

# 基于局部多项式傅里叶变换的多分量线性调频 信号瞬时频率估计\*

张丽丽<sup>1,2</sup>, 刘四新<sup>2</sup>, 李新波<sup>3</sup>, 吴俊军<sup>2</sup>

(1. 沈阳航空航天大学 电子信息工程学院, 沈阳 110126; 2. 吉林大学 地球探测科学与技术学院, 长春 130034; 3. 吉林大学 通信学院, 长春 130022)

**摘要:** 针对多分量线性调频信号的瞬时频率估计问题,把局部多项式傅里叶变换应用到求多分量线性调频信号瞬时频率估计中,提出了一种不受分量间交叉项干扰的新方法,该方法对多分量线性调频信号进行局部多项式傅里叶变换,把每一个线性调频信号分离出来,根据每一个线性调频信号的局部多项式傅里叶变换谱,通过搜索找到谱的峰值所在的位置,从而找到峰值所对应的频率,准确地估计出了多分量线性调频信号的瞬时频率。仿真实验中与多分量信号的 Wigner-Hough 变换进行了对比,验证了该方法的有效性。

**关键词:** 多分量线性调频信号; 瞬时频率估计; 局部多项式傅里叶变换; 交叉项; Wigner-Hough 变换

**中图分类号:** TN95; TP393

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-3695(2012)01-0181-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.01.051

## Instantaneous frequency estimation of multi-component LFM signals based on local polynomial Fourier transform

ZHANG Li-li<sup>1,2</sup>, LIU Si-xin<sup>2</sup>, LI Xin-bo<sup>3</sup>, WU Jun-jun<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Information Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110126, China; 2. College of GeoExploration Science & Technology, Jilin University, Changchun 130034, China; 3. College of Communication, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** For the problem of the instantaneous frequency estimation of multi-component linear frequency-modulated (LFM) signals, this paper presented a new method for overcoming cross-terms interference. And the local polynomial Fourier transform (LPFT) method was applied to estimate instantaneous frequency of multi-component LFM signals. By means of doing local polynomial Fourier transform on multi-component LFM signals, could separate each LFM signal, and then searched the ridge peaks of the spectrum to find the corresponding frequency according to the local polynomial periodogram of the each LFM signal, so accurately estimate the instantaneous frequency of the multi-component LFM signal. Compared with Wigner-Hough transform, the simulation results verify the availability of the proposed method.

**Key words:** multi-component linear frequency-modulated (LFM) signals; instantaneous frequency; local polynomial Fourier transform (LPFT); cross-terms; Wigner-Hough transform

## 0 引言

在工程应用中,如雷达、声纳、地震等领域所遇到的信号可以表示为多项式相位信号的形式,多项式相位信号的特点是,它的相位是时间的二次或二次以上的函数。线性调频信号是其相位满足时间的二次函数的典型的多项式相位信号。线性调频信号的参数估计方法一直以来都是学者们密切关注的一个问题。

调频信号的频率是随时间呈线性变化的,属于非平稳信号,针对线性调频信号的这个特点,近年出现了很多关于线性调频信号瞬时频率估计的方法,不过很多方法仅仅是在单分量信号的基础上得到的。对于多分量信号,瞬时频率估计问题受到了各分量间交叉项的干扰,它的存在干扰了真实信号的一些

特征,所以影响了线性调频信号的时频分布的分析和解释。针对交叉项的抑制问题,很多研究人员提出了一些方法。文献[1]在 WVD 的基础上,引入一个相位校正函数,来达到抑制信号中自交叉项的目的;文献[2]利用自适应短时傅里叶变换谱和 WVD 分布相结合,以便达到抑制交叉项干扰的目的。上述提到的这些方法是双线性的。另一些学者的研究是基于线性时频变换的,其特点是,即使信号是多分量的也不会受到交叉项的干扰。传统的短时傅里叶变换是这一算法的代表,近年来在短时傅里叶变换基础上发展起来的 S 变换及其广义 S 变换得到了一定的应用。S 变换处理双曲余弦频率调制信号,其时频聚集性优于短时傅里叶变换,但在处理线性调频信号的时候,它的时频聚集性不如短时傅里叶变换<sup>[3]</sup>。本文研究了局部多项式傅里叶变换<sup>[4,5]</sup>理论,相对于短时傅里叶变换,局部

