

一种高数值精度的 P3P 问题半闭式解法 *

冷大炜^{1,2}, 孙卫东¹

(1. 清华大学 电子工程系, 北京 100084; 2. 中国科学院研究生院 信息科学与工程学院, 北京 100049)

摘 要: 根据有限数目的参考点,通过二维单目观测图像估计三维目标的姿态参数(又称 PnP 问题,perspective-*n*-point)是计算机视觉研究中的一个经典难题。当参考点的数目 $n < 6$ 时,PnP 问题为高度非线性问题并可能存在多个可行解。目前求解 PnP 问题的方法主要分为迭代解法和闭式解法两类。迭代解法数值精度高,但是只能收敛到多解中的一个解,无法同时得到全部可行解;闭式解法的优点是可以一次得到全部可行解,但是现有算法在数值精度和数值稳定性上要逊于迭代解法。针对以上问题,以 P3P 问题为研究对象,提出一种可以同时得到全部可行解并具有高数值精度的半闭式解法,并通过详细的实验验证该方法的有效性。

关键词: P3P; 单目视觉; 姿态估计; 半闭式解法

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2012)01-0333-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.01.092

Semi-closed method for P3P with high numerical precision

LENG Da-wei^{1,2}, SUN Wei-dong¹

(1. Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. School of Information Science & Engineering, Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Estimating 3D object's pose parameters from 2D monocular image with limited number of reference points (known as PnP problem) is a classical difficult problem in computer vision research. When the number of reference points $n < 6$, PnP problem is highly nonlinear and multiple feasible solutions may exist. State-of-art methods for solving PnP problem mainly divide into two categories; iterative methods and closed-form methods. Iterative methods are highly precise, but can converge to only one of all the feasible solutions at a time; whereas closed-form methods can retrieve all the feasible solutions at a time, but are inferior to iterative methods in numerical precision and stability. This article proposed a new semi-closed method for P3P problem, which had high numerical precision. And proved the effectiveness of proposed method with thorough experiments.

Key words: P3P; monocular vision; pose estimation; semi-closed method

1 研究背景

根据有限数目的参考点,通过二维单目观测图像对三维目标相对于相机的姿态参数进行估计是计算机视觉和摄影测量研究中的一个经典难题,在目标跟踪、目标识别、机器人导航、虚拟现实^[1]中都有着重要的应用价值。基于点的姿态估计问题又称为 PnP 问题,其数学描述为:“给定观测图像中的 n 个参考点,确定使目标三维模型与二维观测图像相对应的坐标变换参数”。

对 PnP 问题,当 $n < 6$ 时为高度非线性问题,并可能存在多个可行解。由 Grunert^[2]、Fischler 等人^[3]指出,对 P3P 问题,通常存在 2 个可行解,并且最多可以存在 4 个可行解;对 P4P 问题,当 4 个参考点对应的三维坐标在一个平面内时存在唯一解,否则最多可以存在 5 个可行解;对 P5P 问题,文献[4]指出可以最多存在 4 个可行解。文献[5]对 P3P 问题存在不同数目的可行解的条件进行详细研究,但是其结论过于复杂,尚未完全解决在求解 P3P 问题之前判断其可行解数目的问题。

对于非线性 PnP 问题的求解,目前的算法主要分为迭代

解法和闭式解法两类。迭代解法的思路是将 PnP 问题表述为某个特定代价函数的最优化问题,点具有较高的数值精度,其缺点是当 PnP 问题存在多个可行解时,迭代解法无法同时得到全部可行解,一次只能收敛到多个可行解中的一个解,其代表性的算法有由 David 等人提出的 POSIT 算法^[6],以及由 Lu 等人提出的 OI 算法^[1]等。闭式解法的思路是将 PnP 问题表述为 4~8 阶的多项式方程(组),通过求解高阶方程(组)的根来求解 PnP 问题。其优点是可以一次得到 PnP 问题的全部可行解,缺点是在数值精度和数值稳定性上要逊于迭代解法。代表性的算法包括 Grunert、Fischler、Quan 等人^[2,3,7]提出的闭式解法。对于 PnP 问题闭式解法的数值精度和数值稳定性问题,从 1994 年 Haralick 等人^[8]以综述的形式对几种代表性的闭式解法的数值精度表现进行了总结之后一直再没有较大的进展,直到最近 Noguera 等人^[9]提出了一种新的 PnP 问题闭式解法,通过把 PnP 问题的 n 个点的 3D 坐标表达为 4 个虚拟控制点的加权和,将 PnP 问题的求解转换为 2 阶方程组的根的求解。文献[9]的解法把需要求解的方程组阶数降低至 2 阶,在数值精度和数值稳定性方面有了明显提高,可与迭代解法的精度相媲美。但是由于其解法需要首先将 PnP 问题的 n 个投影

