

分数阶微积分在图像处理中的研究综述 *

黄 果^{1a}, 许 黎^{1b}, 蒲亦非²

(1. 乐山师范学院 a. 智能信息处理及应用实验室; b. 物电学院, 四川 乐山 614000; 2. 四川大学 计算机学院, 成都 610064)

摘 要: 综述了关于分数阶微积分理论在数字图像底层处理中的应用研究, 具体包括: 分数阶微积分和分数阶偏微分方程的基本理论及分数阶傅里叶变换的基本性质; 分数阶微分滤波器的构造及在图像增强中的应用研究; 分数阶积分滤波器的构造及在图像去噪中的应用研究; 分数阶偏微分方程在图像去噪中的应用研究。最后, 总结了分数阶微积分理论在图像处理中已取得的研究成果, 并结合已有的基于分数阶微积分理论的图像底层处理模型, 展望了分数阶微积分理论在图像处理中的应用前景。

关键词: 分数阶微积分; 分数阶偏微分方程; 变分法; 泛函极值; 图像增强; 图像去噪

中图分类号: TN391

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2012)02-0414-07

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.02.003

Summary of research on image processing using fractional calculus

HUANG Guo^{1a}, XU Li^{1b}, PU Yi-fei²

(1. a. Laboratory of Intelligent Information Processing & Application, b. School of Physics & Electronics, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614000, China; 2. College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The main contents of this paper were about fractional calculus application in digital image low-level processing. Specifically included the following: fractional calculus and fractional-order partial differential equations and the basic properties of fractional Fourier transform; the structure of the fractional differential filter and its application to image enhancement; the structure of the fractional integration filter and its application to image denoising; the image denoising model based on fractional partial differential equations. Finally, summarized fractional calculus had been made research results and related problems in image processing. Associated with the image processing models, forecasted the applications prospect about fractional calculus applied to image processing.

Key words: fractional calculus; fractional-order partial differential equations; calculus of variations; functional extreme; image enhancement; image denoising

0 引言

分数阶微积分理论与整数阶微积分理论几乎同时诞生, 该理论最早出现在 L'Hôpital 写给 Leibniz 的信件中^[1]。近三百年来, 分数阶微积分仅仅是数学家们的纯数学理论分析和推导。Liouville 等著名数学家一直致力于完善和发展分数阶微积分的理论研究, 从而构建了分数阶微积分理论的基本系统架构。直到 19 世纪后期, 分数阶微积分理论才开始逐渐在实际工程领域中得到初步应用。Mandelbrot^[2,3] 发现了分形学, 他指出自然界和很多技术科学中存在大量分数维事实, 发现在整体与部分之间存在自相似现象, 并尝试将 Riemann-Liouville 分数阶微积分理论应用于描述和分析分形媒介中的布朗运动, 从此, 工程技术人员开始关注分数阶微积分。近几十年以来, 国内外许多学者研究发现分数阶微积分算子具有记忆性和非局部性, 非常适合用来描述现实世界中具有记忆和遗传性质的材料, 因此分数阶微积分理论在物理、化学、

生物、金融、流体等领域应用越来越广泛, 实用价值也得以充分的体现。近几年以来, 国内外许多学者研究发现, 分数阶微积分在信号分析与处理领域具有广泛的应用前景, 比如在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的作用^[410]。分数阶微积分理论在图像底层处理中的应用是最近几年才引起学者关注的, 到目前为止, 已经取得了初步研究成果, 主要包括图像增强、图像去噪、图像边缘提取、图像分割、图像奇异性检测等。图像处理中的整数阶微分算子包括梯度和 Laplace 算子, 以及墨西哥帽算子等很多经典的图像处理算子都可以近似看做是 Rodieck^[11] 提出的 DOG 感受野模型在理论上的仿真实现。分数阶微分算子则可以认为是 DOG 感受野模型的推广和延伸。基于分数阶微分理论的感受野模型较整数阶微积分理论更符合人类视觉特性。

分数阶微积分理论在图像处理领域的应用研究主要包括以下方面: 蒲亦非等人^[1222] 认为, 选择适当阶次的分数阶微分算子在增强图像过程中可以大幅提升边缘和纹理细节的同时, 非线性地保留了图像平滑区域的纹理信息; 此外, 杨柱中等

收稿日期: 2011-09-16; **修回日期:** 2011-10-30 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(60972131); 四川省教育厅科研项目(10ZC019/11ZB132); 乐山市科技局重点研究计划资助项目(2011GZD046); 乐山师范学院资助项目(Z1162)

作者简介: 黄果(1980-), 男, 重庆人, 讲师, 博士, 主要研究方向为分数阶微积分及分数阶偏微分方程在图像处理中的应用研究(huangguoxuli@163.com); 许黎(1982-), 女, 云南人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为分数阶微积分及混沌理论在图像处理中的应用研究; 蒲亦非(1976-), 男, 四川人, 副教授, 博士(后), 主要研究方向为分数阶微积分及分数阶偏微分方程在图像处理中的应用研究。

人^[2325]利用分数阶微分算子具有弱导数性质的特点,利用分数阶梯度算子对含弱噪声的图像进行边缘检测,该方法能够有效地解决整数阶梯度算子对噪声敏感的问题,因此可以避免噪声的影响而准确地定位噪声图像的边缘;Mathieu 等人^[26]提出了分数阶微分的边缘检测算子,即分数阶鲁棒轮廓(contour robuste d'ordre non entier, CRONE)边缘检测器,说明了该检测器的分数阶微分阶次在 $1 < v < 2$ 时,能够有选择地检测出边缘,而在分数阶微分阶次在 $-1 < v < 1$ 时,该检测算子能够在边缘提取的过程中克服噪声的影响;在此基础上,李远禄等人^[27]提出了基于分数阶差分的滤波器并将其应用到边缘检测,该模型将数据的平滑和差分有机结合,利用分数阶微积分基本理论,设计了可以通过调节微分阶次的差分滤波器,该滤波器可以解决传统算子边缘检测出现的边缘漂移问题,并且可以抑制部分噪声;汪凯宇和刘红毅等人^[28,29]利用分数阶微积分具有的记忆特性,分别将分数阶样条小波应用到图像纹理的奇异性检查和图像融合中,较整数阶微积分取得了更好的仿真效果;Liu 等人^[30]提出了分数阶奇异值分解的人脸识别方法,该方法可以有效缓解面部的变化,并且在脸部出现剧烈变化时,比传统的分类方法提高其分类的性能,为高层图像处理打下坚实基础;左凯等人^[31]将卡尔曼滤波和分数阶微积分理论相结合,提出了二维分数阶卡尔曼滤波器并成功应用到图像处理;汪成亮等人^[32]通过研究分数阶微积分的基本定义和相应的分数阶微分算子的实现方法,提出了将图像的梯度特征和人类视觉特征等理论引入到已有的分数阶微分算子中,由此构建了基于分数阶微分阶次自适应变化的图像增强模型;高朝邦等人^[33]将四元数理论和分数阶微积分理论有机结合,提出了四元数分数阶方向微分的概念,解释其物理意义和几何意义,并根据分数阶微分的特殊性质将其应用到图像增强当中,可以得到很好的效果;Bai 等人^[34]以 ROF 去噪模型为基础,将分数阶微积分理论和偏微分方程相结合,提出了基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型,该方法可以解决传统低阶次整数阶偏微分方程去噪模型容易产生阶梯效应,以及高阶次整数阶偏微分方程去噪模型去噪效果不佳的缺点。此后,张军等人^[3539]将负指数 Sobolev 空间的多尺度图像建模与基于分数阶微积分的图像建模有效结合,提出了统一的基于分数阶多尺度变分图像去噪模型,并初步设计了该模型涉及参数的自适应选择方法。