**收稿日期:** 2011-05-14; **修回日期:** 2011-06-27 **基金项目:** 国家高技术研究发展计划“863”专题课题资助项目(2008AA06Z103);国家自然科学基金资助项目(40874073, 41074076);吉林大学科学前沿与交叉学科创新项目(200903303)

**作者简介:** 张丽丽(1979-),女,黑龙江讷河人,讲师,博士研究生,主要研究方向为探地雷达理论以及应用研究(zll08@mails.jlu.edu.cn);刘四新(1966-),男,山西太谷人,教授,博导,主要研究方向为探地雷达、钻孔雷达及电磁波测井的方法理论研究;李新波(1980-),男,山东高密人,讲师,博士研究生,主要研究方向为阵列信号处理;吴俊军(1986-),男,河北沧州人,博士研究生,主要研究方向为探地雷达理论及应用研究。

多项式傅里叶变换的核函数是用一个特别的参数来描述多项式相位信号,所以局部多项式傅里叶变换在处理非平稳信号的过程中比短时傅里叶变换具有更好的时频聚集性<sup>[6]</sup>,并且文献[7]讨论了关于局部多项式傅里叶变换的交叉项的存在性问题,提出其交叉项是可以忽略的,在估计中可以不考虑交叉项的影响问题。所以本文把局部多项式傅里叶变换理论应用到多分量 LFM 信号瞬时频率估计中,提出了一种基于局部多项式傅里叶变换的多分量 LFM 信号瞬时频率估计的新方法。本文以四分量 LFM 信号的瞬时频率估计为例,验证了本文算法的有效性。

## 1 局部多项式傅里叶变换理论

### 1.1 信号模型

单分量多项式相位信号可以表示为

$$x(t) = A(t) e^{j\phi(t)} = A(t) e^{j2\pi \sum_{m=0}^M \omega_m t^m} \quad (1)$$

其中: $A(t)$ 表示多项式相位信号的幅度; $\phi(t)$ 是其相位; $\omega_i$ 代表信号相位的第  $i$  个多项式系数。当  $M=2$  时,信号  $x(t)$  为谐波信号,当  $M=3$  时, $x(t)$  为 LFM 信号。

多分量线性调频信号表示为

$$x(t) = \sum_{i=1}^L A_i(t) e^{j2\pi \sum_{m=0}^2 \omega_{i,m} t^m + n(t)} \quad (2)$$

### 1.2 局部多项式傅里叶变换

#### 1.2.1 局部多项式傅里叶变换连续形式

局部多项式傅里叶变换是一种针对多项式相位信号的一种非平稳信号分析方法,它的连续形式定义为<sup>[9]</sup>

$$\text{LPFT}(t, \omega, \omega_1, \dots, \omega_{L-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) h^*(\tau) e^{-j\phi(\tau, \omega, \omega)} d\tau \quad (3)$$

其中: $\phi(\tau, \omega, \omega) = \omega\tau + \omega_1\tau^2/2 + \dots + \omega_{L-1}\tau^L/L!$ ;  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L-1}\}$  代表  $L-1$  维参数空间向量; $h(\tau)$  是窗函数。从式(3)可以得出:局部多项式傅里叶变换是将复时间信号映射为时间  $t$ 、频率  $\omega$  和参量  $\omega$  构成的函数  $\text{LPFT}_x(t, \omega, \omega)$ 。

如果式(3)中的参数向量  $\omega = 0$ ,那么此时局部多项式傅里叶变换就变成了短时傅里叶变换。可以看出短时傅里叶变换是局部多项式傅里叶变换的一种特例。在处理非平稳信号的过程中,正是由于  $L-1$  维参数向量  $\omega$  的引入,局部多项式傅里叶变换比短时傅里叶变换具有更好的时频聚集性,可以获得更高的分辨率<sup>[8]</sup>。

由式(3)可知,局部多项式傅里叶变换是关于向量  $\omega \in \mathcal{R}^{L-1}$  的周期函数,且对于参量  $\omega_k$ ,其周期为  $2\pi(k-1)!$ ,也就是说

$$\text{LPFT}(t, \omega; \omega_1, \dots, \omega_{L-1}) = \text{LPFT}(t, \omega; \omega_1 + 2\pi, \dots, \omega_{L-1} + 2\pi(L-2)!) \quad (4)$$