收稿日期: 2011-04-25; 修回日期: 2011-06-14 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60872083)

作者简介: 冷大炜(1982-),男,山东烟台人,博士,主要研究方向为计算机视觉、高维图像处理(daweileng@gucas.ac.cn);孙卫东(1961-),男,教授,博士,主要研究方向为遥感图像处理、计算机视觉、模式识别等。

点转换为 4 个虚拟点的加权和,因此只适用于 $n \geq 4$ 的情况。

本文主要关注于 P3P 问题的求解,针对前述迭代解法和闭式解法存在的缺陷,从“能否根据迭代解法已经求得的可行解推知其他可行解”的角度出发,提出一种可以同时得到全部可行解并具有高数值精度和数值稳定性的半闭式解法。首先由迭代解法求得 P3P 问题的一个可行解,然后通过共线约束,将求取其他可行解的问题转换为 2 阶方程组的求解,与现有闭式解法相比大大降低了需要求解的方程(组)的阶数,从而显著提高了算法的数值精度和数值稳定性。

2 求解 P3P 问题的半闭式解法

2.1 问题的数学描述

本文使用透视模型来对相机的成像过程进行建模。令 $\mathbf{x}_u$ 表示目标自坐标系坐标, $\mathbf{x}_v$ 表示相机坐标系(世界坐标系)坐标, $\mathbf{x}_p$ 表示像平面坐标, $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{t}$ 分别表示目标自坐标系到相机坐标系进行坐标变换的旋转矩阵和平移矢量。

相机坐标系与目标自坐标系之间的变换方程为

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{R}\mathbf{x}_v + \mathbf{t} \quad (1)$$

或以矩阵形式表示为

$$\mathbf{X}_u = \mathbf{R}\mathbf{X}_v + \mathbf{t}^T \quad (2)$$

其中: $\mathbf{h}$ 为全 1 矢量。

像平面与目标自坐标系之间的变换方程为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ 1 \end{pmatrix} \sim \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{R} | \mathbf{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中: $\sim$ 表示在齐次意义上相等^[10], $\mathbf{K}$ 表示相机的内参数矩阵。为了保持叙述和推导的简洁,后文中将假设相机的内参数矩阵 $\mathbf{K}$ 已经标定。对于 PnP 问题,其详细数学描述为:

给定 n 个参考点在三维目标自坐标系的坐标 $\{\mathbf{x}_{u,i}\}$ 以及其在二维像平面坐标系的对应坐标 $\{\mathbf{x}_{p,i}\}$, 求解目标自坐标系到相机坐标系的坐标变换参数: 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 和平移矢量 $\mathbf{t}$ 。

本文的基本思路是: 首先通过迭代算法求得 P3P 问题的一个可行解,然后再使用本文提出的 FAOS 算法求得其他的全部可行解。FAOS 算法为闭式解法,其作用是根据给定的一个可行解求得 P3P 问题的其他可行解。这个初始解本文使用迭代解法求得,由于迭代解法高数值精度的特点,因此可以保证输入到 FAOS 算法的初始解具有高的数值精度,从而避免此环节中产生精度损失。由于本文的解法为迭代和闭式算法的结合,因此称之为半闭式解法。

2.2 FAOS 算法

FAOS 算法的核心原理是根据 P3P 问题多个可行解之间的共线约束,将 PnP 问题转换为 AOP 问题^[11],并将 PnP 问题最终转换为二项式方程组根的求解。

所谓共线约束是指,对于 PnP 问题的所有可行解,不同解之间对应点在相机坐标系中的三维坐标与相机的光学中心处于同一条直线上,如图 1 所示。将相机的光学中心作为相机坐标系的原点,则上述共线约束可以通过下式进行数学表述:

$$\mathbf{x}'_{u,i} = d_i \cdot \mathbf{x}_{u,i} \quad (4)$$

或者以矩阵形式表示为

$$\mathbf{X}'_u = \mathbf{X}_u \mathbf{D} \quad (5)$$

其中:

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N), d_i > 0, i = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

