基于凸优化的自适应 CV 模型*

朱晓舒[1,2]，孙权森[1]，夏德深[1]
(1. 南京理工大学 计算机科学与技术学院，南京 210094；2. 南京师范大学 分析测试中心，南京 210097)

摘　要：针对 CV 模型分割精度不高、分割速度缓慢和易陷于局部最优等缺点，提出了一种新的基于凸优化的自适应 CV 模型。首先，引入了自适应权重项，对拟合中心的计算采用加权平均，提高了拟合中心计算的准确性；然后，在模型中加入了凸优化技术，以获取模型的全局最优解；最后，采用了 Split Bregman 方法进行快速求解，有效地提高了分割效率。实验结果表明，基于凸优化的自适应 CV 模型有效地提高了分割精度和效率，对初始化也具有较好的鲁棒性。

关键词：图像分割；CV 模型；凸优化；Split Bregman

中图分类号：TP391.41　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2012)02-0779-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.02.102

Adaptive CV model using convex optimization

ZHU Xiao-shu[1,2], SUN Quan-sen[1], XIA De-shen[1]
(1. *School of Computer Science & Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094, *China*; 2. *Center for Analysis & Testing, Nanjing Normal University, Nanjing* 210097, *China*)

Abstract: The CV model can not accurately segment an image, and the segmentation speed is slow, and the model is very easy to trapp in local optimum. In order to solve the problems, this paper proposed a new adaptive CV model using convex optimization. First, to improve the accuracy of fitting center, it introduced the adaptive weight and used the weighted average to caculate the fitting center. Second, convex optimization was added to the new model to get global minima. Finally, the Split Bregman method could effectively improve the segmentation speed. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm can get the more accurate and efficient segmentation results, and it is robust to the choice of initialization.

Key words: image segmentation; CV model; convex optimization; Split Bregman

0　引言

近年来，活动轮廓模型[1]在边缘检测、医学图像分割以及运动跟踪中得到了广泛的应用和很大的发展，是目前计算机视觉领域中最活跃的研究主题之一。活动轮廓模型(active contour model)是一条能量递减曲线，由轮廓自身特征决定的内部能量和图像特征决定的外部能量共同支配，在能量最小的原则下移动并最终停止于所要寻找的物体边缘附近。活动轮廓模型一般分为基于边界[2]和基于区域[3~5]两类。基于边界的活动轮廓模型有几何活动轮廓模型[6]、测地线活动轮廓模型[7]等，主要依赖于图像梯度来确定边界，因此，对于模糊边界或噪声较大的图像分割效果不佳。基于区域的活动轮廓模型则更多地考虑了图像全局特征，利用区域信息来控制曲线的移动。1989 年，Mumford 等人[8]提出了基于区域的 Mumford-Shah (MS)模型；2001 年 Chan 等人对 MS 模型作了简化，提出了 CV 模型[9]，该模型以分片常数形式拟合图像，并使用了水平集方法演化能量曲线，相比基于边界的活动轮廓模型，CV 模型对高噪声图像和模糊边界可获得理想的分割结果。

但 CV 模型也存在以下缺点：a)分割精度不高，特别是对含噪声且结构复杂的图像(如脑核磁共振图像等)，分割效果不好；b)对初始化曲线较为敏感，如果初始化曲线选取得不好，常常会导致分割的失败；c)分割速度慢，传统的 CV 模型使用梯度下降法来求解，收敛速度慢，分割时间过长，特别是应用于三维图像分割时，时间消耗巨大。针对上述情况，本文提出了一种改进型 CV 模型。

1　Chan-Vese 模型

Chan 和 Vese 简化了 Mumford-Shah 模型，提出了一种新的基于区域的活动轮廓模型，即 CV 模型。该模型假设图像分为目标和背景两类，其能量函数定义如下：

$$E(c_1,c_2,C)=\lambda_1\int_{\text{inside}(C)}(I(x)-c_1)^2\mathrm{d}x+\lambda_2\int_{\text{outside}(C)}(I(x)-c_2)^2\mathrm{d}x+\nu\ \text{length}(C) \tag{1}$$

其中：λ_1、λ_2 和 ν 是非负常量；outside(C)和 inside(C)分别代表轮廓线 C 的背景区域和目标区域；c_1 和 c_2 分别是目标区域和背景区域灰度拟合中心。能量函数式(1)的前两项为拟合项，用于检测目标区域和背景区域；最后一项为长度项，用于保持能量曲线的光滑。

