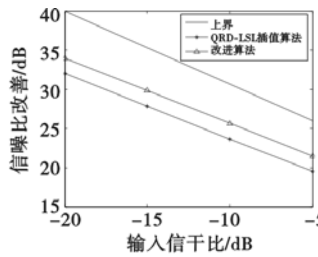


图4　自回归(AR)干扰抑制效果比较

## 4　结束语

本文提出一种改进的 QRD-LSL 插值算法,利用无平方根运算的 Givens 旋转变换对 QRD-LSL 插值算法进行了改进,降低了运算复杂度,提高了收敛速度。仿真结果验证了本文算法在降低系统运算复杂度的同时,保持了较小的稳态误差,并且在有限精度场合下具有较高的鲁棒性。

**参考文献:**

[1]　郭黎利,殷复莲,卢满宏. DSSS/CDMA 系统窄带干扰抑制技术概述[J]. 电子学报,2009,37(10):2248-2255.

[2]　YUAN J T. QR-decomposition-based least-squares lattice interpolator [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000,48(1):70- 79.

[3]　孙志国,郭黎利,顾学迈. 一种具有窄带干扰抑制能力的改进型 LSL 插值算法[J]. 电路与系统学报, 2008,13(3):13-17.

[4]　孙志国,郭黎利,顾学迈. QRD-LSL 插值算法内部特征对窄带干扰抑制性能的影响[J]. 电路与系统学报, 2008,13(4):144-148.

[5]　孙志国. 直扩系统中窄带干扰自适应抑制算法的研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2005:69-80.

[6]　YUAN J T. A square-root-free QRD-LSL interpolation algorithm [C]//Proc of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2008:3813-3816.

[7]　HSIEH S F, LIU K J R, YAO K. A unified square-root-free approach for QRD-based recursive least squares estimation [J]. IEEE Trans on Signal Processing,1993,41(3):1405-1409.