为对角比例矩阵。引入比例矩阵 $\mathbf{D}$ 后,对于 PnP 问题的所有可行解,相机坐标系与目标自坐标系之间的变换方程式(2)可以重写为

$$\mathbf{X}_u \mathbf{D} = \mathbf{R}\mathbf{X}_v + \mathbf{t}^T \quad (7)$$

式(7)的重要意义在于,可以将 PnP 所有可行解问题的求解转换为比例矩阵 $\mathbf{D}$ 所有可能值的求解。

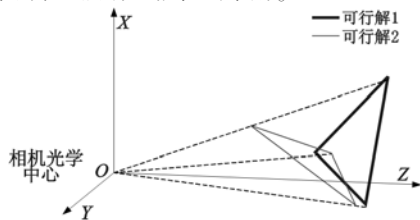


图1 P3P问题两个可行解之间的共线约束

式(7)满足 AOP 问题的形式。与标准 AOP 问题的不同在于,式(7)中除了旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 和平移矢量 $\mathbf{t}$ 外还包含一个额外未知参数——比例矩阵 $\mathbf{D}$ 。下面来推导求解比例矩阵 $\mathbf{D}$ 所需要满足的约束条件:

首先在方程式(7)两边同乘以矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{h}\mathbf{h}^T}{\mathbf{h}^T\mathbf{h}} \quad (8)$$

以去除方程中的平移矢量。得到方程

$$\mathbf{X}_u \mathbf{D} \mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{X}_v \mathbf{H} \quad (9)$$

令 $(\mathbf{U}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{V})$ 为 $\mathbf{X}_u \mathbf{D} \mathbf{H} (\mathbf{X}_v \mathbf{H})^T$ 的一个 SVD 分解,亦即满足

$$\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \mathbf{X}_u \mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T \quad (10)$$

根据文献[11],旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的最优解可以通过下式求得

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{U} \mathbf{V}^T \quad (11)$$

根据式(9)将 $\mathbf{X}_u \mathbf{D} \mathbf{H}$ 用 $\mathbf{R}\mathbf{X}_v \mathbf{H}$ 替换,得到方程

$$\mathbf{R}\mathbf{X}_v \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (12)$$

然后根据式(11)将矩阵 $\mathbf{R}$ 用 $\mathbf{U} \mathbf{V}^T$ 替换

$$\mathbf{U} \mathbf{V}^T \mathbf{X}_v \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (13)$$

将上式两端同乘以 $\mathbf{V}^T \mathbf{U}$,则可以得到方程

$$\mathbf{X}_v \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (14)$$

式(14)为矩阵 $\mathbf{X}_v \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T$ 的特征值分解。因为矩阵 $\mathbf{X}_v$ 为已知量,因此矩阵 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 的值可以被矩阵 $\mathbf{X}_v \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T$ 的特征值分解唯一确定。

在得到矩阵 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 的值后,由式(10)有

$$\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{X}_u \mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T \mathbf{V} \quad (15)$$

定义

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_u, \mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_v^T \mathbf{V} = \mathbf{H} \mathbf{X}_v^T \mathbf{V} \quad (16)$$

则式(16)可以被最终简化为

$$\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (17)$$

在式(17)中,矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 的值为已知量,未知量包括酉矩阵 $\mathbf{U}$ 和待求的比例矩阵 $\mathbf{D}$ 。为了获得矩阵 $\mathbf{D}$ 的约束方程,需要利用矩阵 $\mathbf{U}$ 的酉性约束。根据矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的秩的不同,需要分成以下三种情况进行分别讨论:

a) $\text{rank}(\mathbf{\Lambda}) = 3$, 此时矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 满秩,因此为可逆矩阵。根据矩阵 $\mathbf{U}$ 的酉性,可以得到比例矩阵 $\mathbf{D}$ 的六个二项式约束方程。具体地说,定义

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \quad (18)$$

其中: 矢量 $\mathbf{u}_i$ 代表矩阵 $\mathbf{U}$ 的第 i 列,则六个约束方程表达式为

$$\|\mathbf{u}_i\| = 1, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0, \quad i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3, i \neq j \quad (20)$$