为了最小化能量函数式(1)，通常采用水平集方法。引入

收稿日期：2011-06-14；**修回日期**：2011-07-23　**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(60773172)；国家教育部博士学科点基金资助项目(200802880017)；江苏省自然科学基金资助项目(BK2008411)

作者简介：朱晓舒(1978-)，男，湖南湘潭人，讲师，博士研究生，主要研究方向为图像处理、计算机视觉(xiaoshu_zhu78@163.com)；孙权森(1963-)，男，山东梁山人，教授，博导，博士，主要研究方向为模式识别、图像处理、医学影像分析、遥感信息系统等；夏德深(1941-)，男，江苏南京人，教授，博导，博士，主要研究方向为图像处理、卫星遥感、模式识别.

水平集函数 $\phi(x,y)$，如果点 (x, y) 在曲线 C 内部，则 $\phi(x,y)>0$；如果点 (x, y) 在曲线 C 外部，则 $\phi(x,y)<0$；如果点 (x, y) 在曲线 C 上，则 $\phi(x,y)=0$。这样，能量函数式(1)可以写为

$$E(c_1,c_2,\phi)=\lambda_1\int_\Omega(I(x)-c_1)^2H(\phi)\mathrm{d}x+\lambda_2\int_\Omega(I(x)-c_2)^2(1-H(\phi))\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega(\nabla H(\phi))\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中：$H(\phi)$ 为 Heaviside 函数。目标区域和背景区域灰度拟合中心 c_1 和 c_2 的计算公式如下：

$$\begin{cases}c_1=\dfrac{\int_\Omega I(x)H(\phi)\mathrm{d}x}{\int_\Omega I(x)H(\phi)\mathrm{d}x}\\[2ex] c_2=\dfrac{\int_\Omega I(x)(1-H(\phi))\mathrm{d}x}{\int_\Omega I(x)(1-H(\phi))\mathrm{d}x}\end{cases} \tag{3}$$

最小化能量函数式(2)的一般方法是梯度下降法，即求解有关 ϕ 的 Euler-Lagrange 方程：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\delta(\phi)\left[-\lambda_1(I-C_1)^2+\lambda_2(I-C_2)^2+\nu\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right] \tag{4}$$

2 本文的方法

2.1 基于加权均值的 CV 模型

在传统的 CV 模型中，对区域拟合中心的计算并不考虑拟合中心与考察点间的距离，而是对区域内所有考察点赋予了相同的计算权重，进行简单的算术平均，因此，分割精度不高。对于那些处于边界上的考察点，由于其距离目标区域拟合中心和背景区域拟合中心几乎相同，CV 模型往往难以分割。为此，本文引入自适应权重项 $\omega_1(x)$ 和 $\omega_2(x)$，对拟合中心进行加权计算，从而提高分割精度。经改进的目标区域拟合中心 m_1 和背景区域拟合中心 m_2 的计算公式如下：

$$\begin{cases}m_1=\dfrac{\int_\Omega\omega_1^2I(x)H(\phi)\mathrm{d}x}{\int_\Omega\omega_1^2I(x)H(\phi)\mathrm{d}x}\\[2ex] m_2=\dfrac{\int_\Omega\omega_2^2I(x)(1-H(\phi))\mathrm{d}x}{\int_\Omega\omega_2^2I(x)(1-H(\phi))\mathrm{d}x}\end{cases} \tag{5}$$

其中：$\omega_1(x)$ 和 $\omega_2(x)$ 为自适应权重项，其定义为

$$\begin{cases}\omega_1(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{(I(x)-m_1)^2}{(I(x)-m_2)^2}}\\[3ex] \omega_2(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{(I(x)-m_2)^2}{(I(x)-m_1)^2}}\end{cases} \tag{6}$$

由式(5)和(6)可以看出，当考察点 x 的灰度值 $I(x)$ 和目标区域拟合中心 m_1 相似度越大，其权重项 $\omega_1(x)$ 就越大，于是该点对目标区域拟合中心计算的影响就越大。经过这样的加权平均后，得到的均值是目标区域的加权中心，因此计算出的拟合中心会更加准确。同时，对于在目标区域内的噪声点，由于其距离目标区域均值较远，该点的自适应权重项 $\omega_1(x)$ 较小，对目标区域拟合中心 m_1 的贡献就变得很小，因而可以有效防止噪声点对均值的影响。