1 相关理论及分析

1.1 分数阶微积分的基本定义

从不同的应用角度去分析问题可以得到不同的分数阶微积分定义,所以迄今为止,分数阶微积分仍然没有统一的时域定义表达式。在众多的定义表达中,主要有三种经典的分数阶微积分定义,包括 Grmwald-Letnikov、Riemann-Liouville 和 Capotu 定义。

1) 分数阶微积分的 Grmwald-Letnikov 定义

$${}_a^C I_t^v = \lim_{h \rightarrow 0} h^v \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(v+j)}{j! \Gamma(v)} f(t-jh) \quad v \in R^- \quad (1)$$

2) 分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义

$${}_a^R D_t^v f(x) = \begin{cases} \frac{d^n f(x)}{d x^n} & v = n \in N \\ \frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_a^t \frac{f(y)}{(x-y)^{v-n+1}} dy & 0 \leq n-1 < v < n \end{cases} \quad (2)$$

3) 分数阶微积分的 Caputo 定义

$${}_a^R D_t^v f(x) = \begin{cases} \frac{d^n f(x)}{d x^n} & v = n \in N \\ \frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{\Gamma(v-n)} \int_a^t \frac{f^n(y)}{(x-y)^{n-v+1}} dy & 0 \leq n-1 < v < n \end{cases} \quad (3)$$

针对三种经典分数阶微积分定义,国内外众多学者从不同应用角度研究分析各种各样的实际问题,得到了不同形式的分数阶微积分定义表达式。分数阶微积分 Riemann-Liouville 定义和分数阶微积分 Caputo 定义都是对分数阶微积分 Grmwald-Letnikov 定义的改进。分数阶微积分的 Grmwald-Letnikov 定义在数值实现时可以转换为卷积运算形式,因此非常适合在信号处理中的应用;分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义主要应用于计算一些较为简单函数的解析解;分数阶微积分的 Caputo 定义适用于分数阶微分方程初边值问题的分析,因此非常适合在工程领域中应用。三种关于分数阶微积分定义之间存在着紧密的联系,在一定条件下可以相互转换。例如,如果分数阶微积分阶次 v 满足 $n-1 < v < n$,当函数 $f(x)$ 的 $m+1$ 阶导数连续并且满足 $m = \lfloor n-1 \rfloor$,分数阶微积分 Grmwald-Letnikov 的定义与分数阶微积分 Riemann-Liouville 的定义是完全等价的。在满足相同条件下,分数阶微积分的 Caputo 定义和分数阶微积分的 Grmwald-Letnikov 定义等价。当分数阶微积分阶次 v 为正整数和负实数时,分数阶微积分的 Caputo 定义和分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义满足以下关系:

$${}_a^R D_t^v f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-v}}{\Gamma(k-p+1)} + {}_a^C D_t^v f(x) \quad (4)$$

1.2 分数阶偏微分方程

分数阶偏微分方程是由传统整数阶偏微分方程拓展演化而得到的,是将传统整数阶偏微分方程中对时间或者空间的偏导数项用分数阶偏导数来替代而得到的^[40]。分数阶偏微分方程的基本形式为

$$\frac{\partial^\alpha f(x,y,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\beta f(x,y)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^\beta f(x,y)}{\partial y^\beta} \quad (5)$$

根据偏微分阶次 α 和 β 的不同将分数阶偏微分方程分为三种基本形式^[4043]:

a) 时间分数阶偏微分方程(时间偏导数阶次 α 为非整数,空间偏导数阶次 β 为整数)。特别地,当 $0 < \alpha < 1, \beta = 2$ 时,将热传导方程(扩散方程)推广为时间分数阶热传导方程(时间分数阶扩散方程);当 $1 < \alpha < 2, \beta = 2$ 时,该方程可以认为是热传导方程和波动方程的非线性插值。

b) 空间分数阶偏微分方程(空间偏导数阶次 β 为非整数,时间偏导数阶次 α 为整数)。特别地,当 $\alpha = 1, 1 < \beta < 2$ 时,将热传导方程(扩散方程)推广为空间分数阶热传导方程(空间分数阶扩散方程)。

c) 空间—时间分数阶偏微分方程(时间偏导数阶次 α 为非整数,同时空间偏导数阶次 β 为非整数)。特别地,当 $0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$ 时,将热传导方程(扩散方程)推广为时间—空间分数阶热传导方程(时间—空间分数阶扩散方程)。

2 分数阶微分与图像增强

图像增强是数字图像处理的基本内容之一,以梯度算子和 Laplacian 算子等为代表的整数阶微分方法在图像增强中的应

用已经相当广泛。近年来,很多学者将分数阶微分理论应用到图像增强中并且取得了较好的效果。分数阶微分可以在提高信号高频成分的同时非线性地保留信号中的甚低频,因此将该理论应用到图像增强中,可以使图像边缘更加突出,同时保留了图像平滑区域的纹理信息。分数阶微分理论应用到数字图像中的关键是增加一个自由度,即阶次 $v(0 < v < 1)$,通过适当调节 v 的大小可以构造相应的掩模算子,从而得到较好的图像增强效果。

2.1 分数阶微分对信号的作用

已知任意平方可积的能量信号 $f(x) \in L^2(R)$,由信号处理的基本理论可知其 Fourier 变换为 $\hat{f}(\omega) = \int_R f(x) e^{-i\omega x} dx$ 。假设信号 $f(x)$ 的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x) (n \in \mathbb{Z}^+)$,根据 Fourier 变换的性质可以得到

$$D^n f(x) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} (\hat{D}f)^n(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) = d^n(\omega) \hat{f}(\omega) \tag{6}$$

假设信号 $f(x)$ 的分数阶 v 阶导数为 $f^{(v)}(x) (v \in \mathbb{R}^+)$,同样根据分数阶 Fourier 变换的性质可以得到

$$D^v f(x) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} (\hat{D}f)^v(\omega) = (i\omega)^v \hat{f}(\omega) = d^v(\omega) \hat{f}(\omega) \tag{7}$$

其中:
$$\begin{cases} d^v(\omega) = (i\omega)^v = \alpha^v(w) e^{i\theta^v(\omega)} \\ \alpha^v(w) = |\omega|^v, \theta^v(\omega) = \frac{v\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \tag{8}$$