为了确保估计性能的有效性,假设  $\omega$  满足下面的条件:

$$Q_\omega = \{ \omega_k : 0 \leq \omega_k \leq 2\pi(k-1)!, k=1, 2, \dots, L-1 \}$$

$$\text{那么, } x(t+\tau) h^*(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{L-1}} \int_0^{2\pi} d\omega_1 \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \text{LPFT}_x(t, \omega, \omega) \times e^{j\phi(\tau, \omega, \omega)} d\omega_{L-1} \quad (5)$$

式(3)和(5)分别定义了局部多项式傅里叶变换的正变换和逆变换,它们是一对局部多项式傅里叶变换对<sup>[8]</sup>。

根据式(3)可以得到局部多项式傅里叶变换谱,它表示为

$$\text{LPP}_x(t, \omega; \omega_1, \dots, \omega_{L-1}) = |\text{LPFT}_x(t, \omega; \omega_1, \dots, \omega_{L-1})|^2 \quad (6)$$

## 2 基于 LPFT 线性调频信号瞬时频率估计

根据式(1),单分量 LFM 信号的瞬时频率通常被定义为

$$\Omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi \sum_{m=1}^2 m\omega_m t^{m-1} \quad (7)$$

对于多分量 LFM 信号的瞬时频率,由于局部多项式傅里叶变换的交叉项在一般较弱条件下其交叉项是可以忽略的<sup>[8]</sup>,在估计中可以不考虑交叉项的影响问题,所以多分量 LFM 信号的瞬时频率的估计问题可以转换为多个单分量 LFM 信号瞬时频率的估计问题,也就是说把多分量 LFM 信号经过局部多项式傅里叶变换后通过遮隔处理后分别提取出每一个分量,然后估计出每个单分量 LFM 信号的瞬时频率即可。

局部多项式傅里叶变换和局部多项式傅里叶变换谱是基于具有时变相位的局部多项式估计原理发展而来的<sup>[10]</sup>。文中从局部多项式近似出发,来导出局部多项式傅里叶变换,定义代价函数为<sup>[9]</sup>

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_m(nT) |x(t+nT) - C \exp(j\phi(nT, \omega, \omega))|^2 \quad (8)$$

其中: $\phi(nT, \omega, \omega) = \omega nT + \frac{\omega_1(nT)^2}{2} + \dots + \frac{\omega_{L-1}(nT)^L}{L!}$ ,  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L-1}\}$ ,  $\omega \in \mathcal{R}^{L-1}$ 。窗函数  $h_m(u)$  满足的条件是  $h_m(u) \geq 0$ , 并且  $h(0) = \max_u h_m(u)$ ; 当  $u \rightarrow \infty$  时,  $h_m(u) \rightarrow \infty$ ;  $\int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = 1$ 。这里  $m$  为频带宽度或窗的长度,对于窗函数和窗长度的选择,对估计值的准确程度是有一定的影响,这两个参数的选择也是局部多项式傅里叶变换理论所要进一步研究的内容。本文选择的窗函数为最常见的矩形窗,那么瞬时频率的估计问题就转换为求式(8)最优解的问题<sup>[9]</sup>,即

$$(\hat{C}, \hat{\omega}(t, m)) = \arg \min_{\omega \in \mathcal{R}^{L-1}} E \quad (9)$$

式(9)的最优解问题等价于下式:

$$\hat{\omega}(t, m) = \arg \max_{\omega \in \mathcal{R}^{L-1}} P(\hat{\omega}) \quad (10)$$

式中,  $P(\hat{\omega}) = |X_h(t, \omega, \hat{\omega})|^2$ , 又知:

$$X_h(t, \omega, \omega) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_m(nT) x(t+nT) \exp(-j\phi(nT, \omega, \omega)) \quad (11)$$

式(11)为局部多项式傅里叶变换的表形式,所以 LFM 信号瞬时频率的估计问题转换成了求局部多项式傅里叶变换模的平方问题,也就是求当局部多项式傅里叶变换谱值为最大时,这时其所对应的向量  $\omega$  的问题。