改进后的 CV 模型可以写成

$$E(m_1,m_2,\phi)=\lambda_1\int_\Omega(I(x)-m_1)^2H(\phi)\mathrm{d}x+\lambda_2\int_\Omega(I(x)-m_2)^2(1-H(\phi))\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega(\nabla H(\phi))\mathrm{d}x \tag{7}$$

与原来的 CV 模型不同，m_1 和 m_2 为目标区域和背景区域的加权拟合中心。

能量函数式(7)是非凸的，这就意味着该模型的最小化问题的求解受初始化影响较大。不好的初始化，会让能量函数式(7)在最小化过程中陷入局部极值，从而无法获取正确的分割结果。为此，受文献[10,11]的启发，本文将非凸的能量式(7)转换为一个凸的能量，得到一个全局最优解以克服初始化的影响。最小化能量函数式(7)可以进一步写成

$$\min_{\phi\in\{0,1\}}E(m_1,m_2,\phi)=\lambda_1\int_\Omega(I(x)-m_1)^2\phi\mathrm{d}x+\lambda_2\int_\Omega(I(x)-m_2)^2(1-\phi)\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega(\nabla\phi)\mathrm{d}x \tag{8}$$

由于分割变量空间 $\{0,1\}$ 是非凸的，因此能量式(7)最小化问题仍然是非凸的，利用一组在凸集中隶属度函数 u 来替代 ϕ。如文献[10]所述，限定隶属度函数 u 处于一个凸集 $[0,1]$ 中：

$$\min_{u\in[0,1]}E_G(m_1,m_2,u)=\lambda_1\int_\Omega(I(x)-m_1)^2u\mathrm{d}x+\lambda_2\int_\Omega(I(x)-m_2)^2(1-u)\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega(\nabla u)\mathrm{d}x \tag{9}$$

这样，最小化能量函数式(9)就是一个凸优化问题。事实上，下面的定理描述了式(9)存在一个全局最优解。

定理 1 假设 $m_1,m_2\in\mathscr{R}$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathscr{R}_+$ 如果 u 是能量 $E_G(m_1,m_2,u)$ 的任意一个最优解，那么对于任意的 $\mu\in[0,1]$，特征函数 $1_{\Omega_{C(u)}=\{x:u(x)>u\}}(x)$ 是能量 $E_G(m_1,m_2,u)$ 的全局最优解。

2.2 基于 Split Bregman 方法的能量最小化

本文对式(9)采用 Split Bregman 方法来快速求解 u。最小化式(9)等价于下式：

$$\min_{u\in[0,1],u}\int_\Omega(|\nabla u|+\lambda_1ur_1+\lambda_2(1-u)r_2)\mathrm{d}x \tag{10}$$

其中：$r_1=(I(x)-m_1)^2$，$r_2=(I(x)-m_2)^2$。

根据文献[12]，引入新的向量 $\boldsymbol{d}$。因此，最小化式(9)可以改写成如下形式：

$$\min_{u\in[0,1],\boldsymbol{d}}\int_\Omega(|\boldsymbol{d}|+\lambda_1ur_1+\lambda_2(1-u)r_2)\mathrm{d}x\quad \text{such that } \boldsymbol{d}=\nabla u \tag{11}$$

用 Bregman 方法保证 $\boldsymbol{d}=\nabla u$，可得

$$\begin{cases}\underset{u\in[0,1],\boldsymbol{d}}{\operatorname{argmin}}\int_\Omega(|\boldsymbol{d}|+\lambda_1u(I(x)-m_1)^2+\\ \lambda_2(1-u)(I(x)-m_2)^2+\\ \dfrac{\mu}{2}\|\boldsymbol{d}-\nabla u-b^k\|^2\mathrm{d}x\quad k>0\\ b^{k+1}=b^k+\nabla u^{k+1}-\boldsymbol{d}^{k+1}\end{cases} \tag{12}$$

根据变分法原理，最优解满足如下表达式：

$$\mu\Delta u=\lambda(r_1-r_2)-\mu\mathrm{div}(b^k-\boldsymbol{d}^k)\quad u\in[0,1] \tag{13}$$