图 1 为分数阶微分算子在阶次不同时的幅频特性。从图 1 可以清楚地得出:a)分数阶微分算子对信号都有加强的作用,并且加强的幅度随频率和微分阶次的增加而非线性地急剧增强;b)2 阶次微分相比 1 阶次微分对信号低频成分的提升较弱,但是对信号高频成分的提升却更明显;c)特别地,当微分阶次 $v=0$ 时,表示分数阶微分算子不对信号进行任何改变;d)对于分数阶微分阶次 $0 < v < 1$ 时,在信号的低频部分 ($\omega < 1$),分数阶微分算子对信号的幅值进行了一定的提升,并且提升的幅度稍大于 1 阶次和 2 阶次微分;在信号的高频部分 ($\omega > 1$),分数阶微分算子对信号的幅值进行一定的提升,但是提升的幅度也明显小于 1 阶次和 2 阶次微分。上述性质表明,分数阶微分算子具有弱导数性质,即分数阶微分算子在加强信号中高频成分的同时,对信号的甚低频分量进行了非线性保留。此外,从信号处理的角度分析分数阶微分算子的物理意义可知,分数阶微分算子可以理解为广义的调幅调相,其振幅随频率呈分数阶幂指数变化,相位是频率的广义 Hilbert 变化。

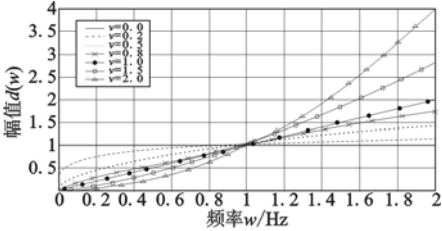


图1 分数阶微分算子的幅频特性曲线

2.2 分数阶微分滤波器的构造

假设二维图像信号 $I(x,y)$ 对于 X 和 Y 轴方向的分数阶微分在一定的条件下是可分离的,这样可以利用分数阶微分算子分别对数字图像的八个方向进行滤波处理,然后将得到的中间结果通过相关规则结合。将图像信号 $I(x,y)$ 的持续期 $[a,t]$ 按单位间隔 $h=1$ 等分,即 $n = \left\lceil \frac{t-a}{h} \right\rceil = \lceil t-a \rceil$ 。这样可以得到 G-L 定义下的分数阶微分算子沿 X 和 Y 轴方向的数值计算

表达式,如式(9)和(10)所示,其中 R 表示分数阶微分数值计算的余项,如式(11)和(12)所示。

$$\begin{aligned} {}^C D_x^v I(x,y) &\triangleq I(x,y) + (-v)I(x-1,y) + \frac{(-v)(-v+1)}{2}I(x-2,y) + \dots \\ &\quad + \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}I(x-3,y) + R_x^v(x,y) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} {}^C D_y^v I(x,y) &\triangleq I(x,y) + (-v)I(x,y-1) + \frac{(-v)(-v+1)}{2}I(x,y-2) + \dots \\ &\quad + \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)}{6}I(x,y-3) + R_y^v(x,y) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} R_x^v(x) &= \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)(-v+3)}{24}I(x-4,y) + \dots + \\ &\quad \frac{\Gamma(m-v)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-v)}I(x-m,y) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} R_y^v(x) &= \frac{(-v)(-v+1)(-v+2)(-v+3)}{24}I(x,y-4) + \dots + \\ &\quad \frac{\Gamma(m-v)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-v)}I(x,y-m) \end{aligned} \tag{12}$$

图 2 表示分数阶微分图像增强掩模算子 W ,该算子将式(9)和(10)推广到图像的其余六个方向,从而得到一个基于八个方向的图像增强掩模算子(图中表格空白部分用 0 填充)。该增强算子具有各向旋转不变性,增强算子 W 中的滤波系数如式(13)所示。

$$\begin{cases} W_{D_0} = 1 \\ W_{D_1} = -v \\ W_{D_2} = \frac{-v(-v+1)}{2} \\ W_{D_3} = \frac{-v(-v+1)(-v+2)}{6} \\ \dots \\ W_{D_m} = \frac{-v(-v+1)(-v+2)\dots(-v+m-1)}{m!} \end{cases} \tag{13}$$

W_{D_0}	...	0	0	W_{D_0}	0	0	...	W_{D_0}
0	...	0	0	...	0	0	...	0
0	0	W_{D_1}	0	W_{D_1}	0	W_{D_1}	0	0
0	0	0	W_{D_1}	W_{D_1}	W_{D_1}	0	0	0
W_{D_2}	...	W_{D_1}	W_{D_1}	W_{D_1}	W_{D_1}	W_{D_1}	...	W_{D_2}
0	0	0	W_{D_2}	W_{D_2}	W_{D_2}	0	0	0
0	0	W_{D_2}	0	W_{D_2}	0	W_{D_2}	0	0
0	...	0	0	...	0	0	...	0
W_{D_3}	...	0	0	W_{D_3}	0	0	...	W_{D_3}

图2 分数阶微分增强掩模算子

3 分数阶积分与图像去噪

众所周知,分数阶微分和分数阶积分是互为逆运算,同样图像增强和图像去噪也是相反的过程。既然分数阶微分理论在图像增强中取得了很好的效果,因此,本章尝试将分数阶积分理论用到图像去噪,提出了基于分数阶积分的图像去噪算法。该方法打破了传统图像去噪算法基于整数积分阶次的思想,通过设定一个较小的分数积分阶次来构建相应的图像去噪掩模,并利用迭代的方法来控制图像去噪的效果,从而在图像去噪的同时,尽量保留了图像的边缘和纹理等细节信息。

3.1 分数阶积分对信号的作用

对已知任意平方可积的能量信号 $f(t) \in L^2(R)$,由信号处理的基本理论可知其 Fourier 变换为 $\hat{f}(\omega) = \int_R f(t) e^{-i\omega t} dt$ 。假

设信号 $f(t)$ 的 n 阶导数为 $f^{(n)}(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$),根据 Fourier 变换的性质可以得到

$$D^n f(t) \stackrel{\text{FT}}{\Leftrightarrow} (Df)^n(\omega) = (i\omega)^n f(\omega) = d^n(\omega) f(\omega) \quad (14)$$

这样将信号 $f(t)$ 的分数阶 v 导数为 $f^{(v)}(t)$ ($v \in \mathbb{R}^+$),同样根据 Fourier 变换的性质可以得到

$$D^v f(t) \stackrel{\text{FT}}{\Leftrightarrow} (Df)^v(\omega) = (i\omega)^v f(\omega) = d^v(\omega) f(\omega) \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} d^v(\omega) = (i\omega)^v = \alpha^v(\omega) e^{i\theta^v(\omega)} \\ \alpha^v(\omega) = |\omega|^v, \theta^v(\omega) = \frac{v\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (16)$$

于是,当 $v \in \mathbb{R}^-$ 时,根据分数阶算子理论,即 $D^{-1} = I$,并且 $v' = -v$,可以得到分数阶积分算子的 Fourier 变换形式为

$$I^{v'} f(t) \stackrel{\text{FT}}{\Leftrightarrow} (If)^{v'}(\omega) = (i\omega)^{v'} f(\omega) = i^{v'}(\omega) \cdot f(\omega) \quad (17)$$

其中:

$$\begin{cases} i^{v'}(\omega) = \alpha^{v'}(\omega) e^{i\theta^{v'}(\omega)} \\ \alpha^{v'}(\omega) = |\omega|^{-v'}, \theta^{v'}(\omega) = \frac{-v'\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (18)$$