由于比例矩阵 $\mathbf{D}$ 为对角阵,对于 PnP 问题,只需要 n 个约

束方程,因此对于 P3P 问题,上述的六个约束方程构成超定方程组,求解该 2 阶方程组的根即可得到比例矩阵 D 的解。

b)rank(Λ) = 2。此时矩阵 Λ 不可逆,使得约束方程式 (10)(20)中与 u_3 相关的三个约束方程不再有效,因此只剩下三个约束方程可用。由于对于 P3P 问题比例矩阵 D 的求解只需要三个约束方程,因此此时仍可以通过求解 2 阶方程组的根得到比例矩阵 D 的解。

c)rank(Λ) = 1。此时 PnP 问题的所有参考点位于同一条直线上,没有实际意义。

对于比例矩阵 D 的二项式约束方程组,本文采用 PHC-pack^[12] 进行求解。在求得比例矩阵 D 的所有可行解后,利用式(5)即可求得 PnP 问题的所有可行解。

本文采用文献[1]提出的 OI 迭代算法求取 FAOS 算法所需要的初始可行解。OI 算法具有全局收敛性,同时也是当前数值精度最高的算法之一^[2]。

3 实验分析

本章将通过实验对本文提出的 P3P 问题的半闭式解法的性能进行详尽的分析。作为性能评价的标尺,本文选取当前求解 P3P 问题闭式解法中具有最低阶数的两种方法,即 Fischler 解法^[3]和 Grunert 解法^[2],作为对比。这两种方法需要求解的多项式方程(组)的阶数均为 4 阶,其数值精度性能已经在文献[8]的综述中得到了详细的分析和验证。本章所有实验源码均采用 MATLAB Script 编写,PHCpack^[12] 的版本为 v2.4.31。

3.1 实验数据

实验使用三组具有不同 DSR (distance/size ratio,距离/尺寸比)值(DSR = 100,10,1)的测试数据,每组数据包含 6 000 个测试案例,每个测试案例的姿态角参数为随机选取。

为了验证各算法返回解的正确与否,将目标的三个参考点的坐标根据算法估计得到的姿态参数值重新投影到像平面,然后检查重投影得到的像平面坐标 $\{\hat{x}_{p,i}\}$ 与实际像平面坐标 $\{x_{p,i}\}$ 的吻合程度。定义相对误差

$$e = \frac{\|X_p - \hat{X}_p\|_F^2}{\|X_p - X_{\text{mean}}\|_F^2} \tag{21}$$

其中: X_{mean} 表示三个参考点在实际像平面坐标的均值。给定阈值 e_{th} ,当相对误差 $e \leq e_{th}$ 时将该解判定为正确解,否则将该解判定为错误解。本文中相对误差阈值设为一个非常小的值

$$e_{th} = 1E - 4 \tag{22}$$

3.2 FAOS 算法数值精度

本节首先对本文提出的 FAOS 算法的数值精度进行分析。作为数值精度评价指标,这里使用式(21)定义的相对误差 e 来描述 FAOS 算法返回的 P3P 问题解的准确度。作为比较,同时也给出 Fischler 和 Grunert 解法的数值精度分析结果,如表 1 所示。

表 1 三种方法的数值精度统计结果

DSR	算法全部返回解的平均误差 ($e \pm \sigma$)			算法正确返回解的平均误差 ($e \pm \sigma$)		
	Fis	Gru	FAOS	Fis	Gru	FAOS
1	2.6317e-14	9.0024e-16	1.1957e-32	2.7398e-14	9.3722e-16	1.1957e-32
	$\pm 2.9278e-12$	$\pm 7.1240e-14$	$\pm 1.3366e-32$	$\pm 2.9873e-12$	$\pm 7.2688e-14$	$\pm 1.3366e-32$
10	9.8993e-4	0.1589	1.1421e-32	7.5484e-10	7.8141e-10	1.1421e-32
	$\pm 2.9022e-3$	± 7.9088	$\pm 1.1340e-32$	$\pm 5.6601e-8$	$\pm 6.0759e-8$	$\pm 1.1340e-32$
100	0.0119	196.3554	1.1017e-32	6.6767e-8	1.3719e-7	1.1017e-32
	± 0.2141	$\pm 7.3401e+3$	$\pm 1.1987e-32$	$\pm 1.4754e-6$	$\pm 2.3674e-6$	$\pm 1.1987e-32$

表 1 的结果分为两部分,第一部分为三种算法对三组测试数据返回的全部解的平均数值精度(误差平均值 $\pm$ 标准差),第二部分为三种算法返回的解中所有正确解的平均数值精度。实验表明 FAOS 算法返回的全部解均为正确解,亦即相对误差式(21)总小于阈值式(22),因此在两部分中的精度数据相同。从表 1 的结果可以看到:

a)FAOS 算法的数值精度要明显优于 Fischler 和 Grunert 解法,在 64 bit 字长浮点计算的情况下,即使只考虑三种算法返回解中正确解的平均数值精度,FAOS 算法的精度仍然高出 Fischler 和 Grunert 解法几十个数量级。

b)FAOS 算法的数值精度不随距离/尺寸比 DSR 的大小而变化,平均误差始终保持在 $1e-32$ 量级;而 Fischler 和 Grunert 解法的数值精度则随 DSR 值的增大而降低,从 DSR = 1 到 DSR = 100,存在 6~9 个量级的精度损失。