采用 Gauss-Seidel 迭代策略求解 u^{k+1}。

$$\alpha_{i,j}=\boldsymbol{d}^{x,k}_{i-1,j}-\boldsymbol{d}^{x,k}_{i,j}-b^{x,k}_{i-1,j}+b^{x,k}_{i,j}+\boldsymbol{d}^{y,k}_{i,j-1}-\boldsymbol{d}^{y,k}_{i,j}-b^{y,k}_{i,j-1}+b^{y,k}_{i,j}$$

$$\beta_{i,j}=\frac{1}{4}(u^{k,n}_{i-1,j}+u^{k,n}_{i+1,j}+u^{k,n}_{i,j-1}+u^{k,n}_{i,j+1})-\frac{\lambda}{\mu}(r_1-r_2)_{i,j}+\alpha_{i,j}$$

$$u^{k+1,n+1}_{i,j}=\max\{\min\{\beta_{i,j},1\},0\} \tag{14}$$

采用变分法，本文得到 $\boldsymbol{d}^{k+1}$ 的最优解：

$$\boldsymbol{d}^{k+1}=\frac{\nabla u^{k+1}+b^k}{|\nabla u^{k+1}+b^k|}\max(|\nabla u^{k+1}+b^k|-\mu^{-1},0) \tag{15}$$

最终，本文模型的算法步骤如下：

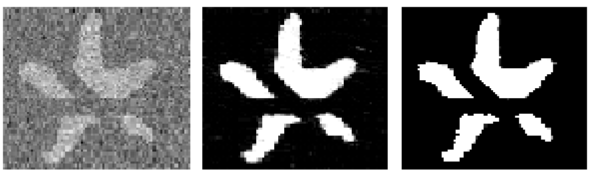
while $\|u^{k+1}-u^k\|>\varepsilon$ do
  按照式(5)和(6)计算出 m_i；
  更新 $r_1=(I(x)-m_1)^2$，$r_2=(I(x)-m_2)^2$
  $u^{k+1}=GS(r_1,r_2,\boldsymbol{d},b)$
  $\boldsymbol{d}^{k+1}=\dfrac{\nabla u^{k+1}+b^k}{|\nabla u^{k+1}+b^k|}\max(|\nabla u^{k+1}+b^k|-\mu^{-1},0)$
  $b^{k+1}=b^k+\nabla u^{k+1}-\boldsymbol{d}^{k+1}$
end while

注：GS 代表式(14)

3　实验与分析

仿真实验的硬件环境:联想 T400 笔记本电脑(Intel Core^{TM} Duo processor 2.53 GHz CPU, 2 GB RAM)。软件环境:操作系统为 Windows XP SP3,编程平台采用 MATLAB 7.0。

图 1(a)是一幅含有大量噪声的图像,大小为 280×253;(b)是本文模型采用 Split Bregman 方法所得到的 u;(c)是最终分割结果($u > 0.5$)。从分割效果来看,本文模型具有很好的抗噪性。图 1(c)的迭代总次数为 87 次,耗时仅 6.35 s,由此可见本文模型的收敛速度快,分割效率较高。



(a) 原始图像　(b) u　(c) 分割结果(u>0.5)

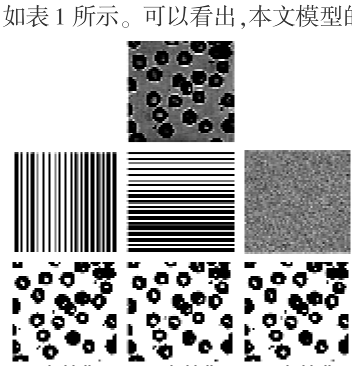
图 1　噪声图像分割结果

本文的模型是一个凸模型,因此对于初始化有很好的鲁棒性。在图 2 中,针对同一幅图像采用三种不同的初始化方式。特别值得一提的是,图 2(c)采用的是随机初始化方式。从结果来看,无论采用哪种初始化方式都能取得几乎相同的分割效果。因此本文方法可以用于自动分割。