根据式(18)的描述,可以得出分数阶积分算子在阶次 v' 0,0.2,0.5,0.8,1.0,1.5,2.0 时的幅频特性,如图 3 所示。

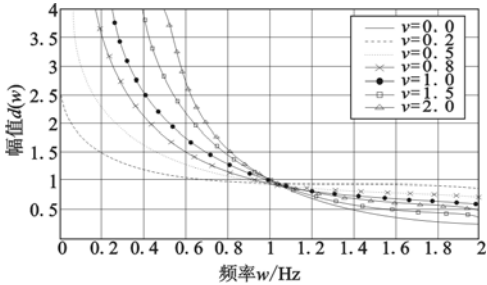


图3 分数阶积分的幅频特性曲线

从图 3 可以清楚地得出:a)分数阶积分对信号都有衰减作用,并且随着频率和积分次数的增加而非线性地急速衰减;b) 2 阶次积分相比 1 阶次积分对信号低频成分的提升较大,同时对信号的高频成分的削弱也明显;c)特别地,当 $v = 0$ 时,表示分数阶积分算子不对信号进行任何改变;d)对于积分次数 $0 < v < 1$ 时,在信号的频率 $\omega < 1$ 的区域,分数阶积分算子对信号的幅值进行了一定的提升,但是提升的幅度远小于 1 次和 2 次积分;在信号的频率 $\omega > 1$ 的区域,分数阶积分算子对信号的幅值进行了一定的削弱,但是削弱的幅度也明显小于 1 次和 2 次积分。上述性质表明,分数阶积分算子在削弱信号高频部分的同时,对其中的最高频部分进行了非线性的保留;分数阶积分算子在加强信号低频部分的同时,对其中的最低频部分也进行了一定的保留。这样,分数阶积分算子在去除噪声的同时,一定程度上保留了图像的边缘和纹理等细节信息,从而使去噪后的图像不会产生严重的模糊现象。

3.2 分数阶积分滤波器的构造

仍然假设二维图像信号 $I(x,y)$ 对于 X 轴和 Y 轴方向的分数阶积分在一定的条件下是可分离的,这样可以利用分数阶积分算子分别对数字图像的八个方向进行滤波处理,然后将得到的中间结果通过相关规则结合。将图像信号 $I(x,y)$ 的持续期 $[a,t]$ 按单位间隔 $h=1$ 等分,即 $n = \left\lceil \frac{t-a}{h} \right\rceil = \lceil t-a \rceil$ 。这样可以得到 G-L 定义下的分数阶积分算子沿 X 轴和 Y 轴方向的数值计算表达式,如式(19)和(20)所示,其中 R' 表示分数阶积分数值计算的余项,如式(21)和(22)所示。

$$\frac{v'(v'+1)(v'+2)}{6} I(x-3,y) + R'_x(x,y) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_a I'_x(x,y)_x &\triangleq I(x,y) + v' I(x,y-1) + \frac{v'(v'+1)}{2} I(x,y-2) + \dots + \\ &\frac{v'(v'+1)(v'+2)}{6} I(x,y-3) + R'_y(x,y) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} R'_{x'}(x) &= \frac{v'(v'+1)(v'+2)(v'+3)}{24} I(x-4,y) + \dots + \\ &\frac{\Gamma(v'+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(v')} I(x-m,y) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} R'_{y'}(x) &= \frac{v'(v'+1)(v'+2)(v'+3)}{24} I(x,y-4) + \dots + \\ &\frac{\Gamma(v'+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(v')} I(x,y-m) \end{aligned} \quad (22)$$

图 4 表示分数阶积分去噪掩模算子 W ,该算子将式(19)和(20)推广到图像的其余六个方向,从而得到一个基于八个方向的去噪掩模算子(图中表格空白部分用 0 填充)。该去噪算子具有各向旋转不变性,去噪算子 W 中的滤波系数如式(23)所示。

$$\begin{cases} W_{I_0} = 1 \\ W_{I_1} = v \\ W_{I_2} = \frac{v(v+1)}{2} \\ W_{I_3} = \frac{v(v+1)(v+2)}{6} \\ \dots \\ W_{I_m} = \frac{v(v+1)(v+2)\dots(v+m-1)}{m!} \end{cases} \quad (23)$$

W_I	...	0	0	W_I	0	0	...	W_I
0	...	0	0	...	0	0	...	0
0	0	W_I	0	W_I	0	W_I	0	0
0	0	0	W_I	W_I	W_I	0	0	0
W_I	...	W_I	W_I	W_I	W_I	W_I	...	W_I
0	0	0	W_I	W_I	W_I	0	0	0
0	0	W_I	0	W_I	0	W_I	0	0
0	...	0	0	...	0	0	...	0
W_I	...	0	0	W_I	0	0	...	W_I

图4 分数阶积分去噪掩模算子

4 分数阶偏微分方程与图像去噪

基于偏微分方程(partial differential equations,PDE)的图像处理是一门崭新的交叉学科分支,融合了数学、物理学、电子信息和计算机科学与技术等多个领域的相关理论知识。迄今为止,国内外许多学者已经建立了大量经典的基于 PDE 的图像去噪模型,并显示出了巨大的生命力^[4450]。基于整数阶 PDE 的图像去噪模型具有强大的数学理论基础,因此该方法具有其他去噪方法不具备的诸多优势,但是国内外许多学者在深入研究的过程中仍然发现 PDE 图像去噪模型存在很多不足之处。比如 P-M^[51]和 ROF 模型^[52,53]虽然能够有效地去除平滑区域的噪声,但是去噪后的图像会产生阶梯效应而出现碎片光滑现象;LLT 模型^[54]利用了高阶 PDE 建模,虽然能够消除阶梯效应,但是去噪后的图像视觉效果不好;MCM 去噪模型^[5557]虽然保护了图像的边缘信息,但是去噪后的图像会产生许多人为痕迹。为了解决各种整数阶 PDE 图像去噪模型存在的问题,有学者提出将分数阶微积分理论引入到 PDE 图像去噪模型中,构建基于分数阶 PDE 的图像去噪模型。该模型将分数阶梯度

算子替代整数阶梯度算子来构建去噪模型的能量泛函。

4.1 基于分数阶 Fourier 变换的图像去噪模型

因为分数阶有界变差空间 $BV^r(\Omega)$ 是传统的有界变差空间 $BV(\Omega)$ 的推广和延伸, $BV(\Omega)$ 空间是建立在传统梯度模值的基础上, 相应地, $BV^r(\Omega)$ 空间就应该建立在分数阶梯度模值基础上。这样可以建立基于分数阶有界变差空间 $BV^r(\Omega)$ 的能量泛函来描述噪声图像。

已知噪声图像 $I(x, y), (x, y) \in \Omega$, 将 ROF 模型的正则项梯度算子 ∇I 用分数阶梯度算子 $\nabla^r I$ 来替代, 可以得到基于分数阶偏微分方程去噪模型的能量泛函:

$$E(I) = \int_{\Omega} |\nabla^r I| dx dy + \frac{\lambda}{2} \|I_0 - I\|_{L_2}^2$$
$$I \in BV^r(\Omega), (x, y) \in \Omega \tag{24}$$