局部多项式傅里叶变换用  $t - \omega_0(t)$  平面来表示信号的时频能量的分布,如式(6)所示,这种表示方法是局部多项式傅里叶变换谱自身的一个重要特点。其中  $\omega_0(t)$  是信号瞬时频率及其各阶导数所组成的向量  $\omega_0(t) = (\Omega(t), \Omega^{(1)}(t), \dots, \Omega^{(L-1)}(t))'$ 。如果在某时间段内信号具有最高阶次  $L$ ,那么需要搜索  $L-1$  维空间,其最大值点所对应的坐标即为  $\omega_0(t)$ 。本文研究的是 LFM 信号瞬时频率估计问题,所以信号的最高阶次  $L$  为 2,在求取  $\omega_0(t)$  的过程中,仅仅是一维空间的搜索,搜索速度还是很快的。将信号进行局部多项式傅里叶变换,然后求其局部傅里叶变换谱,之后搜索谱峰值所在的位置,此时由对应的局部多项式傅里叶变换谱的峰值找到所对应的  $\omega_0(t)$ ,就可得到 LFM 信号瞬时频率的表示形式。

### 3 仿真实验

图 1 为所构造的四分量 LFM 信号的 Wigner-Hough 变换和局部多项式傅里叶变换,所选信号的长度都为 512 个采样点并且各信号分量都具有相同的强度。其中图 1(a)为信号的 Wigner-Hough 变换,可以看出信号各分量受交叉项的影响非常严重;(b)为信号的局部多项式傅里叶变换,可以看出在局部多项式傅里叶变换中,LFM 信号的各分量之间的交叉项是可以忽略,可以不予考虑的。通过处理后从中可以分离出 LFM 信号的每一个分量,图 2 为图 1(b)中所示四分量 LFM 信号的每一个分量的局部多项式傅里叶变换谱。图 1 信号的表达式为  $x(t) = e^{2\pi j(k_1 t^2 + 0.1t)} + e^{2\pi j(k_2 t^2 + 0.3t)} + e^{2\pi j(k_3 t^2 + 0.2t)} + e^{2\pi j(k_4 t^2 + 0.38t)}$ ,  $k_1 = 0.0001$ ,  $k_2 = -0.0001$ ,  $k_3 = 0.00005$ ,  $k_4 = -0.0002$ 。