3.3 P3P 问题半闭式解法总体性能

本节将对包括迭代初始解 + FAOS 算法在内的完整的 P3P 问题半闭式解法的总体性能进行测试和分析。

表 2 给出了半闭式解法中迭代初始解(OI 算法^[1])的数值精度分析统计结果和使用迭代初始解作为输入,由 FAOS 算法求得 P3P 问题的全部可行解的数值精度分析统计结果。表 2 的第 2 列为迭代解法失败案例的数目;第 3 列为迭代解法在成功收敛之前的平均迭代次数;第 4 列则给出了迭代解法估计得到的 P3P 问题初始解的平均误差(误差平均值 $\pm$ 标准差);第 5 列给出了三组测试案例中最终 P3P 问题全部可行解存在漏解的案例数目。经过验证,这 20 个测试案例的准确可行解数目为 3 或 4,而半闭式解法得到的可行解数目均为 2。发生上述漏解问题的原因在于,这 20 个测试案例的三角形结构并不稳定,亦即对 P3P 问题的三个参考点坐标添加极小的扰动即可造成准确可行解的数目发生变化。

表 2 本文 P3P 问题半闭式解法总体数值精度统计结果

DSR	迭代算法得到的初始解的数值精度			由 FAOS 算法得到的 最终 P3P 问题全部可行解的数值精度		
	失败案例数目	平均迭代次数	平均误差 ($e \pm \sigma$)	存在漏解的案例数目	存在错解的案例数目	平均误差 ($e \pm \sigma$)
1	0	8 814	3.9841e-10 $\pm 5.5810e-10$	20	0	4.0066e-10 $\pm 5.6405e-10$
10	0	4 518	2.2102e-10 $\pm 9.7280e-11$	0	0	2.2090e-10 $\pm 9.7225e-11$
100	0	26 465	2.3460e-10 $\pm 3.1240e-10$	0	0	2.3477e-10 $\pm 3.1248e-10$

对比表 1、2 的结果可以得出以下结论:

a)本文的半闭式解法的整体数值精度在 DSR = 1 的情况下略低于 Fischler 和 Grunert 解法,但是在 DSR = 10 和 DSR = 100 的情况下都具有非常明显的精度优势。

b)本文的半闭式解法的数值精度主要受迭代初始解精度的影响,由表 2 和 3 平均误差结果对比可以看到,半闭式解法中的 FAOS 算法具有非常稳定的误差传递特性,迭代初始解的误差在经过 FAOS 算法后仍然保持在相同的量级,没有产生误差放大。为了使本文的半闭式解法具有更高的数值精度,可以降低迭代算法收敛的阈值或增大迭代次数以获得更高精度的迭代初始解。

c)本文的半闭式解法的数值精度不受距离/尺寸比 DSR 值大小的影响,对测试的三组案例,其结果的平均误差始终保持在 $1e-10$ 的量级;而 Fischler 和 Grunert 解法(下转第 368 页)