其中: $|\nabla^r I| = \sqrt{(\overset{\wedge}{D_x^r I})^2 + (\overset{\wedge}{D_y^r I})^2}$, $\overset{\wedge}{D_x^r I}$ 和 $\overset{\wedge}{D_y^r I}$ 分别表示图像 $I(x, y)$ 关于 X 和 Y 轴的分数阶导数。

为了得到上述能量泛函的 Euler-Lagrange 方程, 需要极小化上述能量泛函, 因此, 利用变分法的性质构造相应能量泛函。

$$g(\varepsilon) = E(I + \varepsilon\varphi) =$$
$$\int_{\Omega} |\nabla^r(I + \varepsilon\varphi)| dx dy + \frac{\lambda}{2} \|I_0 - I - \varepsilon\varphi\|_{L_2}^2 \tag{25}$$

其中: ε 为任意实数, φ 为任意函数。

利用泛函极值的基本性质, 当 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有 $g'_\varepsilon(0) = 0$, 可以得到相应的 Euler-Lagrange 方程:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\overset{\wedge}{D_x^r I}}{|\nabla^r I|} \overset{\wedge}{D_x^r} \varphi + \frac{\overset{\wedge}{D_y^r I}}{|\nabla^r I|} \overset{\wedge}{D_y^r} \varphi \right) dx dy - \lambda \int_{\Omega} (I_0 - I) \varphi dx dy = 0 \tag{26}$$

为了得到最终的去噪模型, 需要消除任意函数 φ 。因此,

采用 Parseval 恒等公式 $\int_{\Omega} f \bullet g dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{f} \overline{\hat{g}} d\omega_1 d\omega_2$ 对式 (26) 进行处理, 可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\overset{\wedge}{D_x^r I} \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_x^r} \varphi}}{|\nabla^r I|} + \overset{\wedge}{D_y^r I} \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_y^r} \varphi}}{|\nabla^r I|} \right) d\omega_1 d\omega_2 -$$
$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\Omega} \overset{\wedge}{\varphi} (\overline{\overset{\wedge}{I_0 - I}}) d\omega_1 d\omega_2 = 0 \tag{27}$$

因为分数阶 Fourier 变换的性质有 $\overset{\wedge}{D_x^r} \varphi = (j2\pi\omega_1)^r \overset{\wedge}{\varphi}$, $\overset{\wedge}{D_y^r} \varphi = (j2\pi\omega_2)^r \overset{\wedge}{\varphi}$, 并消除系数 $1/(2\pi)$ 可以得出

$$\int_{\Omega} \left((j2\pi\omega_1)^r \overset{\wedge}{\varphi} \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_x^r I}}}{|\nabla^r I|} + (j2\pi\omega_2)^r \overset{\wedge}{\varphi} \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_y^r I}}}{|\nabla^r I|} \right) d\omega_1 d\omega_2 -$$
$$\lambda \int_{\Omega} \overset{\wedge}{\varphi} (\overline{\overset{\wedge}{I_0 - I}}) d\omega_1 d\omega_2 = 0 \tag{28}$$

又因为函数 φ 的任意性, 利用变分法的基本引理可得出

$$(j2\pi\omega_1)^r \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_x^r I}}}{|\nabla^r I|} + (j2\pi\omega_2)^r \frac{\overline{\overset{\wedge}{D_y^r I}}}{|\nabla^r I|} - \lambda (\overline{\overset{\wedge}{I_0 - I}}) = 0 \tag{29}$$

对式 (29) 两边先去共轭, 然后再利用 Fourier 逆变换可以得出相应的图像去噪的分数阶偏微分方程:

$$\text{Re} \left[\left(\overset{\wedge}{D_x^r} \left(\frac{\overset{\wedge}{D_x^r I}}{|\nabla^r I|} \right) + \overset{\wedge}{D_y^r} \left(\frac{\overset{\wedge}{D_y^r I}}{|\nabla^r I|} \right) \right) \right] - \lambda (I_0 - I) = 0 \tag{30}$$

最后利用梯度下降法, 引入时间变量 t , 可以得到基于 Fourier 变换的分数阶偏微分方程的去噪模型:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{Re} \left[\left(\overset{\wedge}{D_x^r} \left(\frac{\overset{\wedge}{D_x^r I}}{|\nabla^r I|} \right) + \overset{\wedge}{D_y^r} \left(\frac{\overset{\wedge}{D_y^r I}}{|\nabla^r I|} \right) \right) \right] + \lambda (I_0 - I) \tag{31}$$

该模型最大的难点就是如何求取分数阶微分算子的共轭算子 $\overset{\wedge}{D_x^r}$ 和 $\overset{\wedge}{D_y^r}$ 。基于 Fourier 变换的分数阶偏微分方程的去噪模

型是利用分数阶 Fourier 变换的性质来得到 $\overset{\wedge}{D_x^r}$ 和 $\overset{\wedge}{D_y^r}$ 的数值解。

已知有噪声图像 $I(x, y) (x, y \in \Omega)$, 假设其在 X 和 Y 轴方向相互独立, 其 x 和 y 方向的分数阶 Fourier 变换为

$$\begin{cases} D_x I(x, y) = I(x, y) - I(x - 1, y) = \\ \frac{1}{\sqrt{N}} I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) (1 - e^{j2\pi\omega_1/N}) e^{j2\pi(x\omega_1 + y\omega_2)/N} \\ D_y I(x, y) = I(x, y) - I(x, y - 1) = \\ \frac{1}{\sqrt{N}} I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) (1 - e^{j2\pi\omega_2/N}) e^{j2\pi(x\omega_1 + y\omega_2)/N} \end{cases} \tag{32}$$

因此, 由 Fourier 变换的性质可知, 一阶差分的空域与频域的表达式对应关系为

$$\begin{cases} D_x I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_1/N}) I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \\ D_y I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_2/N}) I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \end{cases} \tag{33}$$

同理可知, n 阶差分的空域与频域的表达式对应关系为

$$\begin{cases} D_x^n I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_1/N})^n I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \\ D_y^n I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_2/N})^n I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \end{cases} \tag{34}$$

由分数阶 Fourier 变换的基本性质可知, 将整数阶次 n 推广到分数阶次 v , 即可得到基于分数阶 Fourier 变换的分数阶导数数值计算公式:

$$\begin{cases} D_x^v I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_1/N})^v I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \\ D_y^v I(x, y) \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi\omega_2/N})^v I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2}) \end{cases} \tag{35}$$

这样, 由式 (35) 可以得到分数阶微分算子的共轭算子:

$$\begin{cases} \overline{D_x^v I(x, y)} \leftrightarrow \overline{(1 - e^{-j2\pi\omega_1/N})^v I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2})} \\ \overline{D_y^v I(x, y)} \leftrightarrow \overline{(1 - e^{-j2\pi\omega_2/N})^v I(\overset{\wedge}{\omega_1}, \overset{\wedge}{\omega_2})} \end{cases} \tag{36}$$