为了与 CV 模型的分割效果进行比较,本文选用了三幅噪声水平 3% 的 MRI 脑图像。这些图像取自 McGill 大学 Montreal 神经学研究所大脑成像中心的 Brain Web 仿真脑部 MR 图像数据库[13],该数据库同时提供真实的分割结果。图 3 的第一列分别显示了三个脑 MRI 图像,第二列显示了 CV 模型的分割结果,第三列显示了本文模型的分割结果。为了数值化地表示分割结果,本文采用了 DSC 指标[14]来衡量分割精度。DSC 指标的定义如下:

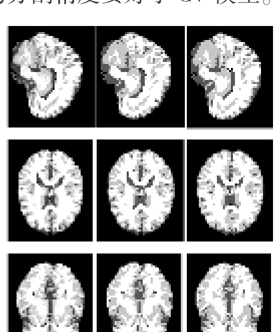
$$\mathrm{DSC} = \frac{2N(S_1 \cap S_2)}{N(S_1) + N(S_2)} \tag{16}$$

其中:S_1 和 S_2 分别代表分割结果和真实结果,$N(\cdot)$为像素的个数。DSC 指标值越趋近于 1,表明分割精度越高。分割精度如表 1 所示。可以看出,本文模型的分割精度要好于 CV 模型。



(a) 初始化方法一　(b) 初始化方法二　(c) 初始化方法三

图 2　不同初始化的分割结果



(a) 图像 1　(b) 图像 2　(c) 图像 3

图 3　脑 MRI 图像分割结果

表 1　CV 模型和本文模型的分割精度

图像	组织	CV 模型/%	本文模型/%
1	白质	93.04	94.34
	灰质	89.18	90.29
2	白质	92.96	94.04
	灰质	90.79	92.05
3	白质	94.13	95.96
	灰质	89.72	91.39

本文模型不但在分割精度上有所提高,在分割效率上更是强于 CV 模型。表 2 显示了 CV 模型和本文模型对图 3 中的三幅图像的分割时间。可以看出,本文方法的分割速度有了显著的提升。

表 2　CV 模型和本文模型的处理时间

图像	CV 模型分割时间/s	本文模型分割时间/s
1	88.57	15.35
2	61.78	13.26
3	134.61	17.00

4　结束语

CV 模型对区域均值采用算术平均而导致分割精度不高,并且由于其能量是非凸的,在最小化能量过程中,极易陷入局部最优。针对以上缺点,本文提出了一种基于加权均值 CV 凸优化模型。实验结果表明,该模型有效地提高了分割精度,且由于模型能量是凸的,对初始化也具有很好的鲁棒性,模型的分割效率显著优于 CV 模型。

参考文献:

[1] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: active contour models[J]. International Journal of Computer Vision, 1987, 1(2):321-331.

[2] CASELLES V, KIMMEL R, SAPIRO G. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1):61-79.

[3] KIMMEL R, AMIR A, BRUCKSTEIN A. Finding shortest paths on surfaces using level set propagation[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(6):635-640.

[4] WANG Li, HE Lei, MISHRA A, *et al*. Active contours driven by local Gaussian distribution fitting energy [J]. Signal Processing, 2009, 89(12):2435-2447.

[5] 林挺强,高峰,唐沐恩,等. 一种新的基于 CV 模型的图像分割算法[J]. 信号处理, 2010, 26(12):1852-1857.

[6] CASELLES V, CATTE F, COLL T, *et al*. A geometric model for active contours in image processing[J]. Numerische Mathematik, 1993, 66(1):1-31.

[7] CASELLES V, KIMMEL R, SHAPIRO G. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61-79.

[8] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5):577-685.

[9] CHAN T, VESE L. Active contours without edges[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2001, 10(2):266-277.

[10] CHAN T F, ESEDOGLU S, NIKOLOVA M. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2006, 66(5):1632-1648.

[11] BRESSON X, ESEDOGLU S, THIRAN J, *et al*. Fast global minimization of the active contour/snake models[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 28(2):151-167.

[12] TGOLDSTEIN T, BRESSON X, OSHER S. Geometric applications of the Split Bregman method: segmentation and surface reconstruction [J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 45(1-3):272-293.

[13] http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/[EB/OL].

[14] SHATTUCK D W, SANDOR-LEAHY S R, SCHAPER K A, *et al*. Magnetic resonance image tissue classification using a partial volume model[J]. Neuro Image, 2001, 13(5):856-876.