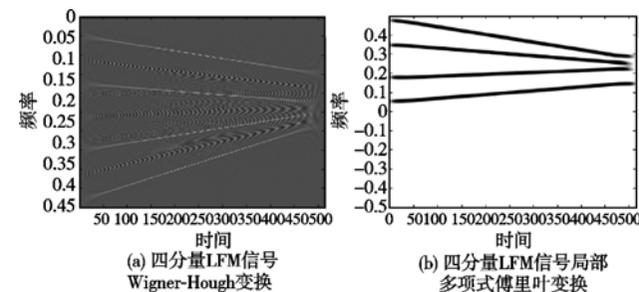


图 1 信号的 Wigner-Hough 变换和局部多项式傅里叶变换

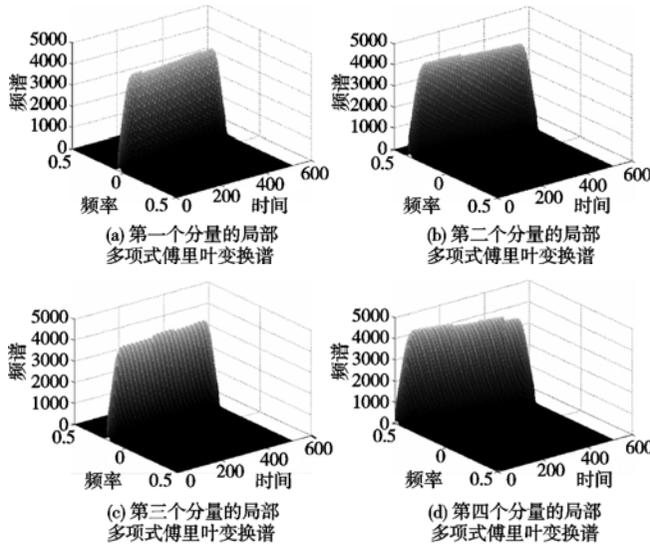


图 2 信号的局部多项式傅里叶变换谱

由式(7)可知,单分量 LFM 信号的瞬时频率为

$$\Omega(t) = 2\pi(\omega_1 + 2\omega_2 t) \quad (12)$$

要计算出瞬时频率,就要知道  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的值。计算  $\omega_2$  是利用文中前面描述的在计算其局部多项式傅里叶变换中,根据式(11)在加窗的时间间隔内作频率的局部近似得到的,本文所取的值为所得到的频率值的算术平均。计算  $\omega_1$  时根据前面算法的描述,经过一维搜索找到局部多项式傅里叶变换谱的峰值,这时峰值所对应的频率值即为  $\omega_1$ 。文中所取的  $\omega_1$  值也是这些频率值的算术平均值,代入到式(12)中从而求得了 LFM 信号的瞬时频率,求得的结果如表 1 所示。从表中可以看出,应用局部多项式傅里叶变换方法求得的多分量 LFM 信号瞬时频率的结果是非常准确的。

图 3 为图 1 信号分别加入高斯噪声和随机噪声情况,可以

看出加入了高斯噪声之后,信号依然具有很好的时频聚焦性。加入随机噪声后,可以看出随机噪声的局部多项式傅里叶变换大致呈一直线分布在零点附近,多分量线性调频信号瞬时频率也是可以利用前面所述方法估计出来的。

表 1 多分量 LFM 信号瞬时频率估计值和实际值

各分量	$\omega_1$		$\omega_2$	
	实际值	估计值	实际值	估计值
第一分量	0.1	0.0991	0.0001	0.0000985
第二分量	0.3	0.3009	-0.0001	-0.0000999
第三分量	0.2	0.1995	0.00005	0.0000520
第四分量	0.38	0.3818	-0.0002	-0.000201

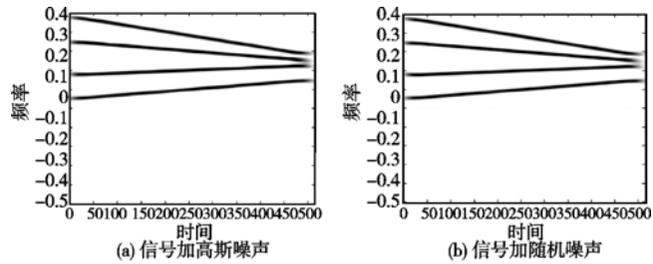


图 3 信号加噪声之后的局部多项式傅里叶变换

### 4 结束语

本文提出了多分量 LFM 信号瞬时频率估计的新方法。由于在多分量信号的局部多项式傅里叶变换中,信号不受信号间交叉项的影响,所以通过对多分量 LFM 信号进行局部多项式傅里叶变换,进行处理后就可以把每一个线性调频信号分离出来,分别求每一个 LFM 信号的局部多项式傅里叶变换谱,通过搜索找到谱的峰值,从而找到峰值所对应的频率,进而求得其瞬时频率。从仿真对比实验中可以看出该方法有效,估计精度较高且计算量相对不大。

### 参考文献:

- [1] 王勇,姜义成. 一种抑制时频分布交叉项的新方法[J]. 电子学报,2008,36(12A):162-165.
- [2] 程发斌,汤宝平,钟佑明. 利用 ASTFT 谱有效抑制 WVD 交叉项的方法[J]. 电子与信息学报,2008,30(10):229-302.
- [3] SEIDIC E, DJUROVIC I. Time-frequency feature representation using energy concentration; an overview of recent advances [J]. Digit Signal Process,2009,19(1):153-183.
- [4] DJUROVI I. Adaptive local polynomial Fourier transform in ISAR [J]. Eurasip Journal on Applied Signal Processing,2006,2006:1-15.
- [5] JU Y, BI G. Generalized fast algorithms for the polynomial time-frequency transform [J]. IEEE Trans on Signal Processing,2007,55(10):4907-4915.
- [6] LI Xiu-mei, BI Guo-an. Uncertainty principle of the second-order LPFT [C]//Proc of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2009:325-328.
- [7] 李新波. 基于 LPFT 的多项式相位阵列信号处理理论与方法研究 [D]. 长春:吉林大学,2009.
- [8] KATKOVNIK V. Nonparametric estimation of instantaneous frequency [J]. IEEE Trans on Information Theory,1997,43(1):183-189.
- [9] KATKOVNIK V. Discrete-time local polynomial approximation of the instantaneous frequency [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998,46(10):2626-2637.