4.2 基于分数阶基本定义的图像去噪模型

已知有噪声图像 $I(x, y), x, y \in \Omega$, 并且假设噪声图像 $I(x, y)$ 在 X 和 Y 轴方向相互独立, 因此只考虑 X 轴方向的图像信号 $I(x, \cdot)$ 的分数阶微积分数值计算。由分数阶微积分的 G-L 定义可知, 图像信号 $I(x, \cdot)$ 的分数阶微分为

$${}_a^G D_t^v I(x, \cdot) = \left(\frac{1}{h} \right)^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(v-j+1)} I(x-j; h) \tag{37}$$

当步长 $h=1$ 时可以得到

$${}_a^G D_t^v I(x) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{v}{j} I(x-j) \tag{38}$$

假设函数 $c^v(x)$ 满足

$$c^v(x) = \begin{cases} (-1)^x \binom{v}{x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{39}$$

因此, 可以将信号的分数阶微积分改写为信号 $I(x)$ 与函数 $c^v(x)$ 的卷积操作形式:

$${}_a^G D_t^v I(x) = c^v(x) * I(x) \tag{40}$$

于是, 将式 (40) 代入基于分数阶 $BV^r(\Omega)$ 空间的能量泛函, 可得到基于卷积积分的分数阶变分模型:

$$E(I) = \int_{\Omega} |c^v * I| dx dy + \frac{\lambda}{2} \|f - I\|_{L_2}^2 \tag{41}$$

其中:

$$\begin{cases} |c^v * I| = \sqrt{(c^v * I)_x^2 + (c^v * I)_y^2} \\ (c^v * I)_x = \int_{\Omega} c^v(z) I(x-z, y) dz \\ (c^v * I)_y = \int_{\Omega} c^v(z) I(x, y-z) dz \end{cases} \tag{42}$$

为了得到式 (41) 的 Euler-Lagrange, 与上节假设一样, 仍然假设任意函数 φ , 从而构造函数, 使其满足式 (43):

$$g(\varepsilon) = E(I + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} |c^v(I + \varepsilon\varphi)| dx dy + \frac{\lambda}{2} \|I_0 - I - \varepsilon\varphi\|_{L_2}^2 \quad (43)$$

仍然利用泛函极值的基本性质令 $g'(0) = 0$, 可以得到

$$\int_{\Omega} \frac{(c^v * I)_x (c^v * \varphi)_x + (c^v * I)_y (c^v * \varphi)_y}{|c^v * I|} dx dy - \lambda \int_{\Omega} (I_0 - I) \varphi dx dy = 0 \quad (44)$$

因为当 $(x, y) \notin \Omega$ 时, $I(x, y) = 0$ 。所以将 $\Omega \rightarrow R^2$ 时, 可以得到 Parseval 恒等式:

$$\int_{R^2} f g dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \widehat{f} \overline{\widehat{g}} d\omega_1 d\omega_2 \quad (45)$$

可以根据 Parseval 恒等式将式(44)进一步改写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} \right) (c^v * \varphi)_x d\omega_1 d\omega_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} \right) (c^v * \varphi)_y d\omega_1 d\omega_2 - \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (\widehat{I_0 - I}) \widehat{\varphi} d\omega_1 d\omega_2 = 0 \quad (46)$$

因为存在 $c^v * I = c^v \cdot \widehat{I}$, 并且因为函数 φ 的任意性, 可以得到

$$\left(\frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} \right) \overline{c^v(\omega_1)} + \left(\frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} \right) \overline{c^v(\omega_2)} - \lambda (\widehat{I_0 - I}) = 0 \quad (47)$$

因为 $c^v(\omega) = c^v(-\omega)$, 可以得到

$$\left(\frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} \right) c^v(-\omega_1) + \left(\frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} \right) c^v(-\omega_2) - \lambda (\widehat{I_0 - I}) = 0 \quad (48)$$

利用 Fourier 逆变换的性质可以得到

$$\left(\left(\frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} \right) * c^v(-z) \right)_x + \left(\left(\frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} \right) * c^v(-z) \right)_y - \lambda (I_0 - I) = 0 \quad (49)$$

去掉卷积符号后可以得到

$$\int_{\Omega} c^v(z) \frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} (x+z, y) dz + \int_{\Omega} c^v(z) \frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} (x, y+z) dz - \lambda (I_0 - I) = 0 \quad (50)$$

最后, 利用梯度下降法即可以得到基于 G-L 定义分数阶偏微分方程的图像去噪模型:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = - \left(\int_{\Omega} c^v(z) \frac{(c^v * I)_x}{|c^v * I|} (x+z, y) dz + \int_{\Omega} c^v(z) \frac{(c^v * I)_y}{|c^v * I|} (x, y+z) dz \right) + \lambda (I_0 - I) \quad (51)$$

5 结束语

自从 Mandelbrot 发现分形现象, 并将 Riemann-Liouville 分数阶微积分理论应用于分析和研究分形媒介中的布朗运动以来, 分数阶微积分逐渐受到工程技术人员的高度关注。近些年以来, 分数阶微积分理论已经在化学、电磁学、控制学、材料科学和力学等众多学科领域中得到广泛应用并取得了重大的研究成果。然而, 将分数阶微积分理论应用到现代信号分析与处理中, 特别是数字图像的处理, 在国内外都还是一个新兴的学科分支。分数阶微积分理论适合研究具有非线性、非因果、非平稳等特征不确定的信号, 因此分数阶微积分理论中许多经典算法都非常适合在现代信号分析与处理中应用。众所周知, 数字图像中邻域内像素点之间的灰度值具有高度的自相似性, 这种高度的自相似性可以近似为分形结构, 并通常是以复杂的边缘和纹理等细节信息来表示。此外, 数字图像的分数阶微分具有特殊的马赫现象, 其拮抗特性具有特殊的生物视觉感受野模型, 因此分数阶微积分理论

为数字图像底层处理提供了一种崭新的研究方法。表 1 表示分数阶微积分理论应用于图像底层处理的类比, 该表说明了分数阶微积分理论应用于图像处理所涉及的定义、适用情况、特点、优缺点情况。

表 1 分数阶微积分应用于图像底层处理的类比			
类比项	分数阶微分	分数阶积分	分数阶偏微分方程
定义	阶次 $v > 0$	阶次 $v < 0$	阶次 $v > 0$, 且为非整数
适用情况	图像增强	图像去噪	图像增强或去噪
特点	利用分数阶微分阶次来控制图像增强的效果	利用分数阶积分阶次来控制图像去噪的效果	利用分数阶偏微分方程的阶次来控制图像增强或去噪的效果
优点	具有弱导数性质, 有利于增强图像的纹理等细节信息	具有弱积分性质, 有利于在去噪的同时保护图像的边缘和纹理等细节信息	具有普遍性, 更加有效地描述图像的内在特性, 有利于在去噪的同时保护图像的边缘和纹理等细节信息
缺点	缺乏自适应性, 对强边缘提升不足, 在一定程度上加强了噪声的影响	缺乏自适应性, 阶次较小时, 去噪效果不明显; 阶次较大时, 容易出现模糊现象	缺乏自适应性, 并且计算复杂度较高