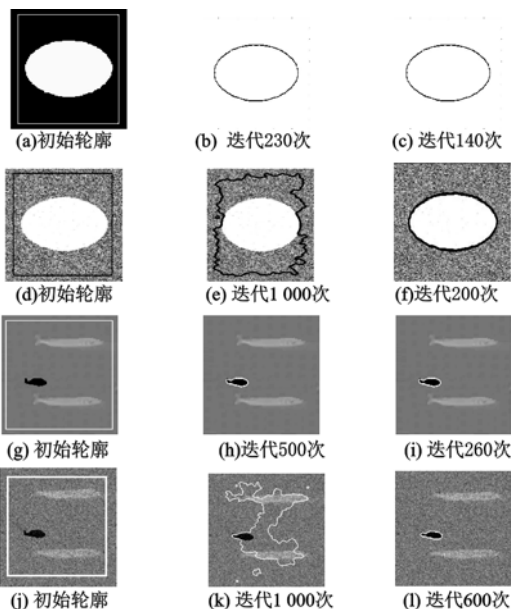


图3 噪声图像的分割

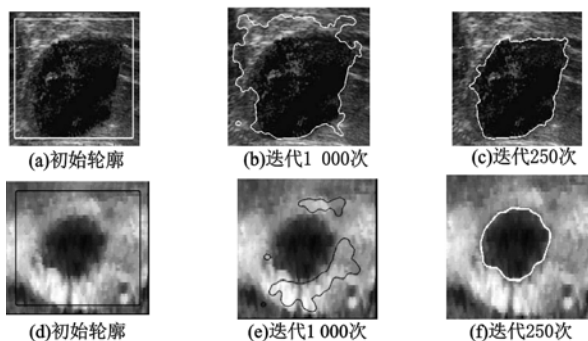


图4 灰度不均的图像分割

4 结束语

本文提出的自适应变化的边缘停止函数克服了传统停止函数的不足,对边缘活动轮廓模型有较好的改进。实验表明,结合区域变化的边缘活动轮廓模型相对于文献[4]方案在以下方面具有优势:a)对噪声的鲁棒性增强;b)对由灰度不均引起的非边缘梯度较大图像检测的有效性。

参考文献:

- [1] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
- [2] CASELLES V, MORE J M, SAPIRO G. Geodesic active contours [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(1): 61-79.
- [3] 何传江,田巧玉.几何活动轮廓模型中停止速度函数的尺度变换[J]. *计算机工程与应用*, 2008, 44(8): 82-84.
- [4] LI Chun-ming, XU Chen-yang, GUI Chang-feng. Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation [J]. *IEEE Trans on Image Process*, 2010, 12(19): 3243-3254.
- [5] LI Chun-ming, FOX M D. Level set evolution without re-initialization: a new variational formulation [C]//Proc of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2005: 430-436.
- [6] CHAN T F, VESE L A. Active contours without edges [J]. *IEEE Trans on Image Process*, 2001, 10(2): 266-277.
- [7] 张文娟,冯象初.基于非局部总变差的图像分割活动轮廓模型[J]. *计算机应用研究*, 2010, 27(6): 2373-2376.

(上接第 335 页)的数值精度受 DSR 值大小的影响非常明显,从 DSR = 1 到 DSR = 100,存在 6~9 个量级的精度损失。

4 结束语

本文针对 P3P 问题的求解,提出了一种具有高数值精度的半闭式解法。其思路是将迭代与闭式解法相结合。与迭代解法相比,本文的半闭式解法在保持高数值精度的同时可以求得 P3P 问题的全部可行解;与现有的闭式解法相比,本文的半闭式解法在数值精度和数值稳定性方面具有明显的优势。实验验证了本文方法的有效性。

参考文献:

- [1] LU C, HAGER G D, MJOLSNES E. Fast and globally convergent pose estimation from video images [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(6): 610-622.
- [2] GRUNERT J A. Das pothenotische problem in erweiterter gestalt nebst über seine anwendungen in der geodäsie [J]. *Grunerts Archiv für Mathematik und Physik*, 1841, 1: 238-248.
- [3] FISCHLER M A, BOLLES R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with application to image analysis and automated cartography [J]. *Graphics and Image Processing*, 1981, 24(6): 381-395.
- [4] WU Y H, HU Z Y. PnP problem revisited [J]. *Journal of Mathe-*

matical Imaging and Vision, 2006, 24(1): 131-141.

- [5] GAO X S, HOU X R, TANG J L, et al. Complete solution classification for the perspective-three-point problem [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(8): 930-943.
- [6] DAVID P, DEMENTHON D, DURASWAMI R, et al. SoftPOSIT: simultaneous pose and correspondence determination [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 59(3): 259-284.
- [7] QUAN L, LAN Z. Linear n -point camera pose determination [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(8): 774-780.
- [8] HARALICK R M, LEE C, OTTENBERG K, et al. Review and analysis of solution of the three point perspective pose estimation problem [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1994, 13(3): 331-356.
- [9] NOGUER F M, LEPETIT V, FUA P. Accurate non-iterative $O(n)$ solution to the PnP problem [C]//Proc of ICCV. 2007: 1-8.
- [10] HARTLEY R, ZISSERMAN A. Multiple view geometry in computer vision [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [11] UMEYAMA S. Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns [J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(4): 376-380.
- [12] VERSCHERDE J. Algorithm 795: PHCpack: a general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation [J]. *ACM Trans on Mathematical Software*, 1999, 25(2): 251-276.