本文介绍的各种基于分数阶微积分和分数阶偏微分方程理论的图像处理模型还存在一些不足之处, 在今后的研究工作中需要重点解决以下几个方面的问题: a) 本文主要介绍分数阶微积分理论应用到图像去噪和增强两种基本的图像底层处理, 需要进一步将基于分数阶微积分的图像处理模型推广到图像分割、边缘提取、数字水印、指纹提取等图像处理的其他应用领域; b) 本文介绍的基于分数阶微积分理论的图像处理模型都只是应用于二维图像处理, 因此, 以后要逐步尝试将上述模型推广到三维图像处理; c) 分数阶微积分理论作为一种基本的数学分析工具, 已经成功应用到了图像处理中, 并取得了很好的应用效果, 如何将分数阶微分理论和当今成熟的经典算法结合, 如利用神经网络、遗传算法、模糊数学等经典理论来估计分数阶微积分的阶次, 从而构建性能更加完备的图像处理算子; d) 图像去噪和图像增强是互为逆过程, 因此, 可以尝试将基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型利用反扩散原理推广得到基于分数阶偏微分方程的图像增强模型, 并将该模型和其他的一些经典图像增强方法结合得到性能更加优越的图像增强模型; e) 本文介绍关于分数阶偏微分方程的图像处理模型都是基于较弱函数空间条件下建立的, 在数学完备性方面存在不足, 因此需要寻找更为适合的基于分数阶微积分理论的图像描述空间对图像建模。

分数阶微积分理论作为一种崭新的工程应用工具, 已经引起了国内外众多科技工作者的广泛关注, 并在包括图像处理的实际应用领域中取得了较好的成果。因此可以大胆预测, 随着分数阶微积分理论的进一步发展和完善, 数值计算方法和滤波器构造方法的进一步简化和改进, 学术前沿的新方法和新技术的进一步推广和应用, 计算机硬件设备运算能力的进一步发展和提高, 分数阶微积分理论未来必将具有更加广泛的应用空间。

参考文献:

[1] LEIBNIZ G W. Correspondance de Leibniz avec Hugen, van Zulichem et le Marquis de L'Hospital[M]. Paris: Libr. de A. Franck, 1853:297-302.

[2] MANDELBROT B B, Van NESS J W. The fractional brounian mo-

- tions, fractional noises and applications[J]. *SIAM Review*, 1968, 10(4):422-437.
- [3] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- [4] 袁晓, 张红雨, 虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计[J]. *电子学报*, 2004, 32(10):1658-1665.
- [5] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004:23-49.
- [6] 陶然, 张峰, 王越. 分数阶 Fourier 变换离散化的研究进展[J]. *中国科学 E 辑: 信息科学*, 2008, 38(4):481-503.
- [7] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5):771-776.
- [8] PODLUBNY I. Fractional-order systems and controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1):208-214.
- [9] ZAYED A I. On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Process Lett*, 1996, 3(12):310-311.
- [10] 廖科. 分数阶微积分运算数字滤波器设计与电路实现及其应用[D]. 成都: 四川大学, 2006.
- [11] RODIECK R W. Quantitative analysis of cat retinal ganglion cell response to visual stimuli[J]. *Vision Research*, 1965, 5(11):583-601.
- [12] 蒲亦非, 袁晓, 廖科, 等. 一种实现任意分数阶神经型脉冲振荡器的格形模拟分抗电路[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2006, 38(1):128-132.
- [13] 陈庆利, 蒲亦非, 黄果, 等. 分数阶神经型脉冲振荡器[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2011, 43(1):123-128.
- [14] 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. *自动化学报*, 2007, 33(11):1128-1135.
- [15] PU Yi-fei, WANG Wei-xing, ZHOU Ji-liu, *et al.* Fractional differential approach to detecting textural features of digital image and its fractional differential filter implementation[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, 51(9):1319-1339.
- [16] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2007, 39(3):124-132.
- [17] 蒲亦非. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中的研究[D]. 成都: 四川大学, 2006.
- [18] 蒲亦非, 王卫星, 周激流, 等. 数字图像纹理细节的分数阶微分检测及其分数阶微分滤波器实现[J]. *中国科学 E 辑: 信息科学*, 2008, 38(12):2252-2272.
- [19] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2007, 39(3):124-132.
- [20] PU Yi-fei, ZHOU Ji-liu, YUAN Xiao. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2010, 19(2):491-511.
- [21] 黄果, 蒲亦非, 陈庆利, 等. 非整数步长的分数阶微分滤波器在图像增强中的应用[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2011, 43(1):129-136.
- [22] 黄果, 蒲亦非, 陈庆利, 等. 基于分数阶积分的图像去噪[J]. *系统工程与电子技术*, 2011, 33(4):925-932.
- [23] 杨柱中, 周激流, 黄梅, 等. 基于分数阶微分的边缘检测[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2008, 40(1):152-157.
- [24] 杨柱中, 周激流, 晏祥玉, 等. 基于分数阶微分的图像增强[J]. *计算机辅助设计与图形学报*, 2008, 20(3):343-348.
- [25] 杨柱中, 周激流, 黄梅, 等. 用分数阶微分提取图像边缘[J]. *计算机工程与应用*, 2007, 43(35):15-18.
- [26] MATHIEU B, MELCHIOR P, OUTSALOU P, *et al.* Fractional differentiation for edge detection[J]. *Signal Processing*, 2003, 83(11):2421-2432.
- [27] 李远禄, 于盛林. 分数阶差分及边缘检测[J]. *光电工程*, 2006, 33(12):70-74.
- [28] 汪凯宇, 肖亮, 韦志辉. 基于图像整体变分和分数阶奇异性提取的图像恢复模型[J]. *南京理工大学学报: 自然科学版*, 2003, 27(4):400-404.
- [29] 刘红毅, 韦志辉. 基于分数阶样条小波与 IHS 变换的图像融合[J]. *南京理工大学学报: 自然科学版*, 2006, 30(1):82-84.
- [30] LIU Jun, CHEN Song-can, TAN Xiao-yang. Fractional order singular value decomposition representation for face recognition[J]. *Pattern Recognition*, 2007, 41(1):168-182.
- [31] 左凯, 孙同景, 李振华, 等. 二维分数阶卡尔曼滤波及其在图像处理中的应用[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(12):3027-3031.
- [32] 汪成亮, 兰利彬, 周尚波. 自适应分数阶微分在图像纹理增强中的应用[J]. *重庆大学学报*, 2011, 34(2):32-37.
- [33] 高朝邦, 周激流. 基于四元数分数阶方向微分的图像增强[J]. *自动化学报*, 2011, 37(2):150-159.
- [34] BAI Jian, FENG Xiang-chu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2007, 16(10):2492-2502.
- [35] 张军, 韦志辉. SAR 图像去噪的分数阶多尺度变分 PDE 模型及自适应算法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(7):1654-1659.
- [36] 张军, 韦志辉. 一种基于卷积积分的图像去噪变分方法[J]. *中国图象图形学报*, 2008, 13(9):1673-1677.
- [37] 张军, 韦志辉. 分数阶图像去噪变分模型及投影算法[J]. *计算机工程与应用*, 2009, 45(5):1-6.
- [38] 张军. 基于分数阶变分的图像建模与去噪算法研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2009.
- [39] ZHANG Jun, WEI Zhi-hui. A class of fractional-order multi-scale variational models and alternating projection algorithm for image denoising[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(5):2516-2528.
- [40] 沈淑君. 分数阶微分方程的数值解方法及误差分析[D]. 厦门: 厦门大学, 2005.
- [41] 庄平辉, 刘发旺. 空间—时间分数阶扩散方程的显式差分近似[J]. *高等学校计算数学学报*, 2005, 27(51):223-228.
- [42] MAINARDI F, LUCHKO Y, PAGNINI G, PARADISI G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion[J]. *Frac Calc Appl Anal*, 2001, 4(2):153-192.
- [43] HUANG Feng-hui, LIU Fa-wang. The fundamental solution of the space-time fractional advection dispersion equation[J]. *Journal of Applied Mathematics & Computing*, 2005, 18(1-2):339-350.
- [44] TSCHUMPERLE D, DERICHE R. Vector-valued image regularization with PDEs: a common framework for different applications[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(4):506-517.
- [45] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Variational denoising of partially textured images by spatially varying constraints[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2006, 15(8):2281-2289.
- [46] 朱立新, 王平安, 夏德深. 引入耦合梯度保真项的非线性扩散图像去噪方法[J]. *计算机研究与发展*, 2007, 44(8):1390-1398.

- tion with a mobile phone: effects of touch key size and touch key location[J]. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 2010, 40(1): 68-76.
- [19] CHANG C. Usability comparison of pen-based input for young children on mobile devices[C]//Proc of IEEE International Conference on Sensor Networks, Ubiquitous, and Trustworthy Computing, 2008: 531-536.
- [20] SHRESTHA S. Mobile Web browsing: usability study[C]//Proc of the 4th International Conference on Mobile Technology, Applications, and Systems and the 1st International Symposium on Computer Human Interaction in Mobile Technology. New York: ACM Press, 2007: 187-194.
- [21] KIM H, KIM J, LEE Y. An empirical study of use contexts in the mobile Internet, focusing on the usability of information architecture[J]. *Information Systems Frontiers*, 2005, 7(2): 175-186.
- [22] LU H, SU P. Factors affecting purchase intention on mobile shopping Web sites [J]. *Internet Research*, 2009, 19(4): 442-458.
- [23] HALL R, HANNA P. The impact of Web page text-background color combinations on readability, retention, aesthetics and behavioral intention[J]. *Behavior & Information Technology*, 2004, 23(3): 183-195.
- [24] GUIRGUIS S K, HASSAN M A. A smart framework for Web content and resources adaptation in mobile devices[C]//Proc of the 12th International Conference on Advanced Communication Technology. 2010: 487-492.
- [25] KAIKKONEN A. Usability problems in today's mobile Internet portals [C]//Proc of the 2nd International Conference on Mobile Technology, Applications and Systems. 2005: 1-7.
- [26] ACTON T, GOLDEN W, GUDEA S, *et al.* Usability and acceptance in small-screen information systems[C]//Proc of the 9th European Collaborative Electronic Commerce Technology and Research Conference, 2004.
- [27] NAH F. A study on tolerable waiting time: how long are Web users willing to wait [J]. *Behavior & Information Technology*, 2004, 23(3): 153-163.
- [28] TARASEWICH P. Mobile commerce opportunities and challenges: designing mobile commerce applications[J]. *Communications of the ACM*, 2003, 46(12): 1-60.
- [29] MENON S, KAHN B. Cross-category effects of induced arousal and pleasure on the Internet shopping experience[J]. *Journal of Retailing*, 2002, 78(1): 31-40.
- [30] FRANKA M, CHRISTOPH M. Mobile Web usability evaluation-combining the modified think aloud method with the testing of emotional, cognitive and conative aspects of the usage of a Web application [C]//Proc of the 9th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science. Washington DC: IEEE Computer Society, 2010: 367-372.
- [31] BANDURA A. Social foundations of thought and action; a social cognitive theory[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc, 1986.
- [32] STAPLES D, HULLAND J, HIGGINS C. A self-efficacy theory explanation for the management of remote workers in virtual organizations [J]. *Journal of Computer-Mediated Communication*, 1998, 3(4): 758-776.
- [33] HSU M, CHIU C. Internet self-efficacy and electronic service acceptance[J]. *Decision Support Systems*, 2004, 38(3): 369-381.
- [34] LUARN P, LIN H. Toward an understanding of the behavioral intention to use mobile banking[J]. *Computers in Human Behavior*, 2005, 21(6): 873-891.
- [35] TSIAOUSIS A S, GIAGLIS G M. An empirical assessment of environmental factors that influence the usability of a mobile website[C]//Proc of the 9th International Conference on Mobile Business. Washington DC: IEEE Computer Society, 2010: 161-167.
- [36] SEO S, JUNG S. Perceived crowding's influence on consumer's shopping behavior[J]. *Korean Journal of Distribution Research*, 2005(1): 23-32.
- [37] SCHMIDT A, BEIGL M, GELLERSEN H. There is more to context than location[J]. *Computer & Graphics*, 1999, 23(6): 893-901.
- [38] HEO J, HAMB D, PARK S, *et al.* A framework for evaluating the usability of mobile phones based on multi-level, hierarchical model of usability factors[J]. *Interacting with Computers*, 2009, 21(4): 263-275.
- [39] LESEMAN E, NATALIE W, SVEN K. Combining methods to evaluate mobile usability [C]//Proc of the 9th International Conference on Human Computer Interaction with Mobile Devices and Services. 2007: 444-447.
- [40] DUH H, TAN G, CHEN V. Usability evaluation for mobile device: a comparison of laboratory and field tests [J]. *Journal of Usability Studies*, 2005, 1(1): 4-16.
- (上接第 420 页)
- [47] SUN Xiao-li, WANG Jun-ping, SONG Guo-xiang. Anisotropic diffusion filtering method with a fidelity term[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(8): 1421-1423.
- [48] 陈利霞, 冯象初, 王卫卫, 等. 加权变分的图像去噪算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(2): 392-395.
- [49] LEE S H, SEO J K. Noise removal with Gauss curvature-driven diffusion[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2005, 14(7): 904-909.
- [50] 王新楼, 乔明, 邹谋炎. 一种基于偏微分方程的 SAR 图像去噪方法[J]. *电子与信息学报*, 2005, 27(9): 1365-1369.
- [51] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
- [52] RUDING L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physical D*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [53] OSHER S, RUDIN L I, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D, Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(3): 259-268.
- [54] LYSAKER M, LUNDERVOLD A, TAI X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2003, 12(12): 1579-1590.
- [55] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: active contour models[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1988, 1(4): 321-331.
- [56] XU Chen-yang, JERRY L P. Snakes shapes and gradient vector flow [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 1998, 7(3): 359-369.
- [57] XU Chen-yang, JERRY L P. Generalized gradient vector flow external forces for active contours[J]. *Signal Processing*, 1998, 71(2): 131-139.